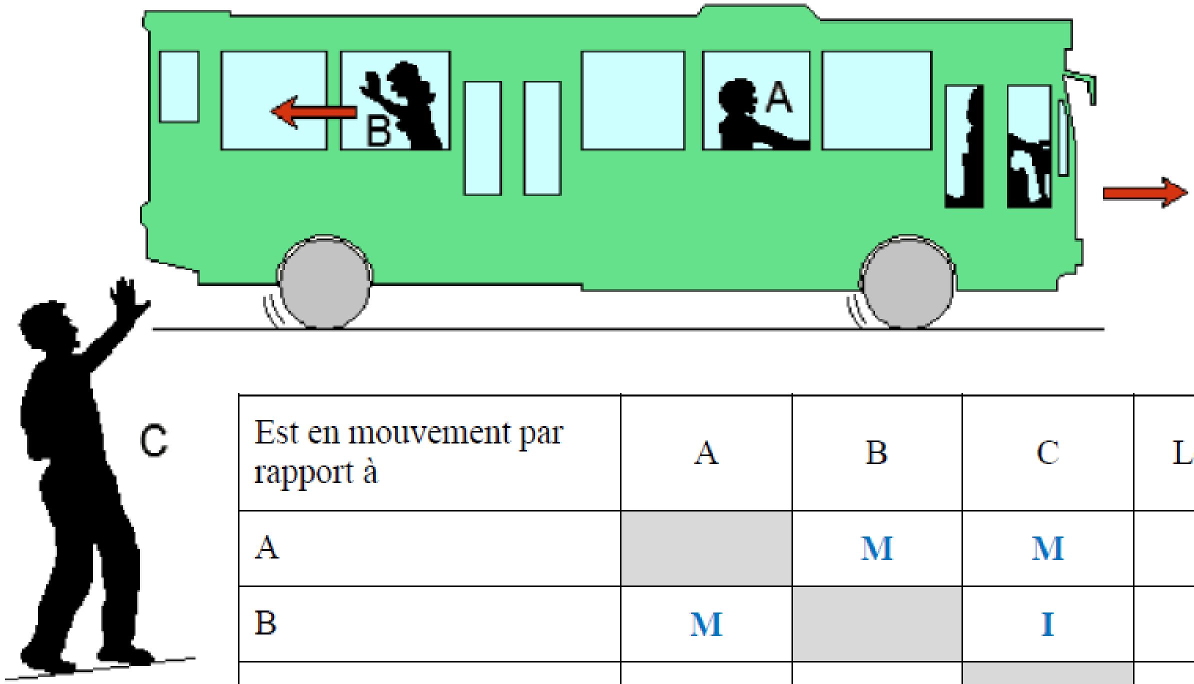
Ce cours a été préparé et rédigé par Mr. KESSI Ferhat

CHAPITRE 2

Cinématique du point matériel

NÉCESSITÉ D'UN RÉFÉRENTIEL



Est en mouvement par rapport à	A	B	C	Le bus	La route
A		M	M	I	M
B	M		I	M	I
C	M	I		M	I
Le bus	I	M	M		M
La route	M	I	I	M	

M : mobile
I : immobile

NÉCESSITÉ D'UN RÉFÉRENTIEL

- Les éléments du mouvement :

- **L'observateur** : est la personne qui étudie le mouvement d'un corps
- **Le mobile** : est le corps matériel en mouvement, considéré comme un point matériel
- **Le référentiel** : l'expérience montre que le mouvement est relatif. En effet, un corps matériel peut être en mouvement par rapport un solide et au repos par rapport à un autre solide. Avant d'étudier le mouvement du corps, l'observateur doit choisir un solide de référence dans lequel il est fixe.

Exemples de référentiels : le sol ou toutes partis du sol, un objet qui se déplace par rapport au sol (bus, avion…etc.)

NÉCESSITÉ D'UN RÉFÉRENTIEL

Pour caractériser le mouvement du corps, l'observateur a ensuite besoin de se repérer dans l'espace qui l'environne. Il lui faut, pour déterminer la nature du mouvement, connaître la position du corps au cours du temps. Pour ce faire ; il choisit :

- **Un repère d'espace :** défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel (où doit se trouver l'observateur) et des axes de référence (XYZ) qui permettent à l'observateur de juger dans quelle direction se déplace l'objet. Ces trois axes correspondent aux trois dimensions de l'espace et sont perpendiculaires deux-à-deux.
- **Un repère de temps :** c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps, pour repérer les différentes positions du corps en mouvement.

On note un référentiel par : $\mathcal{R}(OXYZ)$

LES GRANDEURS CINÉMATIQUES

❖ Le vecteur position :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

❖ Le vecteur déplacement moyen :

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

❖ Le vecteur déplacement instantané :

$$d\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

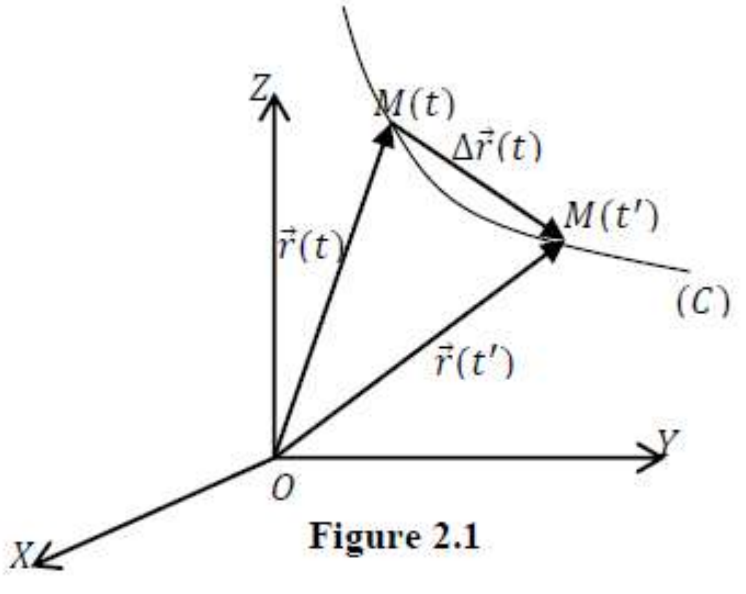


Figure 2.1

❖ La trajectoire : est l'ensemble de toutes les positions successivement occupées par un corps lors de son déplacement (le courbe (C)).

LES GRANDEURS CINÉMATIQUES

❖ Le vecteur vitesse : la vitesse est une grandeur vectorielle qui, à chaque instant, caractérise les variations du vecteur position d'un corps.

❖ Vitesse moyenne :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t}$$

❖ Vitesse instantanée : $\Delta t = t' - t$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

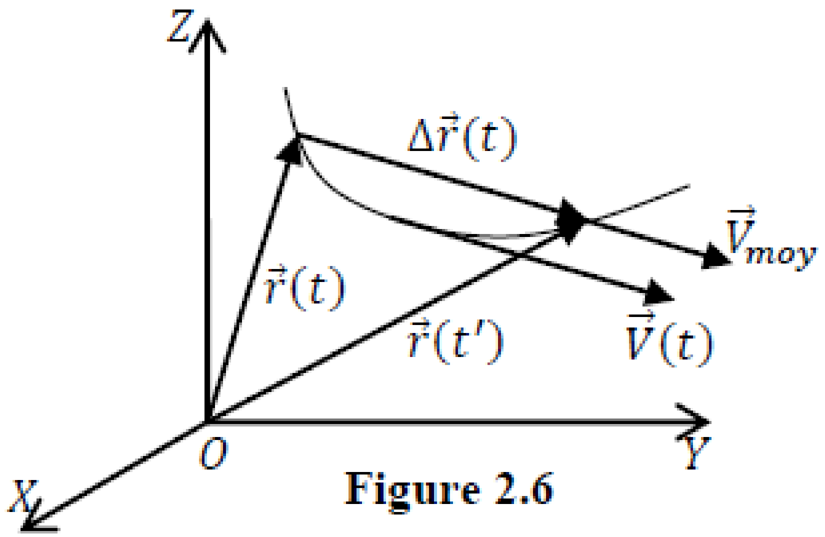


Figure 2.6

LES GRANDEURS CINÉMATIQUES

Le vecteur vitesse instantanée est donc la dérivée première, par rapport au temps, du vecteur position. Ce vecteur est tangent à la trajectoire et il est orienté dans le sens du mouvement. L'unité de la vitesse est le mètre par seconde (m/s) dans le SI.

Une augmentation de vitesse (accélération) ainsi qu'une diminution de vitesse (décélération) sont appelées accélération positive ou négative respectivement.

LES GRANDEURS CINÉMATIQUES

❖ Le vecteur accélération : il décrit les variations du vecteur vitesse d'un corps par rapport au temps.

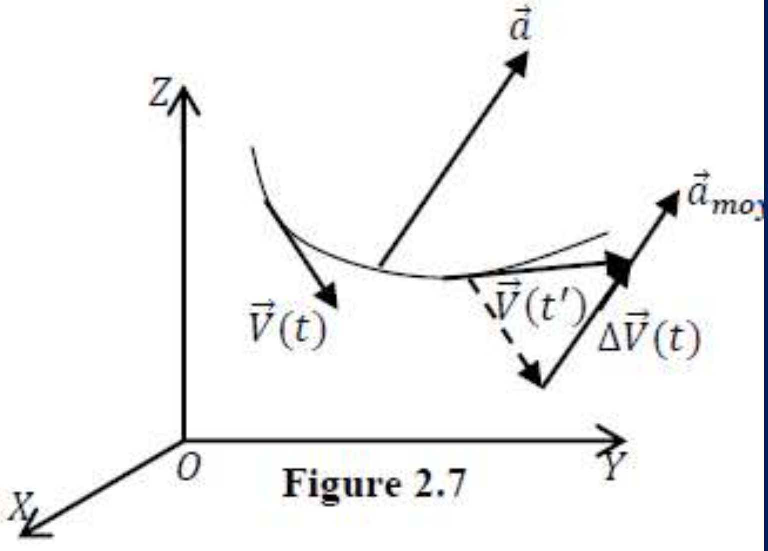


Figure 2.7

❖ Accélération moyenne :

$$\vec{a}_{moy}(\vec{\gamma}_{moy}) = \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

❖ Accélération instantanée :

$$\vec{a}(t) = \vec{\gamma}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

LES GRANDEURS CINÉMATIQUES

Le vecteur accélération est donc la dérivée première du vecteur vitesse ou seconde du vecteur position par rapport au temps. Il est toujours orienté vers le côté concave de la trajectoire. L'unité de l'accélération est le mètre par seconde au carré (m/s^2) dans le SI.

- Nature du mouvement : $\vec{a}.\vec{v}$

Mouvement accéléré : $\vec{a}.\vec{v} > 0$

Mouvement décéléré : $\vec{a}.\vec{v} < 0$

LES GRANDEURS CINÉMATIQUES

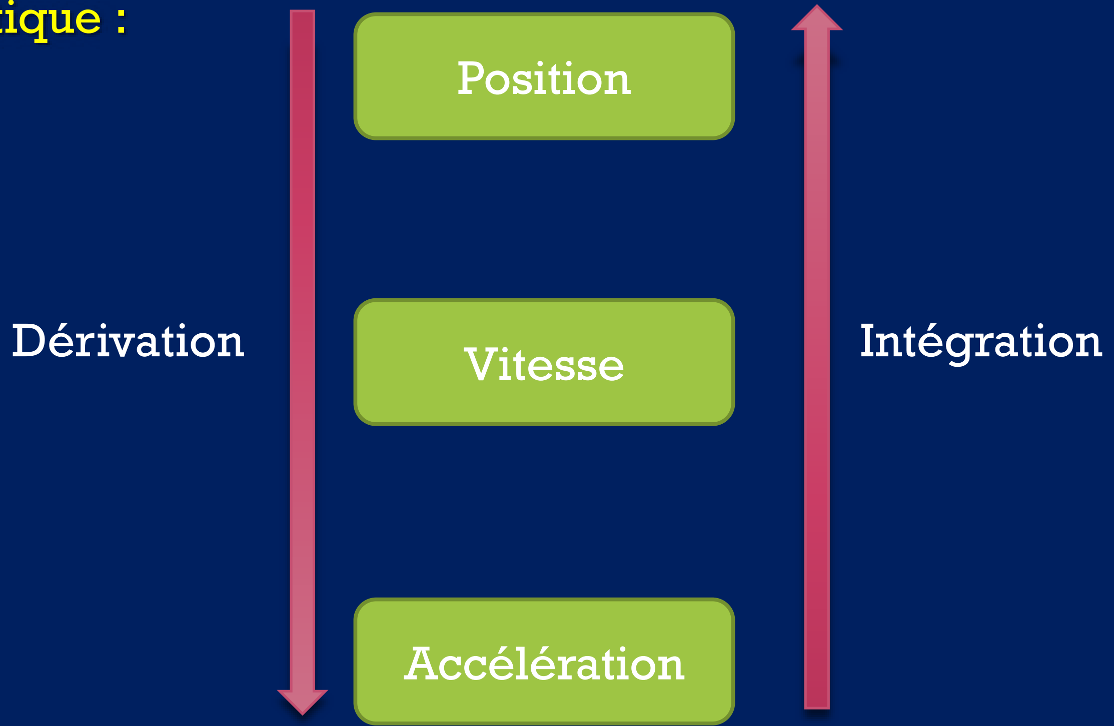
❖ Relations entre les grandeurs cinématique :

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C}_1$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \vec{C}_2$$

❖ Conditions initiales :

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{r}(t = t_0) \\ \vec{v}_0 = \vec{v}(t = t_0) \end{cases}$$



LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

On associe au repère d'espace $\mathcal{R}(OXYZ)$ un système de coordonnées :

❖ Une base orthonormée : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \\ \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1 \end{cases}$

❖ Des coordonnées $(x_1, x_2, x_3)(t)$ pour repérer la position du point matériel M (ses coordonnées)

Il existe deux types de base :

❖ Base globale ou fixe : elle ne dépend pas du mouvement de M $\quad \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \frac{d\vec{e}_2}{dt} = \frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{0}$

❖ Base locale ou mobile : elle se déplace avec M lors de son mouvement $\quad \left(\frac{d\vec{e}_1}{dt}, \frac{d\vec{e}_2}{dt}, \frac{d\vec{e}_3}{dt}\right) \neq \vec{0}$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

❑Système de coordonnées cartésiennes :

❖Base fixe : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

❖Équation horaires : $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

❖Vecteur position : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$

❖Dimension : 1 (x), 2 (x, y) ou 3 (x, y, z)

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

❖ Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath} + v_z(t)\vec{k}$$

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \\ v_z(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t) \end{cases}$$

Notation de Newton

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

- Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = \dot{v}_x(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = \dot{v}_y(t) = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t) \end{cases}$$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

❑Système de coordonnées intrinsèques (curvilignes) :

Il faut connaitre la trajectoire (C) d'origine M_0.

Position : abscisse curviligne $S(t) = (M_0M)$

Base locale : $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$

Vecteur unitaire tangent : $\vec{u}_t$

Vecteur unitaire normale : $\vec{u}_n$

Vecteur vitesse : $v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$ $\quad \vec{v}(t) = v(t)\,\vec{u}_t$

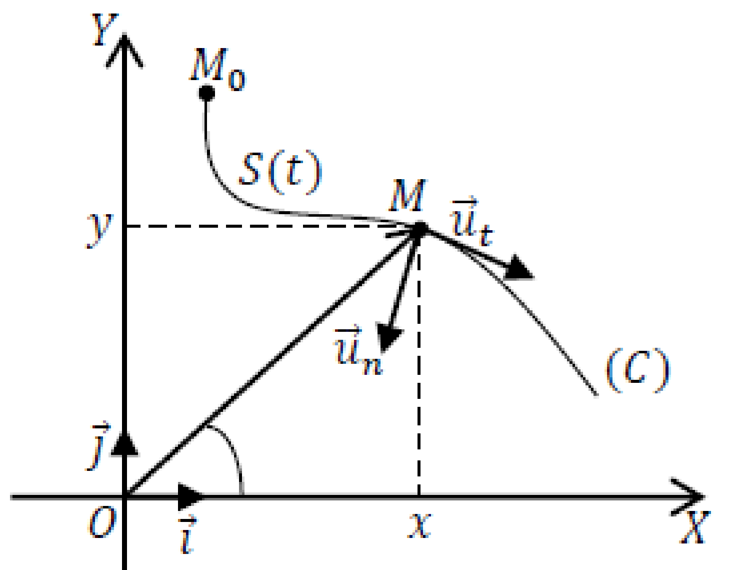


Figure 2.5-a

Système à 2 dimensions

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2(t)}{R_c}\vec{u}_n = a_t(t)\vec{u}_t + a_n(t)\vec{u}_n$$

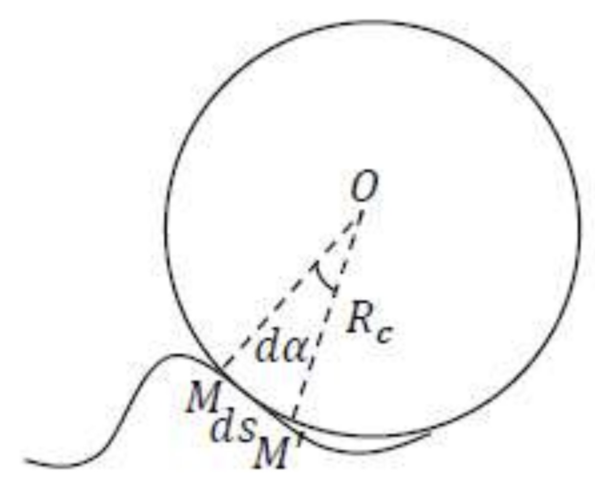
$$\begin{cases} a_t(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} \\ a_n(t) = \dfrac{v^2(t)}{R_c} \end{cases}$$

Accélération tangentielle

Accélération normale

$$a^2(t) = a_t^2(t) + a_n^2(t) \Rightarrow a_n(t) = \sqrt{a^2(t) - a_t^2(t)}$$

$v(t)$: module de la vitesse



$R_c\ (t)$: rayon de courbure , rayon du cercle tangent à La trajectoire au point M

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

❑Système de coordonnées polaires :

Équations horaires :
$$\rho^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$
$$\theta(t) = (OX, \rho(t)).$$

Relations avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = \rho(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$
$$\tan\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \Rightarrow \theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)[\pi]$$

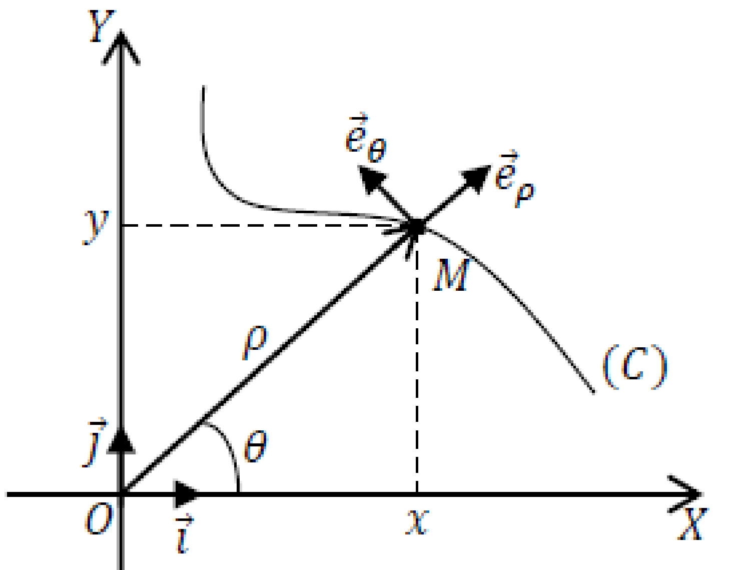


Figure 2.2-a

Système à 2 dimensions

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Base locale : $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$

Relations de passages entre la base cartésienne et polaire :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_\theta \end{cases}$$

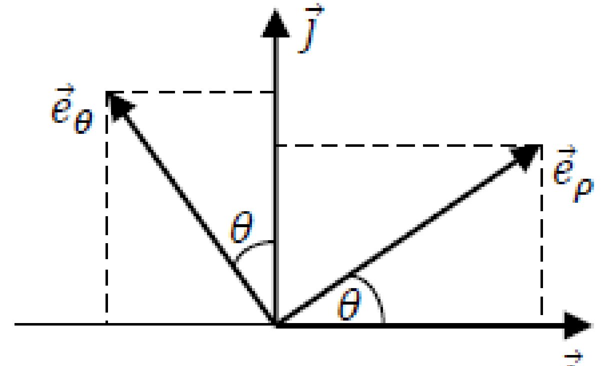


Figure 2.2-b

Dérivées par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_\rho$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho \quad \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

❖Vecteur position : $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho$

Vitesse radiale

Vitesse orthoradiale

❖Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{e}_\rho + \rho(t)\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta = v_\rho(t)\vec{e}_\rho + v_\theta(t)\vec{e}_\theta$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2(t) + \rho^2(t)\dot{\theta}^2(t)}$$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

❖Vecteur accélération :

accélération radiale

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)\right)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)\right)\vec{e}_\theta = a_\rho(t)\vec{e}_\rho + a_\theta(t)\vec{e}_\theta$$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_\rho^2(t) + a_\theta^2(t)}$$

accélération orthoradiale

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

❖ Système de coordonnées cylindriques :

C'est une généralisation du système de coordonnées polaires à 03 dimensions.

Système à 3 dimensions

On ajoute la coordonnée azimultal z :

$$\big(\rho(t), \theta(t), z(t)\big) \qquad \left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k}\right)$$

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho + z(t)\vec{k}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} \;\; ; \;\; a_z = \frac{dV_z}{dt}$$

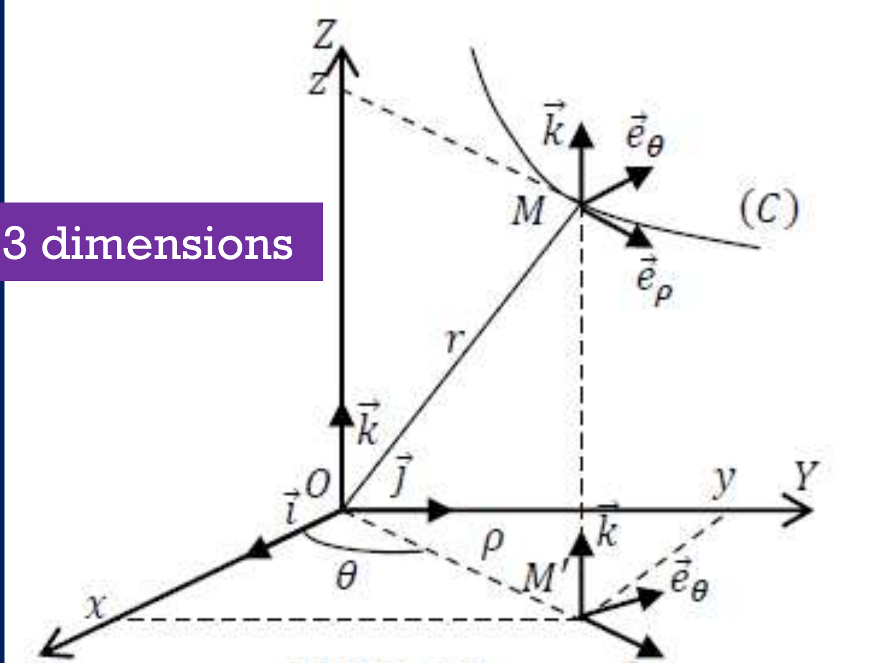


Figure 2.3

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

- ❖ Un mouvement donné peut être étudié dans plusieurs systèmes de coordonnées.
- ❖ Les composantes des grandeurs vectorielles cinématiques changent d'un système à un autre, mais leurs modules (normes) restent constants.
- ❖ Le choix d'un système de coordonnées pour l'étude d'un mouvement donné dépend:
  - ➢ La dimension du mouvement
  - ➢ La symétrie de la trajectoire
  - ➢ La simplicité mathématique

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Exemple 1 : coordonnées cartésiennes

$$x(t) = 2t\ ; y(t) = t^2 - 3t + 4$$

Équation de la trajectoire :

$$x = 2t \Longrightarrow t = \frac{x}{2} \Longrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 4$$

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} = (2t)\vec{\imath} + (t^2 - 3t + 4\ )\vec{\jmath}$$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 2\vec{\imath} + (2t-3)\vec{\jmath} \Longrightarrow \begin{cases} v_x = 2 \\ v_y = 2t-3 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4t^2 - 12t + 13}$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{\jmath} \Longrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 2 \end{cases} ;\, a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2$$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Accélération tangentielle :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{4t - 6}{\sqrt{4t^2 - 12t + 13}}$$

Accélération normale :

$$a_t = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{4}{\sqrt{4t^2 - 12t + 13}}$$

Rayon de courbure :

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{1}{4}(4t^2 - 12t + 13)^{3/2}$$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Exemple 2 : coordonnées polaires

$$x = a\cos^2(\omega t) \ ; y(t) = a\cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

Passage en coordonnées polaires :

$$\rho(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = a\cos(\omega t)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \tan(\omega t) \Longrightarrow \theta(t) = \omega t$$

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho = a\cos(\omega t)\,\vec{e}_\rho$$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Dérivées des vecteurs de la base polaires :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \; ; \; \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta = \omega\vec{e}_\theta \; ; \; \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\rho = -\omega\vec{e}_\theta$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \left[a\cos(\omega t)\,\vec{e}_\rho\right]' = -a\omega\sin(\omega t)\,\vec{e}_\rho + a\omega\cos(\omega t)\,\vec{e}_\theta = a\omega\left[-\sin(\omega t)\,\vec{e}_\rho + \cos(\omega t)\,\vec{e}_\theta\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_\rho = -a\omega\sin(\omega t) \\ v_\theta = a\omega\cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = a\omega$$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2a\omega^2\left[cos(\omega t)\,\vec{e}_\rho + \sin(\omega t)\,\vec{e}_\theta\right] \Longrightarrow \begin{cases} a_\rho = -2a\omega^2\cos(\omega t) \\ a_\theta = -2a\omega^2\sin(\omega t) \end{cases} \Longrightarrow a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = 2a\omega^2$$

Accélérations tangentielle et normale et rayon de courbure :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \;;\; a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = a = 2a\omega^2 \;;\; R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{a}{2}$$

Le rayon de courbure est constant, la trajectoire est cercle.

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Exemple 3 : mouvement à accélération constante

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \int \vec{a}dt + \vec{C}_1 = (t)\vec{i} - (2t)\vec{j} + (3t)\vec{k} + \vec{C}_1$$

Condition initiale : $\vec{v}(t = 0) = \vec{0} = \vec{C}_1$

$$\vec{v} = (t)\vec{i} - (2t)\vec{j} + (3t)\vec{k}$$

LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \int \vec{v}dt + \vec{C}_2 = \left(\frac{1}{2}t^2\right)\vec{\imath} - (t^2)\vec{\jmath} + \left(\frac{3}{2}t^2\right)\vec{k} + \vec{C}_2$$

Condition initiale : $\overrightarrow{OM}(t = 0) = \vec{0} = \vec{C}_2$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2\right)\vec{\imath} - (t^2)\vec{\jmath} + \left(\frac{3}{2}t^2\right)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = -t^2 \\ z(t) = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

MOUVEMENTS PARTICULIERS

❑Le mouvement rectiligne

C'est un mouvement dont la trajectoire est une ligne droite.

Système de coordonnées : cartésiennes $(OX, \vec{\imath})$.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath}$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} = v\vec{\imath} \Longrightarrow v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow \|\vec{v}\| = |v|$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\imath} = a\vec{\imath} \Longrightarrow a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow \|\vec{a}\| = |a|$$

Nature du mouvement :

$$\vec{a}.\vec{v} = av$$

Accéléré si $av > 0$

Décéléré si $av < 0$

MOUVEMENTS PARTICULIERS

❑Le mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement rectiligne uniformément varié est un mouvement rectiligne dont l'accélération est constante.

$$a = cste \Longrightarrow \begin{cases} v = \int a dt + C_1 = at + C_1 \\ x(t) = \int v dt + C_2 = \dfrac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

Nature du mouvement :
Accéléré :$a > 0$
Décéléré :$a < 0$

Les quantités C_1, C_2 et C_3 sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales

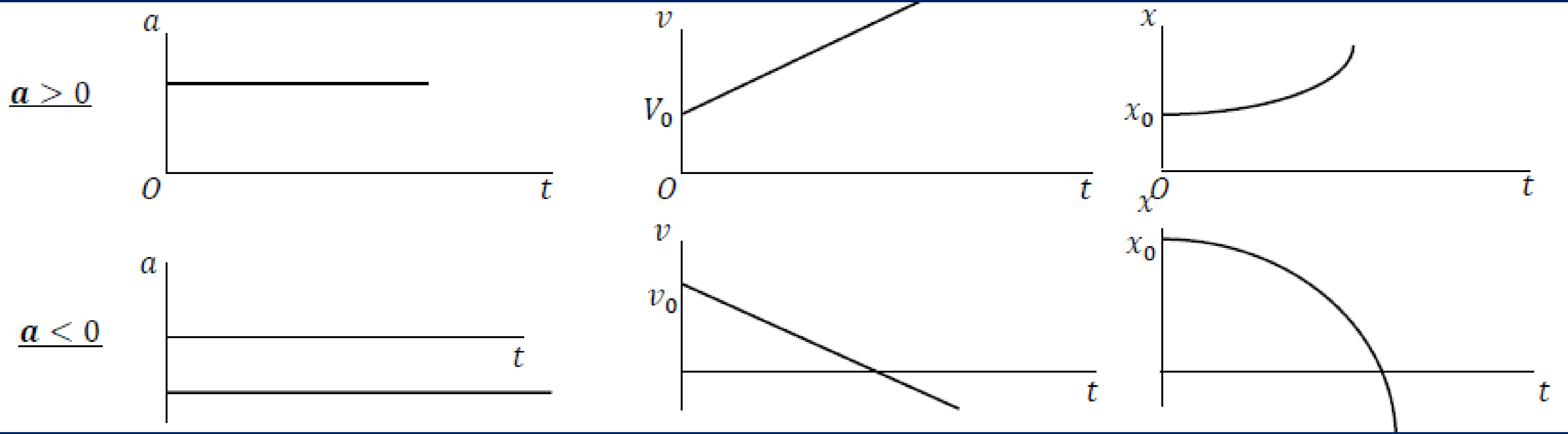
Mouvement rectiligne uniforme :

$$a = 0 \Longrightarrow v = cste \Longrightarrow x(t) = vt + C_3$$

MOUVEMENTS PARTICULIERS

❖Diagrammes des espaces, des vitesses et des accélérations

$$a = cste \Longrightarrow \begin{cases} v(t=0) = v_0 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = at + v_0 \\ x(t) = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Longrightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$



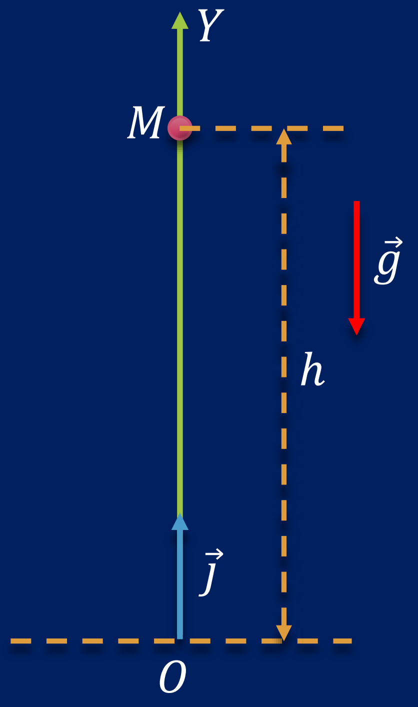
MOUVEMENTS PARTICULIERS

❖ Application : Le mouvement de chute libre

C'est un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération $\vec{g}$ dite accélération de la pesanteur :

$$\vec{a} = -a\vec{j} \Longrightarrow \begin{cases} v(t) = -gt \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

Les conditions initiales :
$v(t = 0) = 0$
$y(t = 0) = y_0 = h$



MOUVEMENTS PARTICULIERS

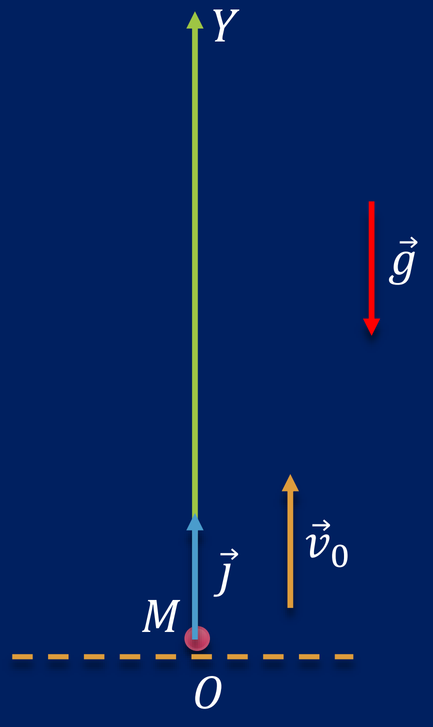
❖ Application : Le lancer vertical

$$\vec{a} = -g\vec{j} \Longrightarrow \begin{cases} v(t) = -gt + v_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \end{cases}$$

Les conditions initiales :

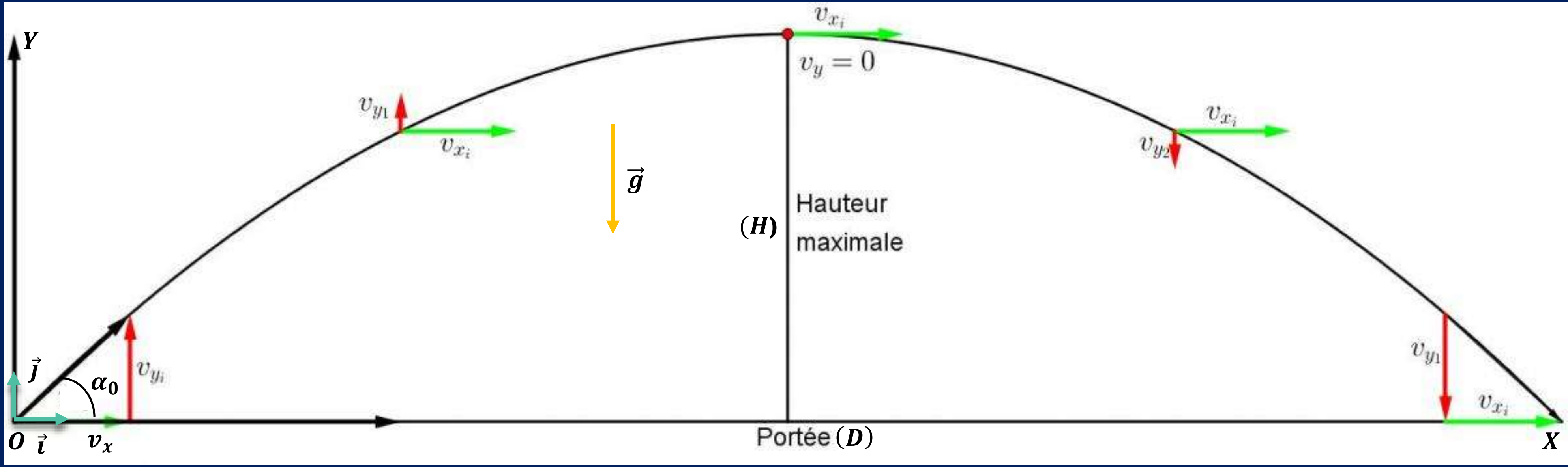
$v(t = 0) = v_0$

$y(t = 0) = 0$



MOUVEMENTS PARTICULIERS

❑Mouvement des projectiles :



MOUVEMENTS PARTICULIERS

❑Mouvement des projectiles :

Composantes des vecteurs accélération, vitesse et position :

$$\vec{a} = -g\vec{j} \Longrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

Conditions initiales :

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases} \; ; \; \overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha\, x \text{ (Parabole)}$$

MOUVEMENTS PARTICULIERS

Portée du tir :

La portée est la distance maximale qui va être effectuer selon l'axe des abscisses.

$$y(D) = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 cos^2\alpha}D^2 + \tan\alpha\, D = 0 \Longrightarrow D = \frac{2v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$$

Hauteur maximale :

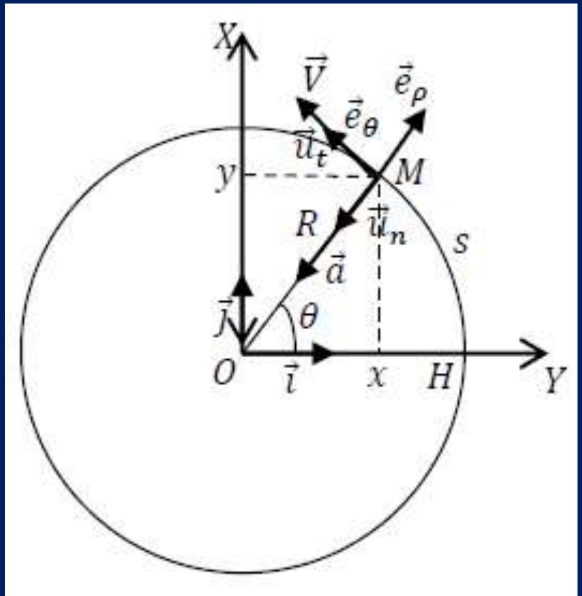
$$v_y = 0 \Longrightarrow t_H = \frac{v_0\sin\alpha}{g} \Longrightarrow H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2\, sin^2\alpha}{g}$$

MOUVEMENTS PARTICULIERS

❑Mouvement circulaire

C’est un mouvement dont la trajectoire est un cercle de rayon R.

Coordonnées cartésiennes	**Coordonnées polaires**	**Coordonnées intrinsèques**
$x = R\cos\theta(t)$ $y = R\sin\theta(t)$	$\rho = R$ $\theta = \theta(t)$	$S(t) = R\theta(t)$



Les systèmes les plus adaptés sont les systèmes

de coordonnées polaires et intrinsèques.

MOUVEMENTS PARTICULIERS

❖Étude dans les différents systèmes de coordonnées

	Position	Vitesse	Accélération
Coordonnées polaires	$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_\rho$	$\begin{cases} V_\rho = 0 \\ V_\theta = R\dot{\theta} \end{cases}$	$\begin{cases} a_\rho = -R\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = R\ddot{\theta} \end{cases}$
Coordonnées intrinsèques	$S(t) = R\theta(t)$	$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_t$	$\begin{cases} a_t = R\ddot{\theta} \\ a_n = R\dot{\theta}^2 \end{cases}$

Position angulaire : $\theta\ (rd)$

Vitesse angulaire : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega\ \ (rd/s)$

Accélération angulaire : $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \dot{\omega} = \alpha\ \ (rd/s^2)$

$$\begin{cases} \vec{e}_\theta = \vec{u}_t \\ \vec{e}_\rho = -\vec{u}_n \end{cases} ; \begin{cases} a_\rho = -a_n \\ a_\theta = a_t \end{cases}$$

$$\vec{v} \perp \vec{a}$$

MOUVEMENTS PARTICULIERS

❖ Mouvement circulaire uniformément varié :

$$\alpha = cste \Longrightarrow \begin{cases} \omega(t) = \int \alpha dt + \omega_0 = \alpha t + \omega_0 \\ \theta(t) = \int \omega(t) dt + \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

$\theta_0 = \theta(t = 0)$
$\omega_0 = \omega(t = 0)$

Nature du mouvement :
Accéléré : $\alpha > 0$
Décéléré : $\alpha < 0$

MOUVEMENTS PARTICULIERS

❖Mouvement circulaire uniforme :

$$\alpha = 0 \Longrightarrow \omega = cste \Longrightarrow \theta(t) = \int \omega dt + \theta_0 = \omega t + \theta_0$$

$$\theta(t = 0) = \theta_0$$

Mouvement périodique :

- Période T (s) qui est le temps nécessaire pour faire un tour complet (une révolution) :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- Fréquence $f(s^{-1} = Hz)$ qui est le nombre de tours (révolutions) par unité de temps :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

MOUVEMENTS PARTICULIERS

❖Mouvement circulaire uniforme :

$$a_t = a_\theta = 0 \ ; \ a_n = -a_\rho = R\omega^2$$

Description angulaire (rd)	Description linéaire (m)
$\theta(t)$	$S(t) = R\theta(t) + S_0$
ω	$v = R\omega$
α	$a_n = R\alpha$

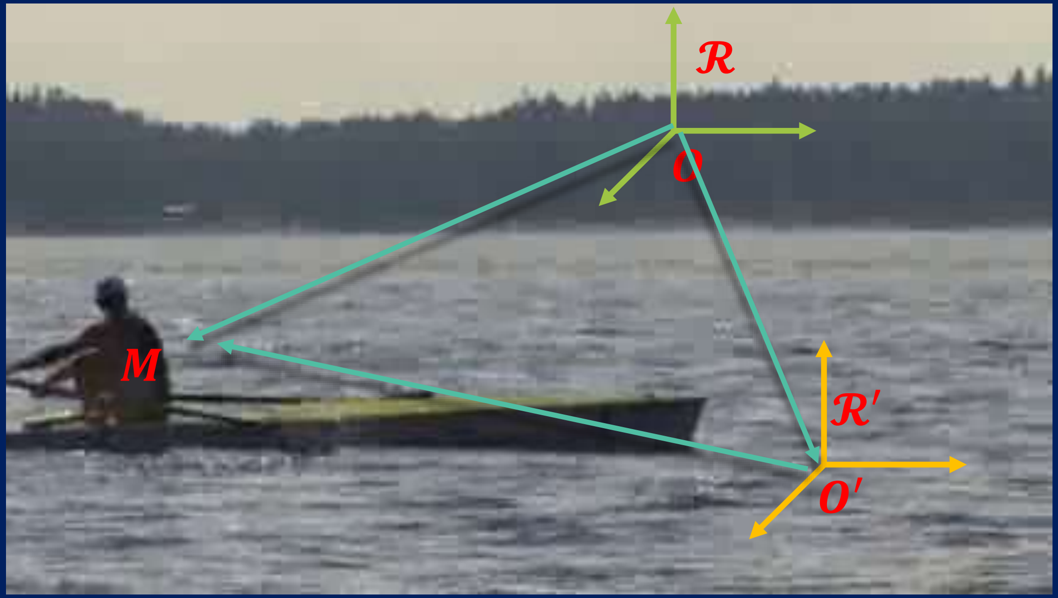
$$S_0 = S(t = 0)$$

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIELS

❑Changement de référentiel

Comment décrire le mouvement d'un point matériel M par rapport à un référentiel $\mathcal{R}'$ si on connait son mouvement dans le référentiel supposé fixe $\mathcal{R}$. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement par rapport au référntiel $\mathcal{R}$.

Exemple :



Le mobile : M
Le référentiel absolu : $\mathcal{R}$
Le référentiel relatif : $\mathcal{R}'$

Dans la pratique, le référentiel absolu est associée à la terre

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIELS

❖Les grandeurs cinématiques dans les deux référentiels :

Toutes les grandeur liées à $\mathcal{R}$ sont dites absolues

Toutes les grandeurs liées à $\mathcal{R}'$ sont dites relatives

	$(\mathcal{R})$	$(\mathcal{R}')$
Position	$\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{O'M}$
Vitesse	$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_a$	$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{v}_r$
Accélération	$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_a$	$\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{a}_r$

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIELS

❖Relation entre les positions :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

❖Loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

La vitesse d'entrainement : $\vec{v}_e = \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

❖Loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

L'accélération d'entrainement : $\vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}'/R}$

L'accélération de Coriolis :

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIELS

❖Relation entre les positions :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

❖Loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

La vitesse d'entrainement : $\vec{v}_e = \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

❖Loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

L'accélération d'entrainement : $\vec{a}_e = \vec{a}_{\mathcal{R}'/R}$

L'accélération de Coriolis $\vec{a}_c$: elle n'existe que si le point M est en mouvement dans $\mathscr{R}'$ et si $\mathscr{R}'$ est un référentiel en rotation par rapport à $\mathscr{R}$;

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIELS

❖Résolution pratique d'un problème de changement de référentiel

- Identifier les référentiels absolu et relatif ainsi que le mobile ;
- Identifier les vitesses absolue, relative et d'entraînement ;
- Faire un schéma représentatif de ces vitesses ;
- Appliquer la loi de composition des vitesses en ne perdant pas de vue qu'il s'agit d'une relation vectorielle.

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIELS

Exemple :

Un nageur plonge d'un point situé sur la rive d'un fleuve et veut atteindre l'autre rive. Pour cela, il nage perpendiculairement au courant avec une vitesse $\vec{v}_1$. Sa vitesse par rapport au sol est $\vec{v}_3$ et la vitesse du courant est $\vec{v}_2$.

Référentiel absolu : le sol

Référentiel relatif : le courant d'eau

Mobile : le nageur

Vitesse absolue : $\vec{v}_a = \vec{v}_3$

Vitesse relative : $\vec{v}_r = \vec{v}_1$

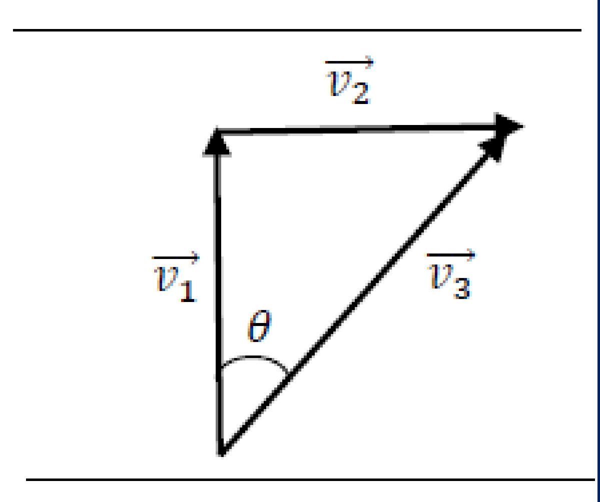
Vitesse d'entrainement : $\vec{v}_e = \vec{v}_2$

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIELS

Loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Longrightarrow \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

La vitesse du nageur par rapport à la Terre (module et direction) :



$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\tan\theta = \frac{v_2}{v_1}$$