COURS PHYSIQUE 1

Mécanique du point matériel

Présenté par
Mr. KESSI Ferhat

PROGRAMME

INTRODUCTION GÉNÉRALE

- La mécanique est la branche de la physique qui étudie le mouvement des corps matériel dans l'espace et le temps.
- Le mouvement est un changement de position dans l'espace.
- Les corps matériels se divisent en deux catégories :
- Les fluides (gaz et liquides) : ils ne possèdent de forme déterminée, mais prennent la forme du milieu qui les contient.
- Les solides : ils possèdent une forme déterminée. Il y a deux types de solides:
  - Déformables : qui peuvent changer de forme au cours du mouvement.
  - Indéformable : qui gardent le même forme au cours du mouvement.

Dans le cadre de ce cours, on s'intéressera uniquement au mouvement des corps solides indéformables.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La mécanique se divise en trois parties :

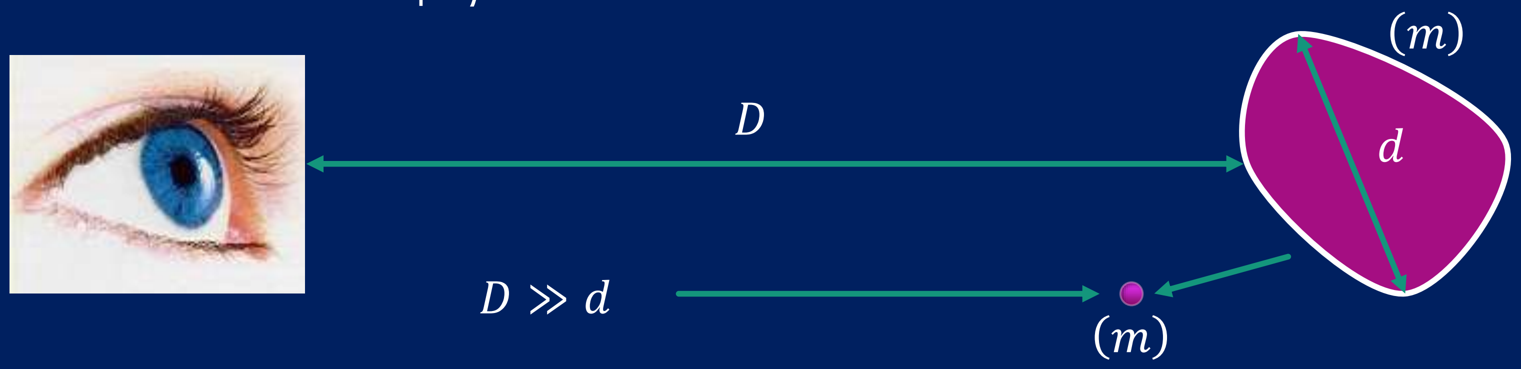
- La cinématique : elle a pour objet l'étude du mouvement en fonction des concepts d'espace et de temps en faisant abstraction de ces causes. L'étude cinématique du mouvement d'un corps matériel consiste à déterminer sa position, sa trajectoire, sa vitesse et son accélération en fonction du temps dans
- La dynamique : elle étudie les relations entre le mouvement et le forces qui constituent les cause du mouvement. Il s'agit de déterminer les forces responsables d'un mouvement ou l'inverse.
- La statique : c'est l'études des équilibres des corps matériels. Il s'agit des déterminer les conditions auxquelles doivent satisfaire les forces qui s'exercent sur un corps pour qu'il reste au repos.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Approximation du point matériel :

Du point de vue mécanique, le mouvement d'un solide indéformable peut être assimilé à celui d'un point géomatique affecté de la masse de ce solide, qu'on appelle point matériel ou particule, si:

- les dimensions de ce corps sont négligeables devant les distances caractéristiques du mouvement étudié (distance parcourue, distance entre l'observateur est le corps).



INTRODUCTION GÉNÉRALE

Exemples :

- Mouvement des étoiles lointaines par rapport à un observateur terrestre.
- Mouvement d'une voiture de 5 m de long se déplaçant sur une route de 20 km, par rapport à un observateur distant de 10 km de cette voiture.

- Pour un solide indéformable en translation (sans rotation), tous les points ont le même déplacement ; dès qu'on connaît la forme de l'objet, l'étude du mouvement d'un de ses points (quelconque) suffit à une description complète quelle que soit la taille de l'objet par rapport aux caractéristiques de son mouvement.

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Grandeur physique :

Une grandeur physique est toute propriété de la nature qui peut être mesurée ou calculée

Exemples : masse, temps, vitesse, force, énergie…etc.

Les grandeurs physiques se divisent en deux grande catégories :

- Les grandeurs fondamentales ou de base : elles sont au nombre de sept. Elles sont dites de base, car elles ne peuvent s'exprimer en fonction des autres grandeurs. En mécanique, on utilisera que trois des ces grandeurs :

La masse	La longueur	Le temps
m	l	t

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Les grandeurs dérivées ou secondaires : qui peuvent s'exprimer en fonction des grandeurs fondamentales.

Exemples :

$$\text{la vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{\text{longueur}}{\text{temps}}$$

$$\text{l'accélération} = \frac{\text{vitesse}}{\text{temps}} = \frac{\text{longueur}}{(\text{temps})^2}$$

$$\text{la force} = (\text{masse})(\text{accélération}) = \frac{(\text{masse})(\text{longueur})}{(\text{temps})^2}$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

En plus de leurs non et symbole, les grandeurs physiques sont caractérisées par :

- Une dimension : qui définie leur nature.

Grandeurs fondamentales :

La masse	La longueur	Le temps
M	**L**	**T**

La dimension d'une grandeur dérivée G est notée [G].

Si G_1 et G_2 sont deux grandeurs physiques et n un nombre relatif, on a :

$$[G_1 G_2] = [G_1][G_2] \; ; \; \left[\frac{G_1}{G_2}\right] = \frac{[G_1]}{[G_2]} \; ; \; [G_1^n] = [G_1]^n$$

La grandeur $G_1 \pm G_2$ n'a de sens que si $[G_1] = [G_2]$ et on a : $[G_1 \pm G_2] \neq [G_1] \pm [G_2]$

OUTILS MATHÉMATIQUES

Si G est une grandeur sans dimensions, alors : $[G] = 1$

Exemple : l'angle plan qui est le rapport entre deux longueurs

Dans les expressions de types $\cos G$, $\sin G$, $\exp G$, $\ln G$ …etc. la grandeur est sans dimension

L'analyse dimensionnelle consiste à déterminer les dimensions des grandeurs dérivées. Pour cela, il est souhaitable de suivre les étapes suivantes :

- Connaitre une loi qui donne l'expression de grandeur physique;
- Écrire l'équation aux dimensions;
- Utiliser les propriétés des dimensions;
- Refaire ces trois étapes jusqu'à ce qu'il ne subsiste que les dimensions des grandeurs fondamentales.

OUTILS MATHÉMATIQUES

Exemples :

La grandeur	L'équation aux dimensions	La dimension
Vitesse	$[v] = \left[\frac{d}{t}\right] = \frac{[d]}{[t]}$	$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$
Accélération	$[a] = \left[\frac{v}{t}\right] = \frac{[v]}{[t]}$	$[v] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$
Force	$[F] = [ma] = [m][a]$	$[F] = MLT^{-2}$

D'une manière générale, la dimension d'une grandeur physique G s'écrit sous la forme suivante : $[G] = M^a L^b T^c$, où a, b et c sont des entiers relatifs,

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Une unité : qui intervient dans le processus de mesure de la grandeur physique:

$$G = (\text{résultat de la mesure})(\text{unité})$$

Exemple : m = 10 kg

Il existe plusieurs systèmes d'unités. Le plus utilisé est la système international (SI) ou MKSA. Dans ce système, les unités des grandeur fondamentales sont :

Masse	Longueur	Temps
Kilogramme (kg)	**Mètre (m)**	**Seconde (s)**

L'unité d'une grandeur dérivée est directement déduite de sa dimension. En effet, il suffit de replacer la dimension de chaque grandeur fondamentale par son unité correspondante.

OUTILS MATHÉMATIQUES

Exemples :

Grandeur	Dimension	Unité (SI)
Vitesse	$[v] = LT^{-1}$	$m.s^{-1}$
Accélération	$[a] = LT^{-2}$	$m.s^{-2}$
Force	$[F] = MLT^{-2}$	$kg.m.s^{-2}$

D'une manière générale, l'unité d'une grandeur physique G est :

$$kg^a m^b s^c$$

Les exposants a, b et c sont des nombre relatifs.

Les unités de certaines grandeurs physiques ont reçu un nom.

Exemple : Le Newton (N) pour la force $1\,N = 1\,kg.m.s^{-2}$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Applications de l'analyse dimensionnelle : en plus de la détermination des dimensions et unités des grandeurs dérivées, l'analyse dimensionnelle permet de:

- déterminer les dimensions et unités des constante physiques :

Une constante physique est un grandeur qui possédé une valeur numérique fixe.

Exemple : la constante de Planck (h)

L'énergie d'un photon de lumière est proportionnelle à la fréquence. Elle est donnée par la relation de Planck : $E = h\nu$

$$[E] = [h\nu] = [h][\nu] \Longrightarrow [h] = \frac{[E]}{[\nu]} = \frac{ML^2T^{-2}}{T^{-1}} = ML^2T^{-1}$$

L'unité de h dans le SI est : $kg.m^2.s^{-1}$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Élaboration des lois physiques empiriques : c'est-à-dire en utilisant l'expérience et l'analyse dimensionnelle.

Exemple : Période d'un pendule simple

L'expérience a montré que la période T d'un pendule simple dépend de sa longueur l et de l'accélération de la pesanteur g à une constante près α :

$$T = \alpha l^a g^b \Longrightarrow [T] = [\alpha][l]^a[g]^b \Longrightarrow T^{-1} = L^{a+b}T^{-2b}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2b=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow T = \alpha l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} = \alpha\sqrt{\frac{l}{g}}\,(\alpha = 2\pi)$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Calcul vectoriel :

Du point de vue de la représentation mathématique, les grandeurs physiques se divisent en deux catégories :

- Les grandeurs scalaires : qui sont représentées par des nombres réels.

Exemples : la masse, le temps, l'énergie, le travail, la puissance…etc.

- Les grandeurs vectorielles : qui sont représentées par une nombre réel, une direction et un sens.

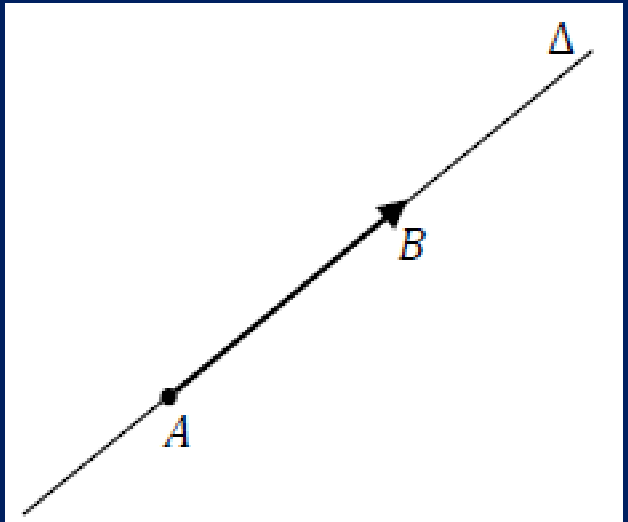
Exemples : la position, la vitesse, l'accélération, la force…etc.

OUTILS MATHÉMATIQUES

❖ Définitions :

Un vecteur est un segment de droite AB possédant les caractéristiques suivantes:

- Une origine (point d'application) : le point A
- Une extrémité : le point B
- Une direction (support) : la droite (Δ)
- Un sens : la flèche
- Un module (norme, intensité) : la longueur AB



Notation : $\vec{U}, \vec{V}, \overrightarrow{AB}$

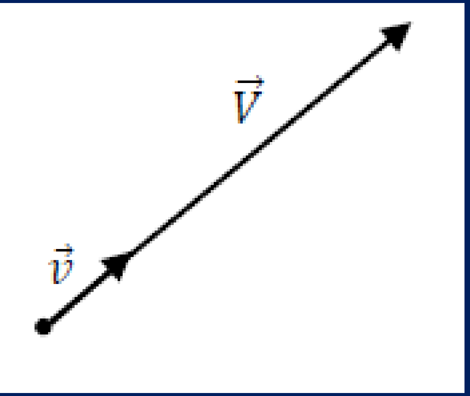
Module : $\|\vec{V}\| \geq 0$

OUTILS MATHÉMATIQUES

Un vecteur $\vec{u}$ est dit unitaire si : $\|\vec{u}\| = 1$

Le vecteur unitaire $\vec{v}$ porté par le vecteur non unitaire $\vec{V}$ est défini par :

$$\vec{v} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$



OUTILS MATHÉMATIQUES

❖ Somme vectorielle

La somme de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est le vecteur :

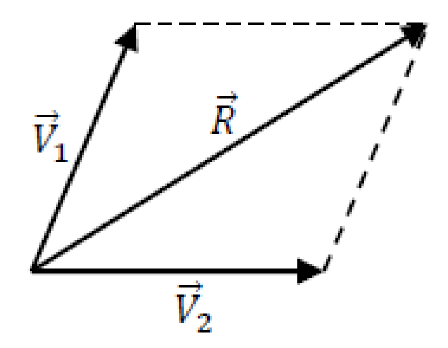
$$\vec{S} = \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

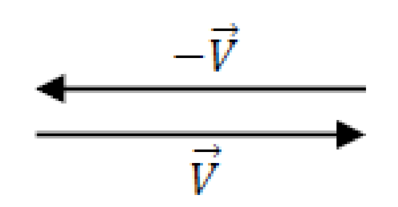
Géométriquement, on obtient cette somme en utilisant la règle du parallélogramme ou du triangle.

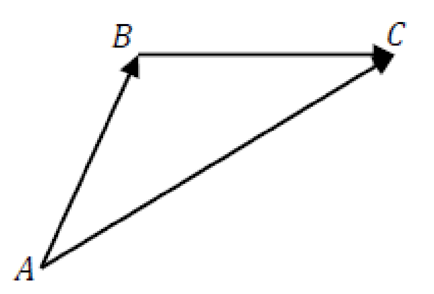
Vecteur nul : $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$

Vecteur opposé : même module et direction mais de Sens opposé : $\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$

Règle de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$







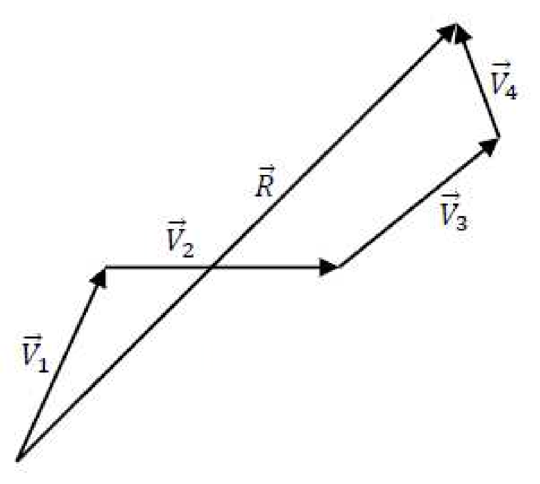
OUTILS MATHÉMATIQUES

Somme de plusieurs vecteurs :

- Sommer les vecteurs deux à deux :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 = \vec{V}_1 + \left(\vec{V}_2 + (\vec{V}_3 + \vec{V}_4)\right) = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_5) = \vec{V}_1 + \vec{V}_6$$

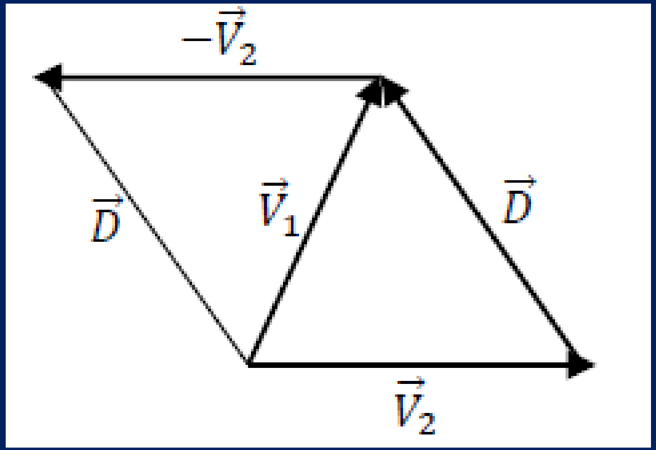
- Joindre l'extrémité de chaque vecteur par l'origine du vecteur suivant et ensuite, on joint l'origine du premier vecteur avec l'extrémité du dernier.



OUTILS MATHÉMATIQUES

- Différence vectorielle :

$$\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$$

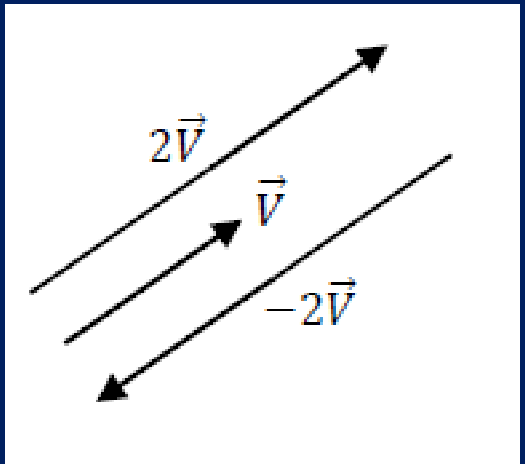


OUTILS MATHÉMATIQUES

❖ Multiplication d'un vecteur par un scalaire :

Soit $\vec{V}$ un vecteur et λ un nombre réel. Le produit $(\lambda\vec{V})$ est un vecteur de même origine, même direction que $\vec{V}$, mais :

- de module égal à $|\lambda|\,\|\vec{V}\|$.
- de même sens que $\vec{V}$ si $\lambda>0$ et de sens opposé si $\lambda<0$.



Lorsqu'on multiplie un vecteur par un scalaire, on obtient

Un vecteur qui est parallèle à $\vec{V}$.

OUTILS MATHÉMATIQUES

❖ Composantes d'un vecteur :

➢ Un repère d'espace $\mathcal{R}(OXYZ)$ est formé d'une origine O et des trois axes orthogonaux : $(OX) \perp (OY) \perp (OZ)$

➢ On attaché à ce repère une base orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$$\vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k} \; ; \; \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

➢ Le repère d'espace $\mathcal{R}(OXYZ)$ associé à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est appelé système de coordonnées cartésiennes.

✓ Système cartésien unidimensionnel : $(OX, \vec{\imath})$; $(OY, \vec{\jmath})$; $(OZ, \vec{k})$

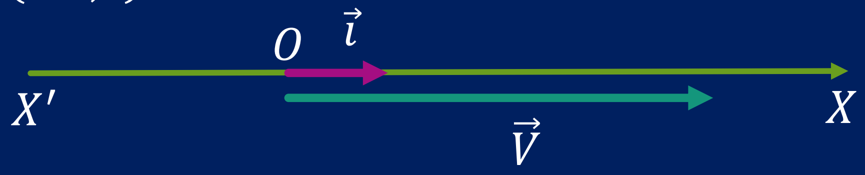
✓ Système cartésien bidimensionnel : $(OXY, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; $(OXZ, \vec{\imath}, \vec{k})$; $(OYZ, \vec{\jmath}, \vec{k})$

✓ Système cartésien tridimensionnel : $(OXYZ, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

OUTILS MATHÉMATIQUES

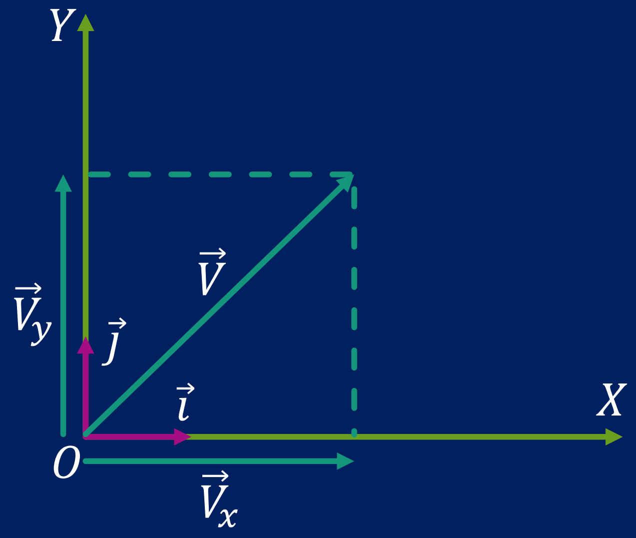
- ✓ Système cartésien unidimensionnel : $(OX, \vec{\imath})$

$$\vec{V} = V\vec{\imath} = V_x\vec{\imath}$$



- ✓ Système cartésien bidimensionnel : $(OXY, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; $(OXZ, \vec{\imath}, \vec{k})$; $(OYZ, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath}$$



OUTILS MATHÉMATIQUES

- ✓ Système cartésien tridimensionnel : $(OXYZ, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V_z} = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$

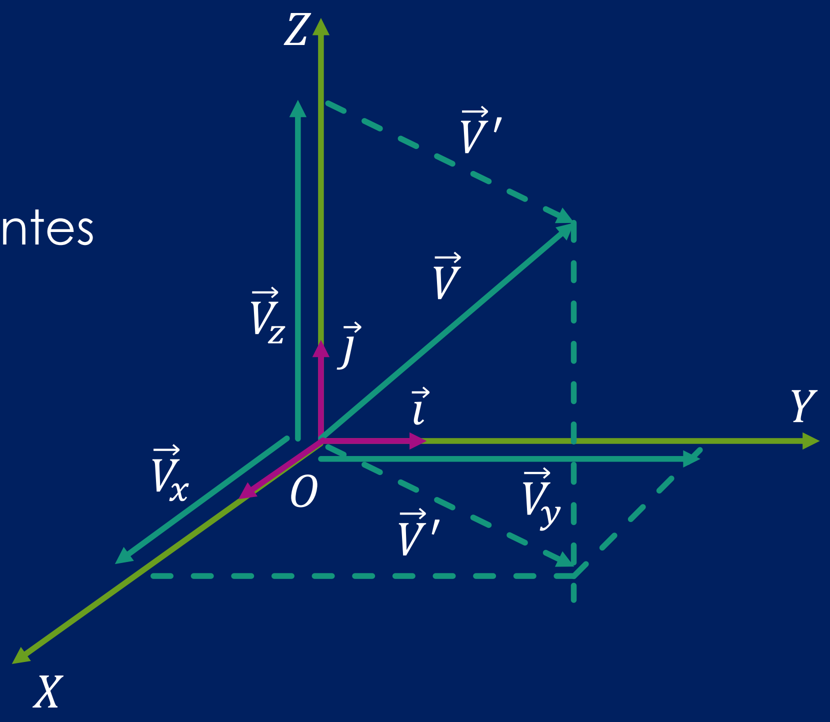
- ✓ Les nombres réels V_x, V_y et V_z sont appelés

composantes cartésiennes du vecteur $\vec{V}$ suivantes les axes $(OX), (OY)$ et (OZ), respectivement.

Notation :

$$\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$$

$$\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$



OUTILS MATHÉMATIQUES

Expressions analytiques des différentes opérations sur les vecteurs :

$$\vec{V}(V_x, V_y, V_z) \ ; \vec{U}(U_x, U_y, U_z)$$

$$\vec{V} \mp \vec{U} = (V_x + U_x, V_y + U_y, V_z + U_z)$$

$$\alpha\vec{V} = (\alpha V_x, \alpha V_y, \alpha V_z)$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Produit scalaire :

Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un scalaire définit comme suit :

- Forme géométrique :

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\cos\theta \quad ; \quad \theta = (\vec{U},\vec{V})$$

- Propriétés : $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$; $\vec{U}.\vec{V} = 0 \Longrightarrow \cos\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{U} \perp \vec{V}$

- Forme analytique :

$$\vec{V}(V_x, V_y, V_z) \;\; ; \vec{U}(U_x, U_y, U_z)$$

$$\vec{V}.\vec{U} = V_xU_x + V_yU_y + V_zU_z$$

- Module d'un vecteur : $\vec{U}.\vec{U} = \|\vec{U}\|^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 \Rightarrow \|\vec{U}\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$

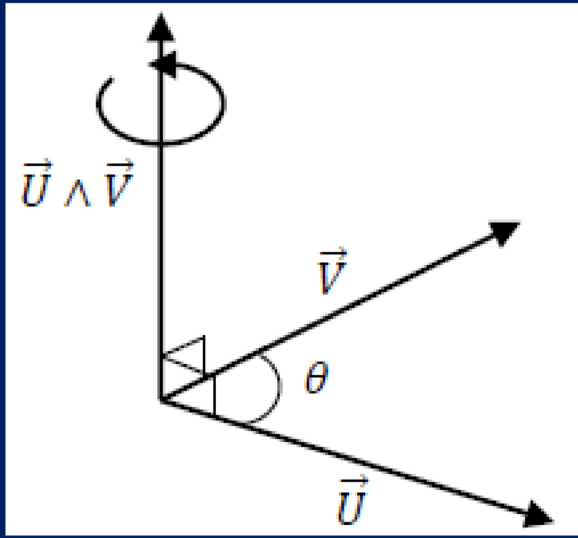
OUTILS MATHÉMATIQUES

❖ Produit vectoriel :

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un vecteur noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$:

- de module $\|\vec{U}\|\|\vec{V}\| \sin\theta$ où $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$;
- de direction perpendiculaire au plan défini par $\vec{U}$ et $\vec{V}$;
- de sens tel que le trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$ soit direct,

c'est-à-dire, qu'il satisfait la règle du tire-bouchon de Maxwell : si on ramène le vecteur $\vec{U}$ sur le vecteur $\vec{V}$, le sens du vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est celui d'un tire-bouchon vissé dans le même sens.



OUTILS MATHÉMATIQUES

- Propriétés : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$; $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{U} = \vec{0} \vee \vec{V} = \vec{0} \vee \sin\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 0, \pi \ (\vec{U} \parallel \vec{V})$
- $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$; $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$; $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$; $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$
- Expression analytique :

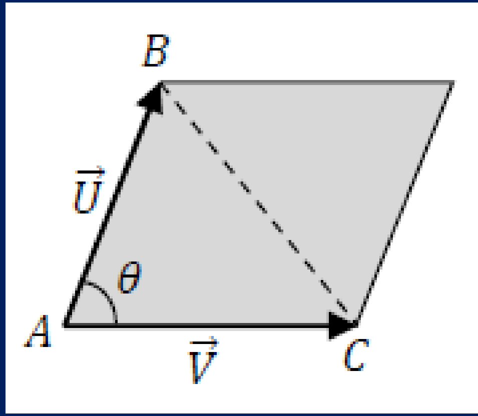
$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_y & U_z \\ V_y & V_z \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} U_x & U_z \\ V_x & V_z \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (U_y V_z - U_z V_y)\vec{\imath} - (U_x V_z - U_z V_x)\vec{\jmath} + (U_x V_y - U_y V_x)\vec{k}$$

Interprétation géométrique : le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ représente l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Interprétation géométrique : le produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ représente l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.



$$S = \|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\||\sin\theta|$$

- À partir des produits scalaire et vectoriel, on définit :

✓ Le produit mixe (scalaire) : $\vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W})$

✓ Le double produit vectoriel (vecteur) : $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W})$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Exemple :

$$\vec{U} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}\ ;\ \vec{V} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}\ ; \vec{W} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 5\vec{k}$$

$$2\vec{U} - 3\vec{V} + \vec{W} = 2\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-9\\12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-16\\13\end{pmatrix}$$

$$\vec{U}.\vec{V} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix} = -2 - 6 - 12 = -20$$

$$\vec{U} \wedge \vec{W} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 4 & -3 & -5\end{vmatrix} = (10+9)\vec{\imath} + (-5-12)\vec{\jmath} + (-3+8)\vec{k} = 19\vec{k} - 17\vec{\jmath} + 5\vec{k}$$

$$\vec{V}.(\vec{U} \wedge \vec{W}) = \begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}19\\-17\\5\end{pmatrix} = -38 - 51 - 20 = -109$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Les grandeur physiques scalaires ou vectorielles peuvent être constantes ou variables. En d'autres termes, elles peuvent dépendre des autres variables. On parle alors de champ. Les variables utilisées en physique sont de deux types :
- ✓ Variables d'espace : comme les coordonnées cartésiennes (x, y, z) ;
- ✓ Variable du temps : t
- On distingue 04 types de champs :
- ✓ Champ scalaire à une seule variable : $G(x)$: $G(t)$
- ✓ Champ scalaire à plusieurs variables : $G(x, y, z, t)$
- ✓ Champ vectoriel à une seule variable : $\vec{G}(t)$; $\vec{G}(x)$
- ✓ Champ vectoriel à plusieurs variables : $\vec{G}(x, y, z, t)$

OUTILS MATHÉMATIQUES

✓ Champ scalaire à une seule variable (Dérivation) : $G(x)$: $G(t)$

$$G'(x) = \frac{dG}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x}$$

$$(G_1 \pm G_2)' = G_1' \pm G_2'$$
$$(\alpha G)' = \alpha G'$$
$$(G_1 G_2)' = G_1' G_2 + G_1 G_2'$$
$$\left(\frac{G_1}{G_2}\right)' = \frac{G_1' G_2 - G_1 G_2'}{G_2^2}$$
$$\left[G_1\big(G_2(x)\big)\right]' = \frac{dG_1}{dG_2}\frac{dG_2}{dx}$$

$$G''(x) = \frac{d^2G}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dG}{dx}\right)$$

$$(\alpha)' = 0 \ ; \ (x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ ; \ (e^x)' = e^x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(G^n)' = nG'G^{n-1}$$
$$(\ln G)' = \frac{G'}{G^2} \ ; \ (e^G)' = G'e^G$$
$$(\cos G)' = -G' \sin G$$
$$(\sin G)' = G' \cos G$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Exemples :

$$G(t) = -\frac{1}{5}t^3 + \frac{7}{5}t^2 + 2t - 2021 \Longrightarrow G'(t) = -\frac{3}{5}t^2 + \frac{14}{5}t + 2 \Longrightarrow G''(t) = -\frac{6}{5}t + \frac{14}{5}$$

$$G(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \Longrightarrow G'(t) = -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)$$

$$\Longrightarrow G''(t) = -a\omega^2\cos(\omega t) - b\omega^2\sin(\omega t)$$

$$G'(t) = ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t} \Longrightarrow G'(t) = a\alpha e^{\alpha t} - b\alpha e^{-\alpha t} \Longrightarrow G''(t) = a\alpha^2 e^{\alpha t} + b\alpha^2 e^{-\alpha t}$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Intégration :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

$$\int (f \pm g)dx = \int f dx \pm \int g dx \ ; \int \alpha f dx = \alpha \int f dx$$

$$\int dx = x \ ; \int df = f \ ; \int f' dx = f$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x \ ; \int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \ ; \int \cos x \, dx = \sin x$$

C est une constante d'intégration. L'intégrale qu'on vient est dit intégrale indéfinie la fonction F est dite primitive. La quantité :

$$\int_a^b f dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$$

Est dite intégrale définie et les nombres a et b sont dits bornes d'intégration. Géométriquement, l'intégrale définie représente une surface.

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Méthode directe : utilisation des propriétés des intégrales avec des fonctions élémentaires.

Exemple :

$$\int \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + 7\right)dx = \frac{1}{4}\int x^3 dx - \frac{5}{2}\int x^2 dx - 2\int x dx + 7\int dx$$

$$= \frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{6}x^3 - x^2 + 7x + C$$

- Méthode de changement de variables : pour se ramener à la méthode directe.

Exemple :

$$\int \frac{dx}{x+1} \;;\; u = x + 1 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx \Longrightarrow \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x+1) + C$$

$$\int e^{\alpha x} dx \;; u = \alpha x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \alpha \Longrightarrow dx = \frac{1}{\alpha} du \Longrightarrow \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}\int e^u du = \frac{1}{\alpha}e^u = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

$$\int \cos(\omega t)dt\ ; u = \omega t \Longrightarrow \frac{du}{dt} = \omega \Longrightarrow dt = \frac{1}{\omega}dt$$

$$\Longrightarrow \int \cos(\omega t)dt = \frac{1}{\omega}\int \cos u\, du = \frac{1}{\omega}\sin u = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + C$$

$$\int \sin(\omega t)dt\ ; u = \omega t \Longrightarrow \frac{du}{dt} = \omega \Longrightarrow dt = \frac{1}{\omega}dt$$

$$\Longrightarrow \int \sin(\omega t)dt = \frac{1}{\omega}\int \sin u\, du = -\frac{1}{\omega}\cos u = \frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + C$$

$$\int_0^1 (3t^2 + 2t - 5)dt = [t^3 - t^2 - 5t]_0^1 = -5$$

$$\int_0^{\pi/2\omega} \cos(\omega t)dt = \frac{1}{\omega}[\sin(\omega t)]_0^{\pi/2\omega} = \frac{1}{\omega}$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- ✓ Champ scalaire à plusieurs variables : $G(x, y, z)$
- Dérivées partielles :

$$Dérivée\ partielle\ par\ rapport\ à\ x : \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{(y,z)}$$

$$Dérivée\ partielle\ par\ rapport\ à\ y : \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{(x,z)}$$

$$Dérivée\ partielle\ par\ rapport\ à\ z : \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{(x,y)}$$

- Différentielle totale :

$$df = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right) dz$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- ✓ Exemple :

$$G(x,y,z) = x + 5y - 2z + 3xy - 4xz + 6yz - 7xyz$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 1 + 3y - 4z - 7yz$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 5 + 3x + 6z - 7xz$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = -2 - 4x + 6 - 7xy$$

$$dG = (1 + 3y - 4z - 7yz)dx + (5 + 3x + 6z - 7xz\,)dy + (-2 - 4x + 6 - 7xy)dz$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

✓ Champ vectoriel à une seule variable : $\vec{G}(t)$; $\vec{G}(x)$

$$\vec{G}(t) = G_x(t)\vec{\imath} + G_y(t)\vec{\jmath} + G_z(t)\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{dG_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dG_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dG_z}{dt}\vec{k} \; ; \; \frac{d^2\vec{G}}{dt^2} = \frac{d^2G_x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2G_x}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2G_x}{dt^2}\vec{\jmath}$$

$$\int \vec{G}(t)dt = \left(\int G_x(t)dt\right)\vec{\imath} + \left(\int G_y(t)dt\right)\vec{\jmath} + \left(\int G_z(t)dt\right)\vec{k} + \vec{C} = \vec{H}(t) + \vec{C}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{G}(t)dt = \left[\vec{H}(t)\right]_{t_1}^{t_2} = \vec{H}(t_2) - \vec{H}(t_1)$$

Le vecteur $\vec{C}$ est dite constante d'intégration, dont la valeur est déterminée en tenant compte des conditions aux limites $\vec{H}(x = x_0)$ ou initiales $\vec{H}(t = t_0)$.

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Exemples :

$$\vec{G}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t - 11\right)\vec{\imath} + (3\cos(\omega t) - e^{\alpha t})\vec{\jmath} + (2\sin(\omega t) + e^{-\alpha t})\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = (t^2 - t + 4)\vec{\imath} + (-3\omega\sin(\omega t) - \alpha e^{\alpha t})\vec{\jmath} + (2\omega\cos(\omega t) - \alpha e^{-\alpha t})\vec{k}$$

$$\frac{d^2\vec{G}}{dt^2} = (2t - 1)\vec{\imath} + (-3\omega^2\cos(\omega t) - \alpha^2 e^{\alpha t})\vec{\jmath} + (-2\omega^2\sin(\omega t) + \alpha^2 e^{-\alpha t})\vec{k}$$

$$\left\|\frac{d\vec{G}}{dt}\right\| = \sqrt{(2t-1)^2 + (-3\omega^2\cos(\omega t) - \alpha^2 e^{\alpha t})^2 + (-2\omega^2\sin(\omega t) + \alpha^2 e^{-\alpha t})^2}$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- ✓ Exemples :

$$\vec{G}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t - 11\right)\vec{\imath} + (3t^2 - 2t + 5)\vec{\jmath} + (2 - 3t)\vec{k}$$

$$\vec{H}(t) = \int \vec{G}(t)dt = \left(\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + 2t^2 - 11t\right)\vec{\imath} + (t^3 - t^2 + 5t)\vec{\jmath} + \left(2t - \frac{3}{2}t^2\right)\vec{k} + \vec{C}$$

$$\text{Condition initiale : } \vec{H}(t=0) = \vec{0} \Longrightarrow \vec{C} = \vec{0}$$

$$\int_0^1 \vec{G}(t)dt = [\vec{H}(t)]_0^1 = \vec{H}(1) - \vec{H}(0) = \left(-\frac{109}{12}\right)\vec{\imath} + (5)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{2}\right)\vec{k}$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Champ vectoriel à plusieurs variables : $\vec{G}(x, y, z)$

$$\vec{G}(x, y, z) = G_x(x, y, z)\vec{\imath} + G_y(x, y, z)\vec{\jmath} + G_z(x, y, z)\vec{k}$$

A partir de Opérateur vectoriel et différentiel nabla $\vec{\nabla}$, on définit 03 autres opérateurs vectoriels:

Opérateur			
Le gradient	**Champ scalaire**	**Champ vectoriel**	$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}G} = \vec{\nabla}G$
La divergence	**Champ vectoriel**	**Champ scalaire**	$\boldsymbol{div}\vec{G} = \vec{\nabla}.\vec{G}$
Le rotationnel	**Champ vectoriel**	**Champ vectoriel**	$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}G} = \vec{\nabla} \wedge \vec{G}$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- ✓ Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}G = \vec{\nabla}G = \frac{\partial G}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial G}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial G}{\partial z}\vec{k}$$

$$divG = \vec{\nabla}.\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{G} = \vec{\nabla} \wedge \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial G_z}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- ✓ Exemples :

$$G(x,y,z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

$$\overrightarrow{grad}G = (2xyz + y^2z + yz^2)\vec{\imath} + (x^2z + 2xyz + xz^2)\vec{\jmath} + (x^2y + xy^2 + 2xyz)\vec{k}$$

$$\vec{G}(x,y,z) = G_x(x,y,z)\vec{\imath} + G_y(x,y,z)\vec{\jmath} + G_z(x,y,z)\vec{k} = (x^2yz)\vec{\imath} + (xy^2z)\vec{\jmath} + (xyz^2)\vec{k}$$

$$div\vec{G} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (x^2yz) & (xy^2z) & (xyz^2) \end{vmatrix}$$

$$= (xz^2 - xy^2)\vec{\imath} - (yz^2 - x^2y)\vec{\jmath} + (y^2z - x^2z)\vec{k}$$