Ce cours a été préparé et rédigé par Mr. KESSI Ferhat

CHAPITRE 2

Dynamique du point matériel

GÉNÉRALITÉS

❑ Concept de masse :

❖ Elle représente la quantité de matière contenue dans un corps.

❖ Du point de vue mécanique, elle représente l'inertie d'un corps, c'est-à-dire, la capacité d'un corps à résister au mouvement qu'on souhaite lui imposer.

❖ Symbole de la masse : m, M

❖ Propriétés de la masse :

✓ C'est une grandeur scalaire et positive. Son unité est le kilogramme (kg) dans le SI.

✓ C'est une grandeur additive : la masse d'un système fermé est égale à la somme de ses constituants

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

GÉNÉRALITÉS

❑ Notion de Force

❖ Une force ou interaction est toute cause capable de :

✓ modifier un mouvement

✓ produire un mouvement

✓ déformer d'un corps

❖ La force est une grandeur vectorielle notée $\vec{F}$ dont l'unité dans le SI est le Newton (N)

❖ La fore est une grandeur additive : si plusieurs forces s'appliquent sur un corps, alors la résultante est la somme vectorielle de ses forces :

$$\vec{F}_{tot} = \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

GÉNÉRALITÉS

❖ On distingue deux types de forces :

✓ Les forces (ou interactions) à distance : la force gravitationnelle, la force électrique et la force magnétique ;

✓ Les forces (ou interactions) de contact ou de liaison : les frottements, la tension d'un fil, la réaction d'un support…etc.

❑ Point matériel isolé : est un point matériel qui n'est soumis à aucune force

❑ Point matériel pseudo-isolé : si la résultante des forces qui s'applique sur le point matériel est nulle où certaines forces sont négligeables :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

QUANTITÉ DE MOUVEMENT

❑ Définition :

✓ Point matériel : $\vec{P} = m\vec{v}$

✓ Système de N points matériels :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

❑ Principe de conservation de la quantité de mouvement :

Si le point matériel ou le systèmes de points matériels est isolé, alors sa quantité de mouvement est constante :

$$\vec{P} = cste \Longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P}(t_1) = \vec{P}(t_2)$$

LES LOIS DE NEWTON

- Isaac Newton (1642 – 1727) : est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais.

- Contributions scientifiques :
  - Optique
  - Mathématique
  - Mécanique
  - La loi de la gravitation universelle
- Œuvre : Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1687)

LES LOIS DE NEWTON

❑ Première loi : le principe d'inertie

Il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens, par rapport auxquels tout point matériel isolé ou libre est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

❑ Conséquences :

- ✓ Un point matériel peut donc être en mouvement même s'il ne subit aucune action.
- ✓ Le principe d'inertie crée l'équivalence entre le mouvement rectiligne uniforme et le repos.
- ✓ L'application du principe d'inertie conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement :

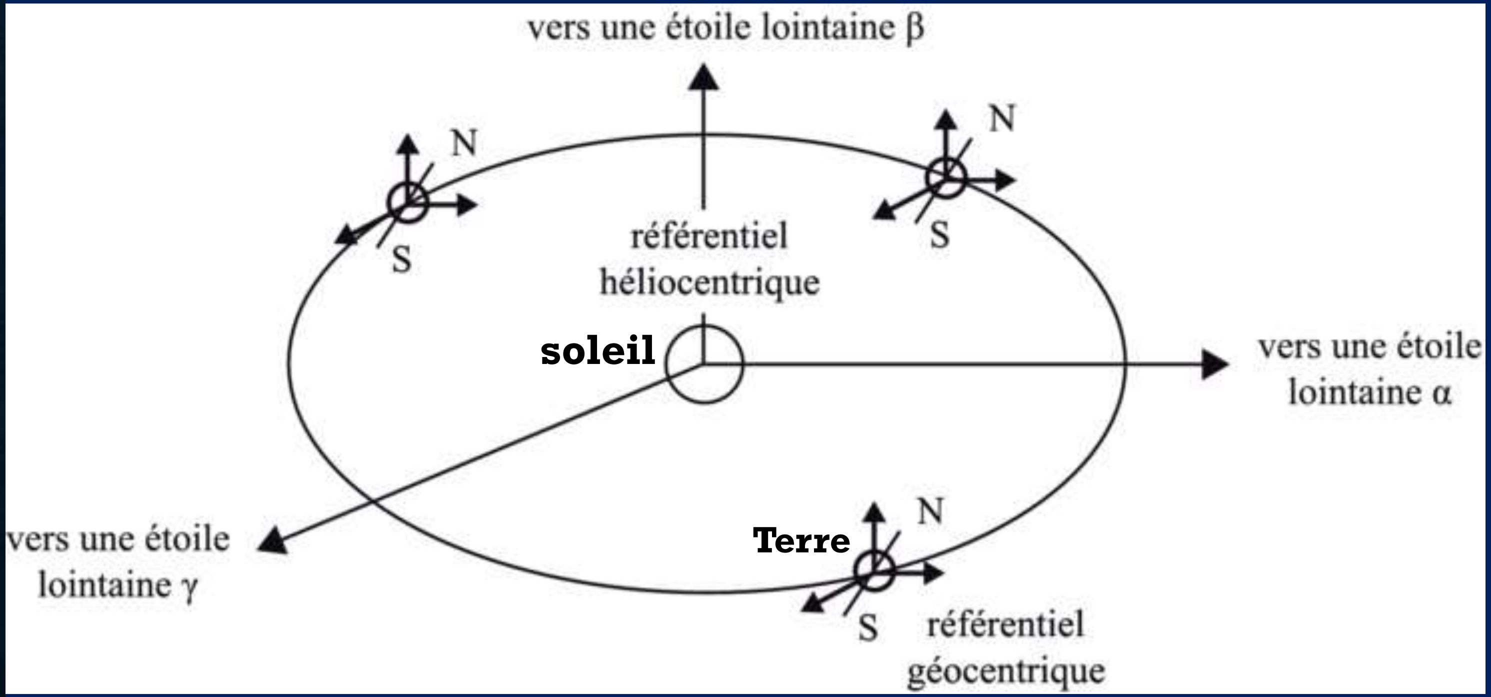
$$\vec{v} = cste \Longrightarrow \vec{P} = m\vec{v} = cste\ (si\ m = cste) \Longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

LES LOIS DE NEWTON

- Les référentiels galiléens

- ✓ Un référentiel galiléen est donc un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique. C'est pour cette raison qu'on l'appelle des fois référentiel d'inertie ou inertiel.
- ✓ Les lois de la mécanique ne sont valable que dans les référentiels galiléens.
- ✓ Tout référentiel au repos par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.
- ✓ Tout référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel est aussi galiléen.
- ✓ Les lois de la nature ont la même forme mathématiques dans tous les référentiels galiléens.

LES LOIS DE NEWTON



- Référentiel héliocentrique
- Référentiel géocentrique
- Référentiel terrestre

LES LOIS DE NEWTON

- La deuxième loi : le principe fondamentale de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale à la variation de sa quantité de mouvement par rapport au temps.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a}$$

Si la masse m est constante :

$$m = cste \Longrightarrow \frac{dm}{dt} = 0 \Longrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

LES LOIS DE NEWTON

- Le PFD dans les différents systèmes de coordonnées :

$$\begin{cases} (\vec{\imath}) : \sum F_x = ma_x \\ (\vec{\jmath}) : \sum F_y = ma_y \end{cases} ; \begin{cases} (\vec{e}_\rho) : \sum F_\rho = ma_\rho \\ (\vec{e}_\theta) : \sum F_\theta = ma_\theta \end{cases} ; \begin{cases} (\vec{u}_t) : \sum F_t = ma_t \\ (\vec{u}_n) : \sum F_n = ma_n \end{cases}$$

- Le PFD est une équation différentielle du premier ordre par rapport à la vitesse et du second ordre par rapport à la position (équation différentielle du mouvement) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

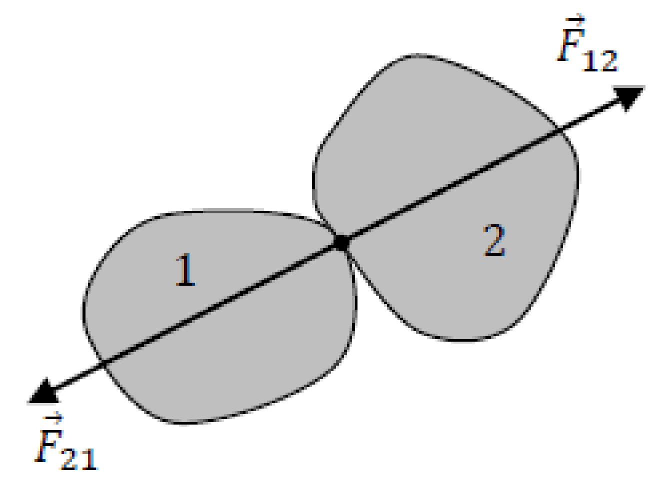
- D'après le PFD, un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le mouvement d'une particule (sa trajectoire) peut s'expliquer en termes de forces d'origine matérielle.

LES LOIS DE NEWTON

❑Troisième loi : le principe des actions réciproques

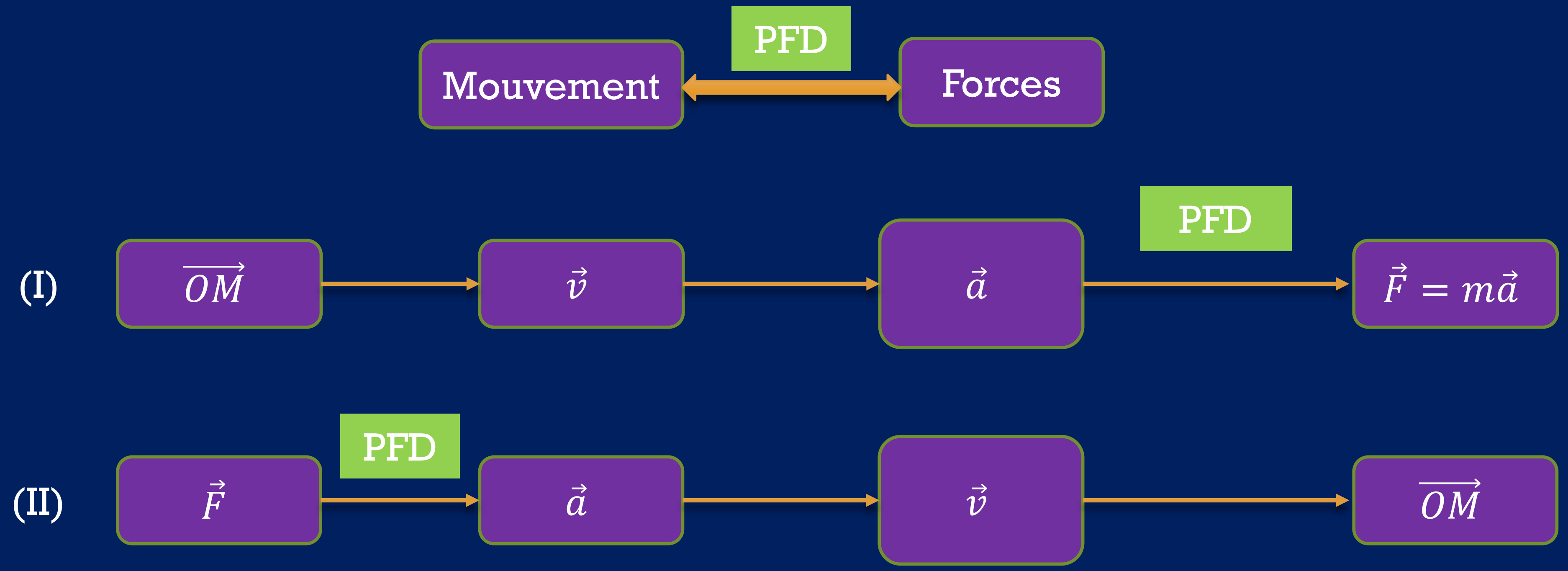
Dans un référentiel galiléen, lorsque deux particules sont en interaction, elles exercent l'une sur l'autre des forces opposées en sens mais égales en intensité et de même direction :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \Longrightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$



LES LOIS DE NEWTON

❑Utilisation des lois Newton



LES LOIS DE FORCES

❑Le poids :

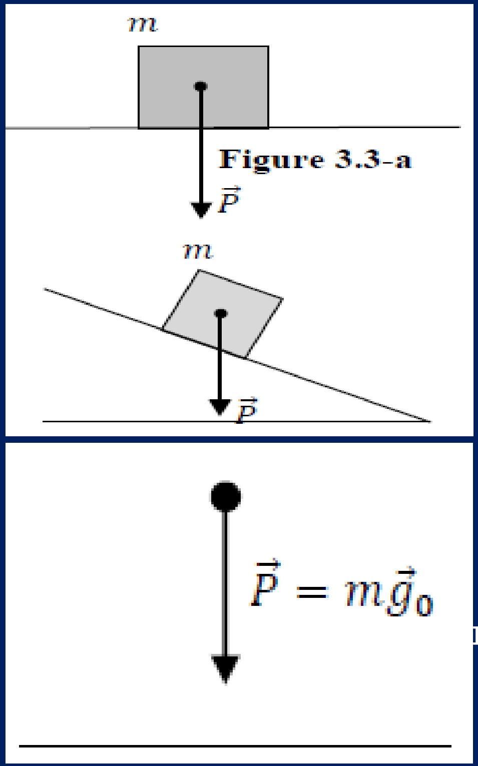
Le poids d'un corps, en un lieu donné de la surface de la Terre, est la force attractive, notée $\vec{P}$, que la Terre exerce sur celui-ci.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

La grandeur vectorielle $\vec{g}$ est dite accélération de la pesanteur

Selon les endroit, varie entre 9,78 et 9,83 m/s^2. En Algérie, elle vaut 9,81 m/s^2.

C'est cette force qui est responsable de la chute des corps au voisinage de la Terre.



LES LOIS DE FORCES

- La force gravitationnelle

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$$

Constante gravitationnelle : $G = 6.726\ 10^{-11}\ SI$

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_1}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

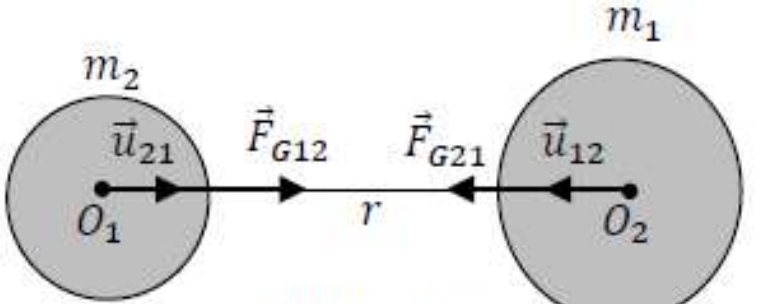


Figure 3.4

Le poids d'un objet au voisinage de la surface de la terre représente donc la force gravitationnelle exercée par la Terre sur cette objet :

$$F = G\frac{M_T m}{R_T^2} = m g_0 \Longrightarrow g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

À une hauteur h :

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} g_0$$

LES LOIS DE FORCES

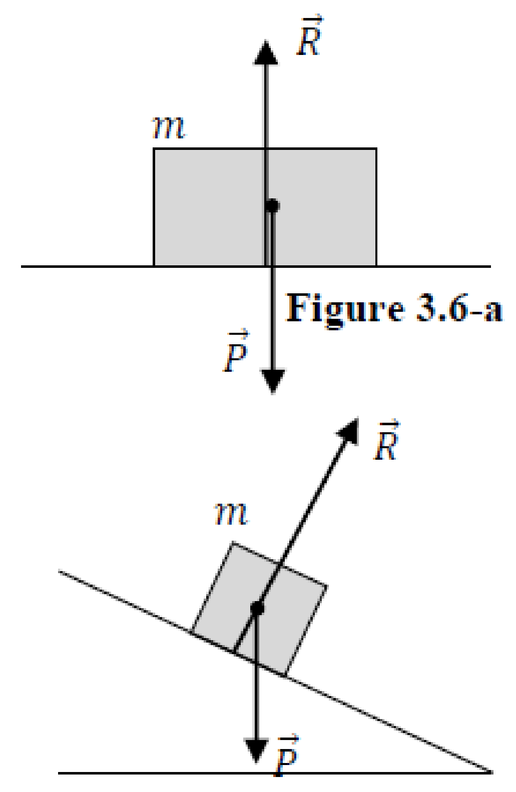
❑Les forces de contact

❖Réaction d'un support

✓La force que subit un objet posé sur un support horizontal en provenance de ce support s'appelle réaction du support ou force normale. On la note $\vec{R}$ ou $\vec{N}$.

✓La réaction d'un support est toujours orthogonale à ce support, même si ce dernier n'est pas horizontal.

✓Il n'y a pas d'expression générale pour cette force, sa valeur est déterminée en fonction des autres forces en présence : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$



LES LOIS DE FORCES

❖ Les forces de frottements

➢ Les frottements fluides ou visqueux : c'est la force subit par un solide qui se déplace dans un fluide. Par exemple la résistance de l'air :

$$\vec{f} = -k\vec{v}$$

Où k est le coefficient de frottement visqueux.

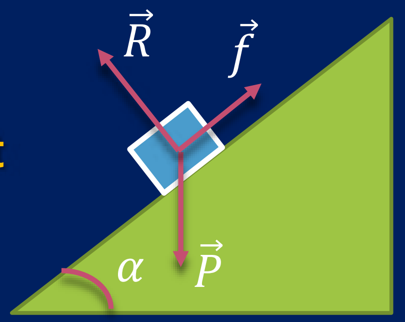
LES LOIS DE FORCES

➢ Les frottements solides : c'est les forces qui s'exercent entre deux solides en contact

En augmentant graduellement la valeur de α, on remarque que le corps se met à glisser sur le plan incliné à partir d'un angle critique α_0 (seuil, limite).

Si $\alpha \leq \alpha_0$, le corps reste en équilibre :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0}$$



La force maintient le corps en équilibre, c'est la force de frottement statique :

$$f_s = \mu_s \mathrm{R}$$

Où μ_s est le coefficient de frottement statique.

LES LOIS DE FORCES

Si $\alpha > \alpha_0$, le corps se met a glisser sur la plan incliné. Les frottements diminue mais ne disparaissent pas. Dans ce cas, on parle de frottement cinétique (dynamique) :

$$f_c = \mu_c R$$

Où μ_c est le coefficient de frottement cinétique. On a toujours :

$$0 < \mu_c < \mu_s < 1$$

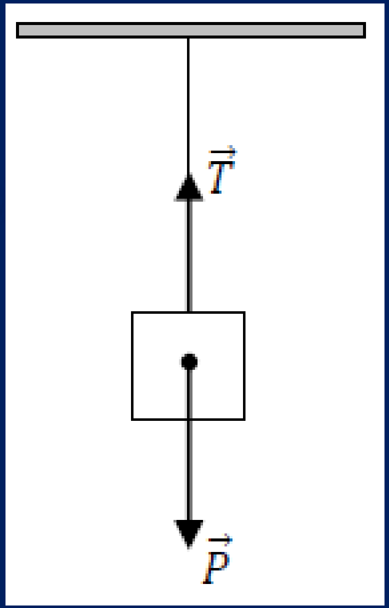
LES LOIS DE FORCES

❖La tension d'un fil

✓C'est la force qu'exerce un fil sur un corps accroché à ce fil.

✓Il n'existe pas d'expression pour cette force, elle s'exprime toujours en fonction des autres forces : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

✓Dans ce cours, on considéré des fils inextensible et de masse Négligeable. Par conséquent, la tension est la même en tout point du fil.



LES LOIS DE FORCES

❖ La force élastique

Un élastique ou ressort est un fil de masse négligeable mais extensible.

La force élastique est la tension d'un ressort. Elle est donnée par la loi de Hooke :

$$\vec{F_e} = -k(l - l_0)\vec{u} = -k\Delta l\vec{u}$$

k : constante de raideur du ressort (N/m)

l_0 : longueur à vide (sans masse) du ressort

$l - l_0 = \Delta l$: déformation (élongation $\Delta l > 0$ ou compression $\Delta l < 0$)

$\vec{u}$: vecteur unitaire dirigé dans le sens de la déformation $(\vec{F})$

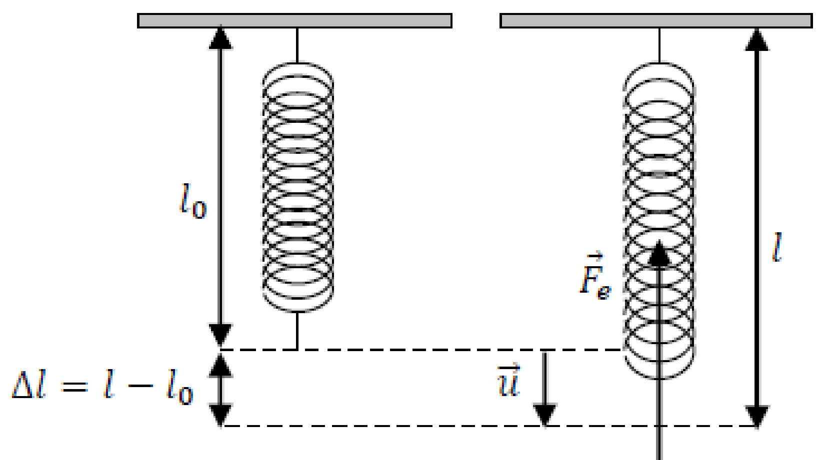


Figure 3.8-b

METHODE DE RÉSOLUTION

- Système mécanique : dans un système mécanique, on peut trouver les éléments suivants

- Une ou plusieurs masses
- Supports solides ou milieux fluides
- Fils inextensibles et de masses négligeables
- Poulies de masses négligeables
- Fils élastiques (ressorts)

Etudier un système mécanique consiste à prévoir le mouvement de ce système via la connaissance préalable des forces qui s'exercent sur ses différentes parties, ce qui revient à utiliser le PFD.

METHODE DE RÉSOLUTION

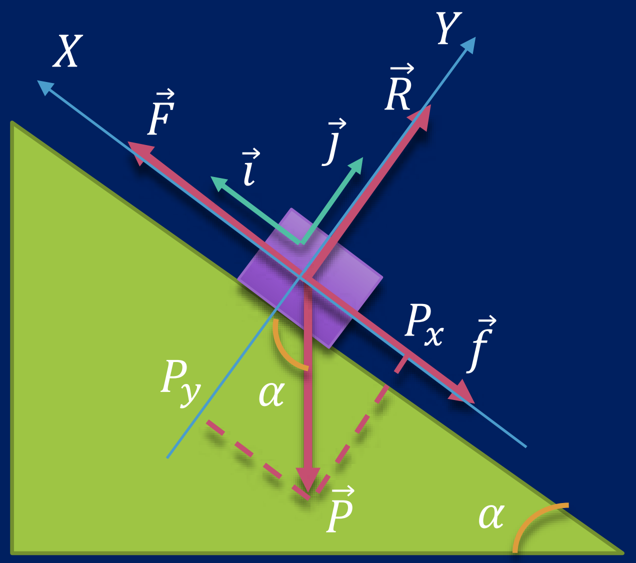
- Méthode générale d'étude d'un système mécanique

- Faire un schéma du système mécanique ;
- Faire un relevé exhaustif ou un bilan des forces appliquées et les représenter sur le schéma ;
- Ecrire l'expression vectorielle de la loi fondamentale pour chaque masse ;
- Choisir un système d'axes inertiel ou galiléen.
- Projeter cette expression sur le trièdre de base choisi.
- Résoudre le système d'équations différentielles ou algébriques obtenu pour obtenir leur solution générale.
- Utiliser les conditions aux limites pour obtenir les solutions particulières.

EXEMPLES D'APPLICATION

- Exemple 1 :

Un objet de masse m, posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal, est tiré avec une force horizontale $\vec{F}$. Son contact avec le sol est caractérisé par les coefficients de frottement statique μ_s et cinétique μ_c.

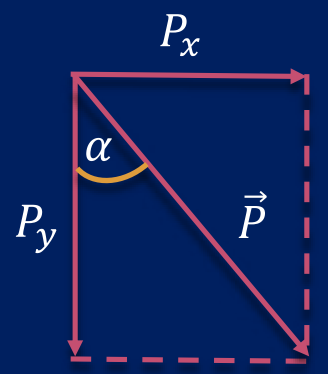


EXEMPLES D'APPLICATION

1. La valeur de F pour que le corps reste en équilibre :

Application du PFD (forme vectorielle) :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_s} = \vec{0}$$



Projections dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$:

$$\begin{cases} (OX) : F - P_x - f_s = 0 \\ (OY) : R - P_y = 0 \end{cases}$$

Les composante du poids :

$$\begin{cases} P_x = P \sin\alpha = mg \sin\alpha \\ P_y = P \cos\alpha = mg \cos\alpha \end{cases}$$

EXEMPLES D'APPLICATION

La force de frottement statique :

$$(OY) : R = P_y \Longrightarrow f_s = \mu_s R = \mu_s P_y = \mu_s mg\cos\alpha$$

La valeur de F :

$$(OX) : F = P_x + f_s = mg\sin\alpha + \mu_s mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha)$$

2. La valeur de F pour que le corps se déplace à vitesse constante :

$$\vec{v} = cste \Longrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Longrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\mu_s \rightarrow \mu_c \Longrightarrow F = mg(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha)$$

EXEMPLES D'APPLICATION

3. La valeur de F pour que le corps se déplace avec une accélération constante a:

Application du PFD (forme vectorielle) :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_s} = m\vec{a}$$

Projections dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$:

$$\begin{cases} (OX) : F - P_x - f_s = ma \\ (OY) : R - P_y = 0 \end{cases}$$

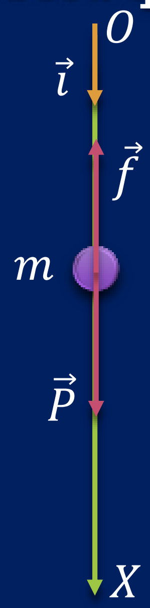
La valeur de F :

$$F = mg(\sin\alpha + \mu_c \cos\alpha) + ma$$

EXEMPLES D'APPLICATION

➢ Exemple 2 : chute d'un corps dans l'air

Nous faisons l'hypothèse que le corps de masse m est freiné au cours de sa chute par une force de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}$ de type visqueux (résistance de l'air). On supposera que la masse m chute sans vitesse initiale d'une position $x = 0$ à $t = 0$.



PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projection suivant l'axe (OX) :

$$mg - kv = ma \Longrightarrow mg - kv = m\frac{dv}{dt} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

EXEMPLES D'APPLICATION

C'est l'équation différentielle du mouvement. C'est une équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficients constants mais inhomogène (avec second membre). On résous cette équation par séparation des variables :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + g = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{gm}{k}\right) \Longrightarrow \frac{dv}{v - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt$$

L'intégration des deux membres donne :

$$\ln\left(v - \frac{mg}{k}\right) = -\frac{k}{m}t + C \Longrightarrow v - \frac{mg}{k} = e^{-\frac{k}{m}t+C} = e^{-\frac{k}{m}t}e^{C} = A\,e^{-\frac{k}{m}t}(A = e^{C})$$

$$\Longrightarrow v(t) = A\,e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

EXEMPLES D'APPLICATION

La valeur de la constante d'intégration A s'obtient en utilisant la condition initiale :

$$v(t=0) = A + \frac{mg}{k} = 0 \Rightarrow A = -\frac{mg}{k}$$

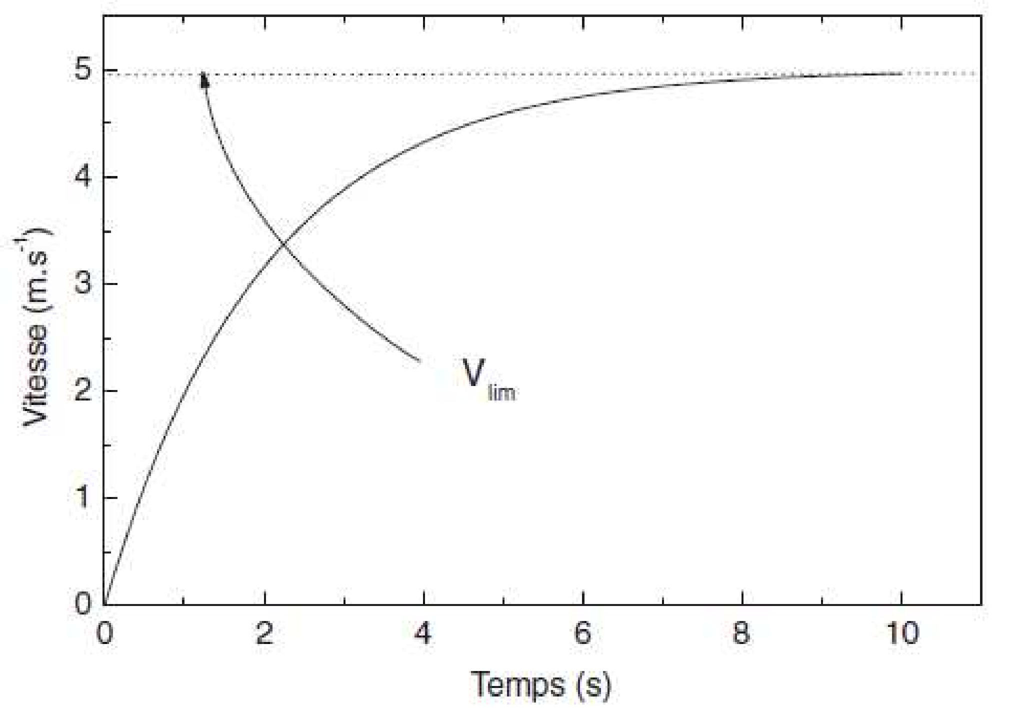
La vitesse du corps s'écrit enfin :

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{\frac{k}{m}t}\right)$$

On peut ainsi constater que la vitesse augmente progressivement pour atteindre une vitesse limite lorsque le temps tend vers l'infini. La vitesse limite de chute, qui logiquement n'est jamais atteinte, est donnée par :

$$v_l = \frac{mg}{k}$$

EXEMPLES D'APPLICATIONS

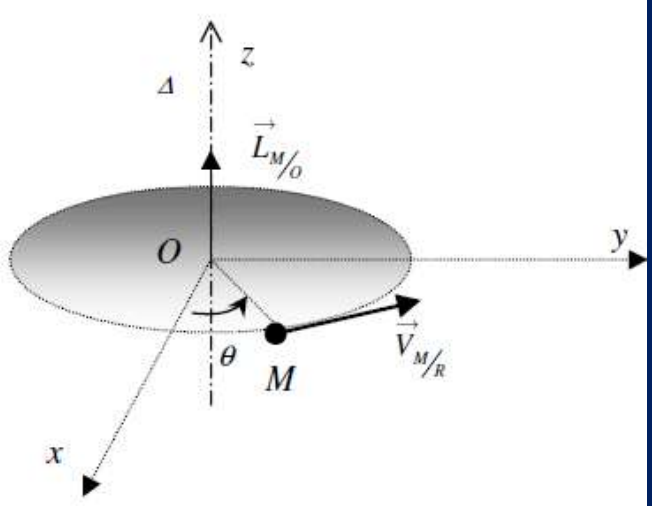


MOMENT CINÉTIQUE

❑Définition

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, le moment cinétique d'un point matériel M de masse m et se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v})$$



On l'appelle aussi moment angulaire ou moment de la quantité de mouvement.

Le moment cinétique est donc un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ et à la vitesse $\vec{v}$ du point. C'est donc un vecteur perpendiculaire à la trajectoire du point M.

MOMENT CINÉTIQUE

❑Théorème du moment cinétique (TMC)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge (m\vec{v}) + \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_{ext}\right)$$

La dérivée du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au point O.

MOMENT CINÉTIQUE

Le TMC est l'équivalent du PFD pour les mouvement de rotation.

PFD ⟷ TMC

PFD → $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ → Mouvement de translation

TMC → $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ → Mouvement de rotation

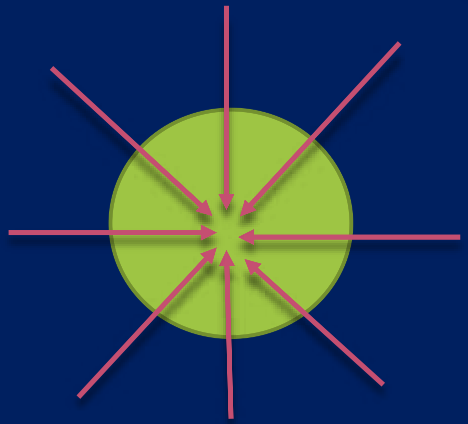
$\vec{P}$ → $\vec{L}_O$

$\sum \vec{F}_{ext}$ → $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$

MOMENT CINÉTIQUE

❑Conservation du moment cinétique :

$$\vec{L}_O = cste \Longrightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow TMC \Longrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$



$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Longrightarrow \text{Particule isolée} \\ \overrightarrow{OM} \parallel \sum \vec{F}_{ext} \Longrightarrow \text{Force centrale} \end{cases}$$

Une force centrale est une force dont la direction passe constamment par un même point fixe (point de référence utilisé pour le moment cinétique). Exemple : Force gravitationnelle.

MOMENT CINÉTIQUE

❑Application : rotation d'un point matériel autour d'un axe fixe

$$PFD : m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$TMC : I\vec{\alpha} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v}) = mrv\vec{k}$$

$$OM = r \,;\, v = \omega r$$

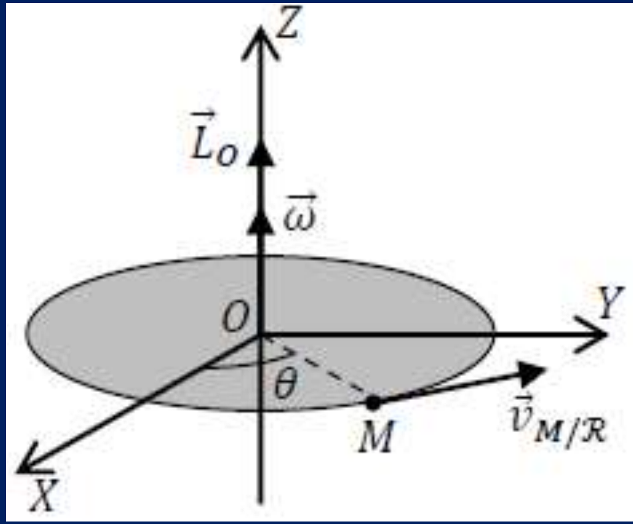
$$\vec{L}_O = mr^2\omega\vec{k} = I\vec{\omega}$$

$$I = mr^2 \text{ : Moment d'inertie}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} \text{ : vecteur vitesse de rotation}$$

$$TMC : I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$$

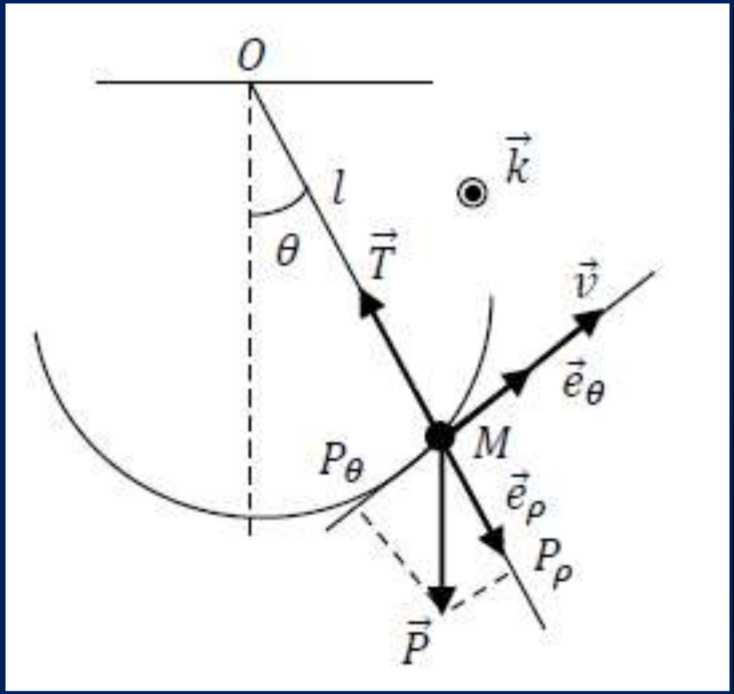
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \text{ : vecteur accélération angulaire}$$



MOMENT CINÉTIQUE

Exemple : équation du mouvement d'un pendule simple

$$\vec{L}_O = (l\vec{e}_\rho) \wedge (ml\omega\vec{e}_\theta) = ml^2\omega\vec{k}$$
$$\vec{M}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}\ (\overrightarrow{OM} \parallel \vec{T})$$
$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{M}_O(\vec{P}_\rho) + \vec{M}_O(\vec{P}_\theta)$$
$$\vec{M}_O(\vec{P}_\rho) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}_\rho = \vec{0}\ (\overrightarrow{OM} \parallel \vec{P}_\rho)$$
$$\vec{M}_O(\vec{P}_\theta) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}_\theta = (l\vec{e}_\rho) \wedge (-P_\theta\vec{e}_\theta) = -lP_\theta\vec{k} = -lmg\sin\theta\,\vec{k}$$
$$TMC : ml^2\alpha\vec{k} = -lmg\sin\theta\,\vec{k}$$
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$
$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$



FORCES D'INERTIE

On les appelle également pseudo-forces, forces de repère ou forces fictives. Elles apparaissent dans un référentiel non galiléen. Un référentiel non galiléen est un référentiel qui ne possède pas un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen. Les lois de Newton ne sont pas valables dans un tel référentiel.

Exemple :

Véhicule en accélération ou en décélération est un référentiel non galiléen par rapport au sol qui est considéré comme référentiel galiléen.

But :

Comment les lois de la mécanique s'expriment dans les référentiels non galiléens ?

Comment étudier n système mécanique dans un référentiel non galiléen?

FORCES D'INERTIE

❑Mouvement rectiligne :

Référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXY)$

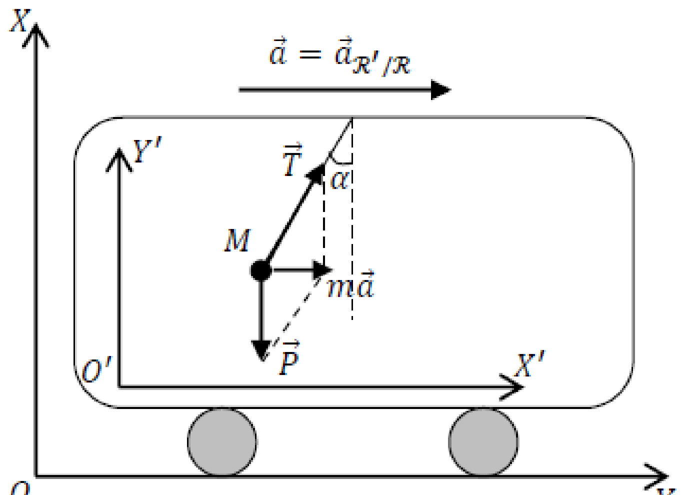


Figure 3.9-b

$$PFD : \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Référentiel non galiléen $\mathcal{R}'(O'X'Y')$

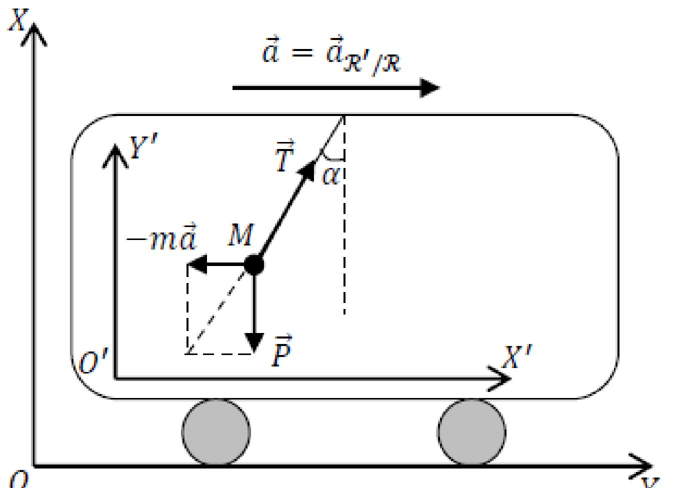


Figure 3.9-a

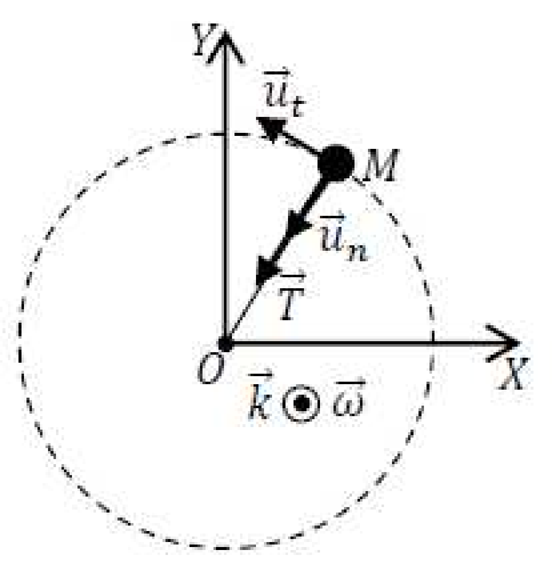
$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{f_i} = \vec{0}$$

$$\vec{f_i} = -m\vec{a}$$

FORCES D'INERTIE

❑Mouvement de rotation (circulaire)

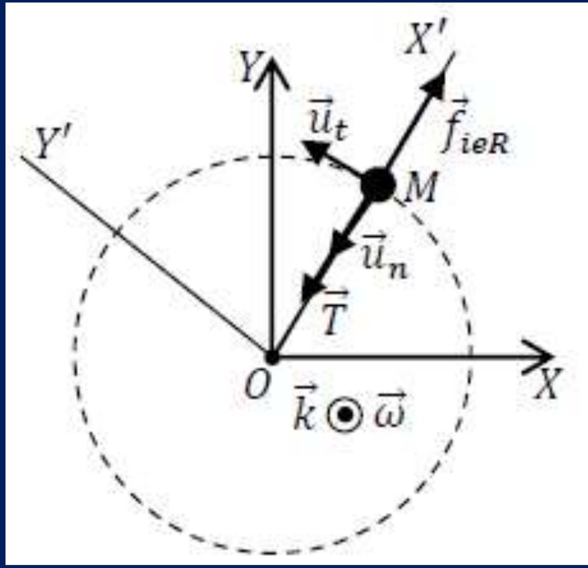
Référentiel galiléen $\mathcal{R}(OXY)$



$$PFD : \vec{T} = m\vec{a}_n = m\frac{v^2}{l}\vec{u}_n$$

Force centripète

Référentiel non galiléen $\mathcal{R}'(O'X'Y')$



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{T} + \vec{f}_i = \vec{0} \Longrightarrow \vec{f}_i = -m\frac{v^2}{l}\vec{u}_n$$

Force centrifuge