CHAPITRE 1

RAPPELS MATHEMATIQUES

1- GENERALITES SUR LES GRANDEURS PHYSIQUES

Une grandeur physique est une quantité qui peut se mesurer et qui se rapporte à un phénomène ou une propriété physique. Elle peut être de différentes natures : scalaire ou vectorielle.

Une grandeur physique peut être fonction d'une ou plusieurs variables. Par exemple, la position d'un corps qui se déplace sur l'axe (OX) est une fonction du temps x(t). Les variables utilisées en physique sont le temps et l'espace (par exemple : les coordonnées cartésiennes x, y et z).

En physique, on utilise beaucoup plus la notion de champ que celle de fonction. On parle alors de champ scalaire ou vectoriel.

2- EQUATIONS AUX DIMENSIONS

2-1. Grandeurs physiques fondamentales

Pratiquement, toutes les grandeurs physiques peuvent être définies à partir de sept grandeurs fondamentales. Ces grandeurs sont : La longueur (L), le temps (T), la masse (M), l'intensité du courant électrique (I), la température thermodynamique (Θ) , l'intensité lumineuse (J) et la quantité de matière (N). Elles sont dites également de base.

En mécanique et en électricité, on n'utilisera que les quatre grandeurs fondamentales suivantes : la longueur, la masse, le temps et l'intensité du courant électrique.

2-2. Grandeurs physiques dérivées

Dites aussi secondaires. Elles sont définies à partir des grandeurs fondamentales. Comme exemples, citons les grandeurs suivantes :

```
La surface = (longueur) * (longueur);

La vitesse linéaire = déplacement (longueur) / temps;

L'accélération linéaire = vitesse / temps = longueur / (temps * temps);

La fréquence = 1 / temps;

La force = (masse) * (accélération) = (masse * vitesse) / temps = (masse * longueur) / (temps * temps);
```

2-3. Dimension d'une grandeur physique

Elle représente la nature de cette grandeur. La dimension d'une grandeur G est notée [G]. Les dimensions des grandeurs fondamentales sont notées directement par leurs symboles donnés dans le paragraphe 2-1., par exemple :

```
[Masse] = M; [Longueur] = L; [Temps] = T; [Intensité du courant électrique] = I
```

Notons que :

- Lorsqu'on écrit les dimensions d'une grandeur physique, on ne tient pas compte de son caractère scalaire ou vectoriel. Par exemple dans le cas de la force, on écrit [F] et pas $[\vec{F}]$;
- Lorsque la grandeur en question est une grandeur dérivée, on utilise le pluriel, c'est-à-dire, on dit les dimensions de cette grandeur.

2-4. Equations aux dimensions

Elles sont des écritures conventionnelles qui résument la définition des grandeurs dérivées à partir des grandeurs fondamentales. Elles sont établies à partir de lois connues.

On montre que la dimension de toute grandeur dérivée *G* peut s'écrire comme suit :

$$[G] = M^a L^b T^c I^d \Theta^e I^f N^g$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des nombres rationnels.

Si G_1 et G_2 sont deux grandeurs physiques de dimensions $[G_1]$ et $[G_2]$ et $[G_2]$ et $[G_2]$ et $[G_2]$ et $[G_3]$ et [G

$$[a] = 1$$

$$[G_1G_2] = [G_1][G_2]$$

$$\left[\frac{G_1}{G_2}\right] = \frac{[G_1]}{[G_2]}$$

$$[G_1^n] = [G_1]^n$$

Notons que $[G_1 \pm G_2] \neq [G_1] \pm [G_2]$. Si dans une loi physique, on trouve une formule qui s'écrit sous la forme $G_1 \pm G_2$ alors $[G_1] = [G_2]$.

Si dans une loi physique, on trouve des expressions du type $\sin G$, $\cos G$, e^G et $\ln G$ alors la grandeur G est sans dimension ([G] = 1).

Pour déterminer les dimensions d'une grandeur physique G, on procède de la manière suivante :

- On cherche une loi physique connue où figure cette grandeur et on calcule ses dimensions ;
- Si dans cette loi se trouve des grandeurs dérivées, alors il faudra faire appel à d'autres lois physiques où apparaissent ces grandeurs et calculer leurs dimensions, ainsi de suite, jusqu'à aboutir à une expression où il y a uniquement des grandeurs fondamentales.

Exemple:

Cherchons les dimensions de la force :

$$F = ma \Rightarrow [F] = [ma] = [m][a] = [m] \left[\frac{V}{t}\right] = \frac{[m][V]}{[t]} = \frac{[m]\left[\frac{l}{t}\right]}{[t]} = \frac{[m][l]}{[t]^2} = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2}$$

$$(a = 1, b = 1, c = -2)$$

On dit que la force est homogène à MLT^{-2} .

2-5. Systèmes d'unités en physique

Dans une expérience, on effectue des mesures. Une mesure consiste à associer aux phénomènes ou propriétés physiques un certain nombre de grandeurs. Le processus de mesure proprement dit consiste à comparer ces grandeurs à des grandeurs de même nature, choisies comme unité (étalon). Par exemples : le mètre est l'unité de la longueur et la seconde est celle du temps. Cette comparaison s'exprime sous forme d'un chiffre. Si l'on peut reporter 10 fois de suite le mètre le long de notre salle de cours, nous dirons qu'elle à dix mètres de longueur. La grandeur "la longueur de la salle" s'exprime par le nombre 10 suivi de l'unité utilisée, soit 10 mètres ou 10 m en abrégé. Il existe plusieurs systèmes d'unités et on peut en définir d'autres.

2-5.1. Système international (SI)

Ce système d'unités cohérent et rationalisé repose sur 07 unités fondamentales associées aux sept grandeurs fondamentales :

La longueur : mètre (m) ; La masse : kilogramme (kg) ; Le temps : seconde (s) ; L'intensité du courant électrique : Ampère (A) ; Température thermodynamique : kelvin (K) ; Intensité lumineuse : candela (cd) ; Quantité de matière : mole (mol).

Ce système est également appelé système MKSA (Mètre, Kilogramme, Seconde, Ampère).

En mécanique et en électricité, on n'aura besoin que des quatre premières unités dont les définitions sont les suivantes :

- La seconde est la durée de 9192631770 périodes de radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.
- Le mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une durée égale à 1/c seconde, la vitesse de la lumière ayant la valeur exacte suivante :

$$c = 2.99792458.10^8 \, m/s$$

- Le kilogramme est la masse d'un certain cylindre en platine iridié, appelé prototype international du kilogramme, déposé au bureau des poids et mesures.
- L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, parallèles, de longueur infinie et de section négligeable, placés à un mètre l'un de l'autre, produit entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7} N$ par mètre.

2-5.2. Système CGS

Le symbole CGS signifie (centimètre, gramme, seconde). Historiquement, ce fut le premier système d'unités utilisé. Il est aisé de passé de ce système au système MKSA et inversement par simple conversion d'unités :

$$1m = 10^2 cm$$
; $1kg = 10^3 g$

$$1 cm = 10^{-2} m$$
; $1g = 10^{-3} kg$

Il existe aussi d'autres systèmes comme le système MTS (mètre, tonne, seconde)...etc.

2-5.3. Unité d'une grandeur dérivée

L'unité d'une grandeur dérivée, dite unité dérivée ou secondaire, peut être déterminée en suivant la procédure suivante :

- On écrit l'équation aux dimensions de cette grandeur ;
- On remplace la dimension de chaque grandeur fondamentale par son unité correspondante.

On montre, de la même manière, que l'unité de toute grandeur physique dérivée peut s'écrire sous la forme :

$$kg^a.m^b.s^c.A^d.K^e.cd^f.mol^g$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des nombres rationnels.

Exemple:

On a déjà établi que $[F] = MLT^{-2}$, par conséquent l'unité de la force est le $kg.m.s^{-2}$.

Des noms et des préfixes sont attribués aux unités secondaires. Par exemple, l'unité de la force est le Newton de symbole $N: 1N = 1 \ kg. \ m. \ s^{-2}$

L'unité du travail ou de l'énergie est le joule de symbole J. L'unité de la puissance est le Watt de symbole *W* ...etc.

Remarques:

- Il ne faut jamais confondre les dimensions d'une grandeur physiques, qui représentent sa nature et son unité qui est reliée au processus de sa mesure.
- Il existe des grandeurs physiques sans dimensions mais dont on a attribué des unités. Citons comme exemples : l'angle plan dont l'unité est le radian et l'angle solide dont l'unité est le stéradian.

2-6. Applications des équations aux dimensions

L'utilisation des équations aux dimensions s'appelle aussi l'analyse dimensionnelle. On a déjà vu qu'elle permet de déterminer les dimensions et les unités des grandeurs dérivées. Nous citons ci-dessous quelques autres applications de l'analyse dimensionnelle.

2-6.1. Détermination des dimensions et des unités des constantes physiques

En effet, en physique il existe deux types de constantes :

- Des constantes mathématiques sans dimensions qui sont des nombres réels comme $4, \pi, \dots$ etc ;
- Des constantes physiques qui ont des dimensions et des unités comme la constante de la gravitation *G*, la vitesse de la lumière *c*...etc.

Exemple: Force de Coulomb

L'expérience montre qu'entre deux charge ponctuelle q_1 et q_2 distantes de r s'exerce une force dont l'intensité est donnée par la loi de Coulomb :

$$F = K \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

Déterminons les dimensions et les unités de la constante physique K. D'après la loi de Coulomb, l'expression de K est donnée par :

$$K = \frac{Fr^2}{|q_1 q_2|}$$

L'analyse dimensionnelle de cette expression donne :

$$[K] = \frac{[F][r]^2}{[q_1][q_2]} = \frac{[F][r]^2}{[q_1][q_2]}$$

Sachant que:

$$\{ [F] = MLT^{-2} \\ [q_1] = [q_2] = IT$$

il s'en suit que :

$$[K] = \frac{MLT^{-2}L^2}{I^2T^2} = ML^3T^{-4}I^{-2}$$

L'unité de K est le $kg.m^3.s^{-4}.A^{-2}$. Sachant que :

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Il s'ensuit que les dimensions et l'unité de ε_0 , dite permittivité diélectrique du vide, sont $M^{-1}L^{-3}T^4I^2$ et $kg^{-1}.m^{-3}.s^4.A^2$, respectivement.

2-6.2. Vérification de l'homogénéité d'une loi physique

Une loi physique A = B est dite homogène si et seulement si [A] = [B].

Exemple:

Vérifier que l'expression mgh, où m est une masse, g l'accélération de la pesanteur et h une hauteur est homogène à une énergie E.

$$[E] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = [m][v]^2 = ML^2T^{-2}$$

où v est une vitesse.

$$[mgh] = [m][g][h] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2} = [E]$$

Par conséquent, l'expression mgh est homogène à une énergie. Ainsi, une grandeur physique peut avoir plusieurs expressions (lois) mais leurs dimensions sont le mêmes.

2-6.3. Elaboration de certaines lois physiques

Si on connait (à partir de l'expérience) la dépendance d'une grandeur physique G en fonction d'autres grandeurs $(G_1, G_2, G_3 \dots)$, l'analyse dimensionnelle permet de trouver l'expression mathématique de cette dépendance, à condition qu'elle soit de la forme suivante :

$$G = kG_1^{\alpha}G_2^{\beta}G_3^{\gamma} \dots$$

où k est une constante sans dimension et α , β et γ des nombres rationnels. L'analyse dimensionnelle permet justement de déterminer les valeurs des nombres α , β et γ .

Exemple : Période d'un pendule simple

Intuitivement, on peut penser que la période T d'un pendule simple pourrait dépendre de la longueur l du fil, de la masse m du corps et de l'accélération de la pesanteur g. Etablissons la relation qui décrit cette dépendance.

Expression de T en fonction des autres grandeurs :

$$T = km^{\alpha}l^{\beta}q^{\gamma}$$

L'équation aux dimensions de cette expression est alors :

$$[T] = \left[km^{\alpha}l^{\beta}g^{\gamma}\right] \Rightarrow T = M^{\alpha}L^{\beta}L^{\gamma}T^{-2\gamma} \Rightarrow T = M^{\alpha}L^{\beta+\gamma}T^{-2\gamma}$$

Cette équation doit être homogène, il en résulte les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\gamma = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La relation devient alors:

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Cette analyse montre que la période du pendule ne dépend pas de sa masse. La valeur de constante k dépend du système d'unités choisi et vaut 2π dans le S.I.

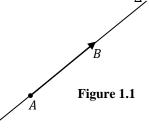
3- CALCUL VECTORIEL

Beaucoup de grandeurs physiques sont représentées par des vecteurs. Il est donc plus que nécessaire d'étudier leurs propriétés. Nous abordons en premier lieu les vecteurs constants et par la suite les champs vectoriels.

3-1. Définition d'un vecteur

Un vecteur est un segment de droite AB. Il est complètement défini si l'on se donne :

- Son origine ou point d'application qui est le point *A* ;
- Sa direction qui est celle de la droite (Δ), dite aussi support ;
- Son sens qui est symbolisé par la flèche indiquant que ce sens va du point A vers le point B;
- Son module ou intensité qui est égal à la longueur AB.



Ces caractéristiques sont représentées sur la figure 1.1.

On note symboliquement un vecteur par \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{A} , \overrightarrow{B} , \overrightarrow{U} , \overrightarrow{V} , \overrightarrow{OM} .

Deux vecteurs d'origines différentes sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, même sens et même module.

Le module ou l'intensité du vecteur \vec{V} est représenté par $||\vec{V}||$ ou V, c'est une grandeur positive.

Il existe plusieurs types de vecteurs :

- Vecteur libre : si son origine n'est pas spécifiée ;
- Vecteur glissant : si son point d'application peut être quelconque sur un support ;
- Vecteur lié ou fixe : lorsque son origine est déterminée ;

Un vecteur est dit unitaire si son module est égal à l'unité. On peut alors exprimer tout vecteur \vec{V} sous la forme :

$$\vec{V} = \|\vec{V}\|\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$

où \vec{v} est le vecteur unitaire porté par le vecteur \vec{V} (Fig. 1.2).

3-2. Somme vectorielle

Soient $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ deux vecteurs. Leur somme géométrique (dite aussi résultante) est aussi un vecteur :

$$\vec{S} = \vec{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$$

On obtient cette somme en utilisant la règle du parallélogramme ou du triangle, comme indiquée sur la figure 1.3.

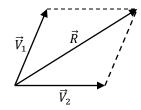


Figure 1.2

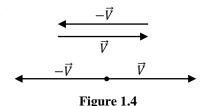
Figure 1.3

La règle du triangle consiste, dans un premier temps, à joindre l'extrémité du premier vecteur avec l'origine du second et ensuite, à joindre l'origine du premier vecteur avec l'extrémité du second.

Le vecteur nulle $\vec{0}$ est le vecteur de module égal à 0 et qui ne possède aucune direction :

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$$

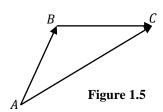
Le vecteur opposé à un vecteur \vec{V} est le vecteur noté $(-\vec{V})$, tel que $\vec{V}+(-\vec{V})=\vec{0}$. Ce vecteur est de même module et direction que \vec{V} mais de sens opposé. Les vecteurs \vec{V} et $(-\vec{V})$ sont dits directement opposés lorsqu'ils sont portés par le même support. Les deux situations sont représentées sur la figure 1.4.



La règle de Chasles permet de décomposer n'importe quel vecteur comme la somme de deux ou plusieurs vecteurs en introduisant des points intermédiaires :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

La figure 1.5 représente cette somme.

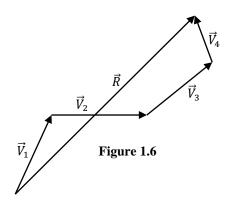


On peut également faire la somme de plusieurs vecteurs. Cette somme peut être calculée de deux manières :

- Sommer les vecteurs deux à deux ;
- Joindre l'extrémité de chaque vecteur par l'origine du vecteur suivant et ensuite, on joint l'origine du premier vecteur avec l'extrémité du dernier.

La figure 1.6 représente la somme géométrique de quatre vecteurs :

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4$$



3-3. Soustraction vectorielle

La différence ou soustraction entre deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ se ramène à une somme entre $\overrightarrow{V_1}$ et l'opposé de $\overrightarrow{V_2}$:

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} + \left(-\overrightarrow{V_2} \right)$$

La figure 1.7 représente la différence $\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}$.

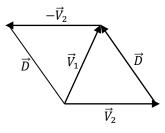


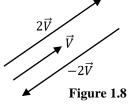
Figure 1.7

3-4. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit \vec{V} un vecteur et λ un nombre réel. Le produit $(\lambda \vec{V})$ est un vecteur de même origine, même direction que \vec{V} , mais :

- de module égal à $|\lambda| ||\vec{V}||$.
- de même sens que \vec{V} si $\lambda > 0$ et de sens opposé si $\lambda < 0$.

La figure 1.8 illustre le produit entre un vecteur \vec{V} et les nombres (+2) et (-2).



La multiplication d'un vecteur par un scalaire permet aussi de définir la notion de deux vecteurs colinéaires : les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont dit colinéaires si $\overrightarrow{V_1} = \lambda \overrightarrow{V_2}$ et on note $\overrightarrow{V_1} / / \overrightarrow{V_2}$. Ils sont dits parallèles si $\lambda > 0$ et antiparallèles si $\lambda < 0$.

3-5. Composantes d'un vecteur

Soit \vec{V} un vecteur dans un plan. En utilisant la règle du parallélogramme, il est facile de montrer que \vec{V} est la somme de deux vecteurs orthogonaux :

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y}$$

Les directions des vecteurs $\overrightarrow{V_X}$ et $\overrightarrow{V_y}$ définissent deux axes (X'X) et (Y'Y). Ces axes associés au point O (leur intersection dit l'origine), définissent ce qu'on appelle un repère d'espace. Il est noté $\mathcal{R}(OXY)$. Ce repère est dans le plan. Il est facile de définir un repère dans l'espace en introduisant un troisième axe (Z'Z) perpendiculaire simultanément aux deux autres. Dans ce cas, on le note $\mathcal{R}(OXYZ)$ et le vecteur \overrightarrow{V} s'écrit :

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z}$$

Soient \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs unitaires portés par les axes (X'X), (Y'Y) et (Z'Z), respectivement. Alors, on peut écrire :

$$\overrightarrow{V_x} = V_x \overrightarrow{i}$$
; $\overrightarrow{V_y} = V_y \overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{V_z} = V_z \overrightarrow{k}$

Il est clair alors que:

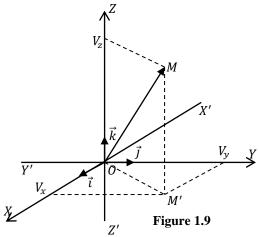
$$\vec{V} = V_x \vec{\imath} + V_y \vec{\jmath} + V_z \vec{k}$$

Le triplet (V_x, V_y, V_z) est dit composantes cartésiennes du vecteur \vec{V} . Le triplet $(\vec{\iota}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dit base cartésienne du repère ou base des coordonnées cartésiennes. Le système de coordonnées ainsi définit est appelée « système des coordonnées cartésiennes ». On le note $\mathcal{R}(0, \vec{\iota}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On représente généralement un vecteur \vec{V} par ses composantes et on le note $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ ou $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$.

La figure 1.9 représente le système des coordonnées cartésiennes ainsi que les composantes du vecteur \vec{V} .

Le système de coordonnées qu'on vient de définir est dit orthonormé car :



$$\begin{cases} ||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{j}|| = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \end{cases}$$

Si M est l'extrémité de \vec{V} , on peut écrire $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$. On obtient les composantes du vecteur \vec{V} en effectuant des projections orthogonales du point M:

- Sur l'axe (Z'Z), ce qui donne la composante V_z ;
- Dans le plan (OXY), ce qui donne le point M'. Les projections orthogonales de ce dernier sur les axes (X'X) et (Y'Y) donne finalement les composantes V_X et V_Y , respectivement.

La notion de composante est essentielle car elle permet de faire des calculs avec les vecteurs. En effet :

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_x + V_x)\vec{\imath} + (U_y + V_y)\vec{\jmath} + (U_z + V_z)\vec{k}$$

$$\vec{U} - \vec{V} = (U_x - V_x)\vec{\imath} + (U_y - V_y)\vec{\jmath} + (U_z - V_z)\vec{k}$$

$$\lambda \vec{V} = (\lambda V_x)\vec{\imath} + (\lambda V_y)\vec{\jmath} + (\lambda V_z)\vec{k}$$

Remarques:

- Il faut distinguer la composante d'un vecteur qui est une grandeur scalaire algébrique (positive ou négative) et le module d'un vecteur qui est une grandeur scalaire toujours positive.
- Il existe d'autres systèmes de coordonnées qui seront introduits dans le chapitre suivant (la cinématique).

Exemple:

Soient les deux vecteurs suivants : $\vec{U} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$; $\vec{V} = -\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 7\vec{k}$

Evaluons les opérations suivantes :

$$\vec{U} + \vec{V} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{U} - \vec{V} = 3\vec{i} - 11\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$-2\vec{V} = -2\vec{i} - 16\vec{j} + 14\vec{k}$$

$$3\vec{U} - 2\vec{V} = (6\vec{i} - 9\vec{j} + 15\vec{k}) - (-2\vec{i} + 16\vec{j} - 14\vec{k}) = 8\vec{i} - 25\vec{j} + 29\vec{k}$$

3-6. Produit scalaire

3-6.1. Définition

Le produit scalaire entre deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} est un scalaire définit comme suit :

$$\vec{U}.\vec{V} = \left\| \vec{U} \right\| \left\| \vec{V} \right\| \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les vecteurs \overrightarrow{U} et \overrightarrow{V}

Comme son nom l'indique, le produit scalaire entre deux vecteurs donne un scalaire, c'est-à-dire, un nombre réel qui peut être positif ($\cos \theta > 0$), négatif ($\cos \theta < 0$) ou nul ($\cos \theta = 0$).

3-6.2. Propriétés

Le produit scalaire possède les propriétés suivantes :

- Commutativité : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
- Distributivité par rapport à l'addition vectorielle (linéarité):

$$\vec{U}.(\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U}.\vec{V}) + (\vec{U}.\vec{W})$$

• Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{U}.\vec{V}) = (\lambda \vec{U}).\vec{V} = \vec{U}.(\lambda \vec{V})$$
$$(\lambda_1 \vec{U}).(\lambda_2 \vec{V}) = (\lambda_1 \lambda_2)(\vec{U}.\vec{V})$$

• Si \vec{U} // \vec{V} $\Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi \Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = \pm UV$

3-6.3. Conséquences

- Le produit scalaire permet de définir un critère d'orthogonalité entre deux vecteurs. En effet :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{U} = \vec{0} \text{ ou } \vec{V} = \vec{0} \text{ ou } \vec{U} \perp \vec{V} \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$$

- Les produits scalaires entre les vecteurs de la base cartésienne orthonormée sont donnés par :

$$\vec{\iota}.\vec{\iota} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$
$$\vec{\iota}.\vec{\jmath} = \vec{\iota}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0$$

- Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même donne le carré de son module :

$$\vec{U}.\vec{U} = UU = U^2 = \left\|\vec{U}\right\|^2$$

Ce qui implique:

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U}.\,\vec{U}}$$

- Si $\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$ et $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ sont deux vecteurs, en utilisant les propriétés du produit scalaire, il est aisé d'établir que :

$$\vec{U}.\vec{V} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z$$

Ce résultat représente l'expression analytique du produit scalaire dans le système de coordonnées cartésiennes. Le module du vecteur \vec{V} est alors donnée par :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Exemple:

Soient les deux vecteurs suivants :

$$\vec{U} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$$
; $\vec{V} = -\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 7\vec{k}$

Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs et leurs modules :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U} = -2 - 24 - 35 = -61$$
$$\|\vec{U}\| = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$$
$$\|\vec{V}\| = \sqrt{1 + 64 + 49} = \sqrt{114}$$

Les composantes des vecteurs unitaires portés par ces deux vecteurs sont données par :

$$\vec{u} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|} = \frac{2}{\sqrt{38}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{38}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{38}}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = -\frac{1}{\sqrt{114}}\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{114}}\vec{j} - \frac{7}{\sqrt{114}}\vec{k}$$

3-7. Produit vectoriel

3-7.1. Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} est un vecteur noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$ (on utilise également le symbole \times):

- de module $\|\vec{U}\| \|\vec{V}\| |\sin \theta|$, où $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$;
- de direction perpendiculaire au plan défini par \vec{U} et \vec{V} ;
- de sens tel que le trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$ soit direct, c'est-à-dire, qu'il satisfait la règle du tire-bouchon de Maxwell : si on ramène le vecteur \vec{U} sur le vecteur \vec{V} , le sens du vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est celui d'un tire-bouchon vissé dans le même sens (Fig. 1.10).

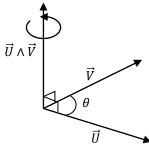


Figure 1.10

3-7.2. Propriétés

Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes :

- Il est anticommutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$
- Il n'est pas associatif : $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W} \neq \vec{U} \wedge (\vec{V}\vec{W})$
- Il est distributif par rapport à l'addition vectorielle :

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \wedge \vec{V}) + (\vec{U} \wedge \vec{W})$$

• Il est associatif par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{U} \wedge \vec{V}) = (\lambda \vec{U}) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge (\lambda \vec{V})$$

3-7.3. Conséquences

 Le produit vectoriel permet de vérifier si deux vecteurs sont colinéaires (parallèles ou antiparallèles):

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \vec{U} = \vec{0} \vee \vec{V} = \vec{0} \vee \sin \theta = 0 \ (\theta = 0, \pi) \left(\vec{U} \ / / \vec{V} \right)$$

Le produit vectoriel permet de définir le caractère direct d'une base. Une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe si et seulement si :

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$$

Ainsi, la base des coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe si seulement si : $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$

Les produits vectoriels entre les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont donnés par :

$$\vec{\iota} \wedge \vec{\iota} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{\iota} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\iota}, \vec{k} \wedge \vec{\iota} = \vec{\jmath}$$

Ce dernier résultat peut être obtenu par permutation circulaire des vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} (Fig. 1.11).

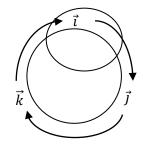


Figure 1.11

- Si $\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$ et $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ sont deux vecteurs, en utilisant les propriétés du produit vectoriel, il est aisé d'établir que :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \left(U_y V_z - U_z V_y \right) \vec{\iota} - \left(U_x V_z - U_z V_x \right) \vec{\jmath} + \left(U_x V_y - U_y V_x \right) \vec{k}$$

qui représente l'expression analytique du produit vectoriel dans le système de coordonnées cartésiennes. Cette expression peut être obtenue autrement en utilisant la notion de déterminant :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_y & U_z \\ V_y & V_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} U_x & U_z \\ V_x & V_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (U_{y}V_{z} - U_{z}V_{y})\vec{i} - (U_{x}V_{z} - U_{z}V_{x})\vec{j} + (U_{x}V_{y} - U_{y}V_{x})\vec{k}$$

Exemple:

Calculons le produit vectoriel entre les deux vecteurs suivants :

$$\vec{U} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$
; $\vec{V} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$$

3-7.4. Interprétation géométrique

Géométriquement, le module du produit vectoriel entre deux vecteurs est égal à l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs (Fig. 1.12).

$$S = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| |\sin \theta| = \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|$$

Ce résultat permet de déduire l'aire $S^{'}$ du triangle ABC:

$$S' = \frac{1}{2} \left\| \vec{U} \wedge \vec{V} \right\|$$

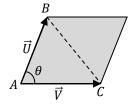


Figure 1.12

3-8. Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs \vec{U}, \vec{V} et \vec{W} , pris dans cet ordre, le nombre réel défini par :

$$\vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W})$$

Ce produit est donc un scalaire. Il est nul si :

- L'un des vecteurs est nul ;
- Les trois vecteurs sont dans le même plan (coplanaires);
- Deux vecteurs sont colinéaires.

On note
$$\vec{U}$$
. $(\vec{V} \land \vec{W})$ par $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire direct des trois vecteurs \vec{U} , \vec{V} et \vec{W} , car le produit scalaire est commutatif:

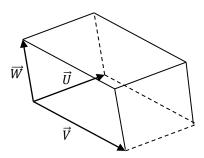


Figure 1.13

$$\left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V},\overrightarrow{W}\right)=\left(\overrightarrow{W},\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}\right)=\left(\overrightarrow{V},\overrightarrow{W},\overrightarrow{U}\right)$$

Géométriquement, la valeur absolue du produit mixte est égale au volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs (Fig. 1.13).

Exemple:

Calculons le produit mixte des trois vecteurs suivant :

$$\vec{U}(1,-1,2)$$
; $\vec{V}(-2,1,1)$; $\vec{W}(1,2,-1)$

Ce produit peut être calculé en deux étapes :

$$(\vec{V} \wedge \vec{W}) = -3\vec{\iota} - \vec{\jmath} - 5\vec{k}$$

$$\vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) = -3 + 1 - 10 = -12$$

3-9. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ et \overrightarrow{W} , pris dans cet ordre, est le vecteur définit par :

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W})$$

D'après la définition du double produit vectoriel, il est clair qu'il est perpendiculaire au vecteurs \vec{U} et $(\vec{V} \wedge \vec{W})$, ce qui implique que ce vecteur est dans le plan formé par les vecteurs \vec{V} et \vec{W} :

$$\vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W} \right) = \alpha \vec{V} + \beta \vec{W} \left(\alpha, \beta \in R \right)$$

On montre alors que:

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{W} \; \; ; \; \; (\alpha = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \, , \beta = -(\vec{U} \cdot \vec{V}) \,)$$

Exemple:

Calculons le double produit vectoriel des trois vecteurs suivant :

$$\vec{U}(1,-1.2): \vec{V}(-2.1.1): \vec{W}(1.2,-1)$$

Ce produit peut être calculé en deux étapes :

$$(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}) = -3\overrightarrow{\iota} - \overrightarrow{\jmath} - 5\overrightarrow{k}$$

$$\vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W} \right) = 7\vec{\imath} - \vec{J} - 4\vec{k}$$

3-10. Dérivée d'un vecteur

3-10.1. Définition

Soit $\vec{V}(t)$ une fonction vectorielle (champ vectoriel) d'une seule variable réelle t. Analytiquement, dans un repère \mathcal{R} muni d'une base cartésienne orthonormée $(\vec{\iota}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, cela veut

dire que l'on se donne trois fonctions scalaires $V_x(t)$, $V_y(t)$, $V_z(t)$ de la variable t qui sont les composantes du vecteur $\vec{V}(t)$:

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{j} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$$

Notons que toutes les propriétés et opérations définies pour les vecteurs constants sont aussi valables pour les champs vectoriels. En plus, nous pouvons également définir la dérivée de $\vec{V}(t)$ par rapport à la variable t comme suit :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z(t)}{dt}\vec{j}$$

Ce résultat est obtenu par simple application des règles de dérivation usuelles, dans la condition où les vecteurs unitaires \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont constants, c'est-à-dire, indépendants de t:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{o}$$

On voit bien que la dérivée d'un vecteur est également un vecteur.

La dérivée seconde de $\vec{V}(t)$ est alors donnée par :

$$\frac{d^{2}\vec{V}(t)}{dt^{2}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{V}(t)}{dt} \right) = \frac{d^{2}V_{x}(t)}{dt^{2}} \vec{i} + \frac{d^{2}V_{y}(t)}{dt^{2}} \vec{j} + \frac{d^{2}V_{z}(t)}{dt^{2}} \vec{k}$$

Si le vecteur \vec{V} est constant (ses composantes sont constantes), sa dérivée est le vecteur nul.

Exemples:

Calculons la première et seconde dérivée des vecteurs suivants :

$$\vec{V}(t) = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{\imath} + (2t+1)\vec{\jmath} + (t^2 + t + 1)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = 2\vec{\jmath} + (2t+1)\vec{k} \\ \frac{d^2\vec{V}}{dt^2} = 2\vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{V}(t) = \cos(\omega t)\vec{\imath} + \sin(\omega t)\vec{\jmath} + e^{-\alpha t}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{V}}{dt} = -\omega\sin(\omega t)\vec{\imath} + \omega\cos(\omega t)\vec{\jmath} - \alpha e^{-\alpha t}\vec{k} \\ \frac{d^2\vec{V}}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t)\vec{\imath} - \omega^2\sin(\omega t)\vec{\jmath} + \alpha^2 e^{-\alpha t}\vec{k} \end{cases}$$

3-10.2. Propriétés

Si $\vec{U}(t)$ et $\vec{V}(t)$ sont deux champs vectorielles et f(t) est un champ scalaire de la variable réelle t, alors on a les propriétés suivantes :

$$\frac{d}{dt} (\alpha \vec{U} \mp \beta \vec{V}) = \alpha \frac{d\vec{U}}{dt} \mp \beta \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{U} \cdot \vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{U} \times \vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt} \times \vec{V} + \vec{U} \times \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (f(t)\vec{V}(t)) = \frac{df(t)}{dt} \vec{V}(t) + f(t) \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

Dans le cas où le vecteur $\vec{V}(t)$ a un module constant :

$$\left\| \vec{V} \right\|^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = cste \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{V} \cdot \vec{V}) = 0 \Rightarrow 2\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{V} \perp \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Donc, la dérivée d'un vecteur de module constant est un vecteur qui lui est perpendiculaire. Ce résultat est d'une grande importance lors de l'étude des systèmes des coordonnées polaires, cylindriques et sphériques en cinématique car, les bases correspondantes sont des fonctions vectorielles du temps mais de modules constants (vecteurs unitaires).

Exemple:

Soit le vecteur suivant :

$$\vec{V}(t) = \cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$$

Il est clair que le module de ce vecteur est constant (il est égal à 1), en d'autres termes, c'est un vecteur unitaire. Sa dérivée est le vecteur :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\sin t \,\vec{i} - \cos t \,\vec{j}$$

On vérifie bien que :

$$\vec{V}(t).\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$$

3-11. Intégration d'un vecteur

3-11.1. Définition

L'intégrale du champ vectoriel $\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{j} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$ est définie comme suit :

$$\int \vec{V}(t)dt = \left(\int V_x(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int V_y(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int V_z(t)dt\right)\vec{k} + \vec{V}_0$$

Ce résultat est obtenu par simple application des règles d'intégration usuelles, dans la condition où les vecteurs unitaires \vec{l} , \vec{j} et \vec{k} sont constants, c'est-à-dire, indépendants de t.

On voit bien que l'intégrale d'un vecteur est également un vecteur.

La constante d'intégration \vec{V}_0 est un vecteur constant déterminé à partir des conditions initiales (temps) ou aux limites (espace). Dans ce cas, on parle d'intégrale indéfinie.

Si $\vec{U}(t)$ et $\vec{V}(t)$ sont deux champs vectorielles de la variable réelle t et α une constante réelle, on a les propriétés suivantes :

$$\int [\vec{U}(t) \pm \vec{V}(t)] dt = \int \vec{U}(t) dt \pm \int \vec{V}(t) dt$$
$$\int \alpha \vec{U}(t) dt = \alpha \int \vec{U}(t) dt \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exemple:

Calculons l'intégrale du champ vectoriel $\vec{V}(t) = (t+1)\vec{\imath} + (e^{-t}-1)\vec{\jmath} + (\sin t)\vec{k}$:

$$\int \vec{V}dt = \int \left[(t+1)\vec{i} + (e^{-t} - 1)\vec{j} + (\sin t)\vec{k} \right]dt$$

$$= \left(\int (t+1)dt \right)\vec{i} + \left(\int (e^{-t} - 1)dt \right)\vec{j} + \left(\int (\sin t) \right)\vec{k} + \vec{V}_0$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2 + t \right)\vec{i} + (-e^{-t} - t)\vec{j} - (\cos t)\vec{k} + \vec{V}_0$$

Si $\vec{V}(t=0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_0 = \vec{j} + \vec{k}$. On a finalement :

$$\int \vec{V}dt = \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\vec{i} + (-e^{-t} - t + 1)\vec{j} - (\cos t + 1)\vec{k}$$

3-11.2. Intégrale définie

Si les bornes d'intégration sont données, on parle alors d'intégrale définie ou intégrale du champ vectoriel $\vec{V}(t)$ sur l'intervalle [a,b]:

$$\int_{a}^{b} \vec{V}(t)dt = \left(\int_{a}^{b} V_{x}(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int_{a}^{b} V_{y}(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int_{a}^{b} V_{z}(t)dt\right)\vec{k}$$

Si $\vec{U}(t)$ et $\vec{V}(t)$ sont deux champs vectorielles de la variable réelle t, on a les propriétés suivantes :

$$\int_{a}^{b} \left[\vec{U}(t) \pm \vec{V}(t) \right] dt = \int_{a}^{b} \vec{U}(t) dt \pm \int_{a}^{b} \vec{V}(t) dt$$

$$\int_{a}^{b} \alpha \vec{U}(t) dt = \alpha \int_{a}^{b} \vec{U}(t) dt \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\int_{a}^{b} \vec{U}(t) dt = \int_{a}^{c} \vec{U}(t) dt + \int_{c}^{b} \vec{U}(t) dt \quad (c \in [a, b[)])$$

Exemple:

Calculons l'intégrale définie suivante :

$$\int_{0}^{1} \left[(t+1)\vec{i} - (t^{2} + t)\vec{j} + (t^{3})\vec{k} \right] dt = \left(\int_{0}^{1} (t+1)dt \right) \vec{i} - \left(\int_{0}^{1} (t^{2} + t)dt \right) \vec{j} + \left(\int_{0}^{1} t^{3}dt \right) \vec{k}$$

$$\left[\frac{1}{2}t^{2} + t \right]_{0}^{1} \vec{i} - \left[\frac{1}{3}t^{3} + \frac{1}{2}t^{2} \right]_{0}^{1} \vec{j} + \left[\frac{1}{4}t^{4} \right]_{0}^{1} \vec{k} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{5}{6}\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}$$

3-12. Opérateurs différentiels vectoriels

3-12.1. Introduction

Ces opérateurs ont été introduits pour rendre compte de certaines caractéristiques et propriétés des champs vectoriels. Ils permettent également une écriture concise de certaines lois de la physique comme les équations de Maxwell.

Toutes les définitions ultérieures seront données dans un repère muni d'une base cartésienne orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$.

3-12.2. Dérivée partielle et différentielle totale

Lorsque la grandeur physique est un champ scalaire de plusieurs variables G(x,y,z,t), on définit la notion de dérivée partielle, c'est-à-dire, la dérivée par rapport à une seule variable. Cette dernière se calcule en considérant les autres variables comme des constantes, on la note comme suit :

$$\frac{\partial G}{\partial x}$$
, $\frac{\partial G}{\partial y}$, $\frac{\partial G}{\partial z}$, $\frac{\partial G}{\partial t}$

Pour calculer une dérivée partielle, on use des mêmes règles et propriétés que celles utilisées dans le calcul de la dérivée simple.

La différentielle totale de *G* est définie comme suit :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz + \frac{\partial G}{\partial t}dt$$

Exemple:

Calculons les dérivées partielles et la différentielle totale du champ scalaire suivant :

$$G(x, y, z) = xy^{2}z^{3}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = y^{2}z^{3} ; \frac{\partial G}{\partial y} = 2xyz^{3} ; \frac{\partial G}{\partial z} = 3xy^{2}z^{2}$$

$$df = (y^{2}z^{3})dx + (2xyz^{3})dy + (3xy^{2}z^{2})dz$$

Remarque:

On peut éventuellement définir les dérivées partielles d'ordre supérieures. Citons comme exemples, les dérivées partielles d'ordre deux :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) \; ; \; \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}$$

3-12.3. Gradient

Soit U(x, y, z) un champ scalaire. On sait que :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) =$$

$$\overline{grad}U.d\vec{r} = \vec{\nabla}U.\overrightarrow{dr}$$

où $\overrightarrow{\nabla}$ est l'opérateur nabla (ou del) défini comme suit :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

L'opérateur gradient s'applique sur un champ scalaire et donne un champ vectoriel

En divisant la relation $dU = \overrightarrow{grad}U.\overrightarrow{dr}$ par dr, on obtient la quantité :

$$\frac{dU}{dr} = \overrightarrow{grad}U.\overrightarrow{\frac{dr}{dr}} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{grad}U$$

où \vec{u} est le vecteur unitaire dans la direction \vec{r} , en effet :

$$\vec{u} = \frac{\vec{dr}}{dr} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Physiquement, la quantité (dU/dr) représente le taux de variation de U dans la direction $\vec{r} = r\vec{u}$. Ce taux est aussi égal à la projection du gradient du champ scalaire U suivant cette direction. Par conséquent, l'opérateur gradient d'un champ scalaire indique la direction de variation de ce champ.

Le vecteur gradient possède également les propriétés suivantes :

• Il est perpendiculaire aux surfaces de niveau (surface pour lesquelles *U* est une constante) :

$$dU = \overrightarrow{grad}U \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{grad}U \perp d\vec{r}$$

• Il est orienté dans le sens des valeurs croissantes du champ scalaire *U* et indique la direction de variation la plus rapide de ce champ.

Dans le système de coordonnées polaires, cylindriques et sphériques, l'opérateur gradient s'écrit comme suit :

$$\overline{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_{\theta}$$

$$\overline{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_{\theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overline{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_{\varphi}$$

La circulation du gradient le long d'une courbe orientée (\mathcal{C}) (allant de A à B, par exemple) est donnée par :

$$C_{AB} = \int_{A}^{B} \overrightarrow{grad}U \cdot d\vec{r} = \int_{U(A)}^{U(B)} dU = U(A) - U(B)$$

Cette circulation est égale à la variation du champ U et ne dépend pas du chemin parcouru. Cette relation facilite parfois le calcul de la circulation d'un vecteur le long du chemin. Encore faut-il que ce vecteur soit un gradient.

Dans le cas d'un contour fermé, la circulation est nulle :

$$C_{AA} = \oint \overrightarrow{grad}U.\,d\vec{r} = 0$$

On dit que le champ de vecteur $\overrightarrow{grad}U$ est à circulation conservative ou un champ à gradient et on écrit :

$$\vec{V} = -\overrightarrow{grad}U$$

On dit également que le champ de vecteur \vec{V} dérive d'un champ scalaire U (appelé généralement potentiel).

Exemple:

Calculons le gradient du champ scalaire suivant :

$$U(x,y,z) = 3xy - 2xz + 5yz \Rightarrow \overrightarrow{grad}U = (3y - 2z)\vec{i} + (3x + 5z)\vec{j} + (-2x + 5y)\vec{k}$$

3-12.4. Divergence

La divergence, notée div, du champ vectoriel $\vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\vec{i} + V_y(x,y,z)\vec{j} + V_z(x,y,z)\vec{k}$ est la quantité définie par le produit scalaire entre l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ et le champ de vecteur \vec{V} :

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

L'opérateur divergence s'applique sur un champ vectoriel et donne un champ scalaire.

Exemple:

Calculons la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x, y, z) = (xyz)\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} + (x^2y^2z^2)\vec{k} \Rightarrow div\vec{V} = yz + 1 + 2x^2y^2z$$

3-12.5. Rotationnel

Le rotationnel, noté \overrightarrow{rot} , du champ vectoriel $\overrightarrow{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\overrightarrow{i} + V_y(x,y,z)\overrightarrow{j} + V_z(x,y,z)\overrightarrow{k}$ est la quantité définie par le produit vectoriel entre l'opérateur nabla $\overrightarrow{\nabla}$ et le champ de vecteur \overrightarrow{V} :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) \wedge \left(V_x\overrightarrow{i} + V_y\overrightarrow{j} + V_z\overrightarrow{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Le rotationnel d'un champ vectoriel est également un champ vectoriel.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteur \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire U (c'est-à-dire $\vec{V}=-\overrightarrow{grad}U$) est que son rotationnel soit nul (le champ est dit irrotationnel). En effet, on montre que :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}U) = \overrightarrow{0}$$

Exemple:

Calculons le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (xy)\vec{i} + (xz)\vec{j} + (yz)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & yz \end{vmatrix} = (z - x)\overrightarrow{i} + (z - x)\overrightarrow{k} = (z - x)(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$$

3-12.6. Laplacien

Le gradient d'un champ scalaire U étant le vecteur :

$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \vec{A}$$

On peut calculer sa divergence:

$$div\vec{A} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

On définit ainsi un nouvel opérateur, le Laplacien :

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On peut également définir le Laplacien d'un champ de vecteurs :

$$\vec{V}(x, y, z) = V_x(x, y, z)\vec{i} + V_y(x, y, z)\vec{j} + V_z(x, y, z)\vec{k}$$

Dans ce cas, on montre que c'est un champ de vecteurs ayant pour composantes le Laplacien des composantes du champ de vecteurs \vec{V} :

$$\Delta \vec{V}(x, y, z) = \Delta V_x(x, y, z)\vec{i} + \Delta V_y(x, y, z)\vec{j} + \Delta V_z(x, y, z)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

Exemples:

Calculons le Laplacien des champs scalaire et vectorielle suivants :

$$U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \Delta U = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$\vec{V} = (x^2 + y^3 + z^4)\vec{i} + (x^3 + y^4 + z^3)\vec{j} + (x^4 + y^2 + z^3)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{V} = (2 + 6y + 12z^2)\vec{i} + (6x + 12y^2 + 6z)\vec{i} + (12x^2 + 2 + 6z)\vec{k}$$

3-12.7. Quelques propriétés des opérateurs différentiels vectoriels

Soient \vec{U} et \vec{V} deux champ vectoriels et f et g deux champs scalaires. On montre que :

$$\overline{grad}(fg) = f\overline{grad}g + g\overline{grad}f$$

$$div(\overline{grad}f) = \Delta f$$

$$div(\overline{rot}\overrightarrow{V}) = 0$$

$$div(f\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{V}.\overline{grad}f + fdiv\overrightarrow{V}$$

$$div(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{V}.\overline{rot}\overrightarrow{U} - \overrightarrow{U}.\overline{rot}\overrightarrow{V}$$

$$\overline{rot}(\overline{grad}f) = \overrightarrow{0}$$

$$\overline{rot}(f\overrightarrow{V}) = \overline{grad}f \wedge \overrightarrow{V} + f\overline{rot}\overrightarrow{V}$$

$$\overline{rot}(\overline{rot}\overrightarrow{V}) = \overline{grad}(div\overrightarrow{V}) - \Delta \overrightarrow{V}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{grad}f) = \overline{grad}(\frac{\partial f}{\partial t}) \; ; \; \frac{\partial}{\partial t}(div\overrightarrow{V}) = div(\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t}) \; ; \; \frac{\partial}{\partial t}(\overline{rot}\overrightarrow{V}) = \overline{rot}(\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t})$$