

CHAPITRE 2

CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

1- DEFINITION DE LA CINEMATIQUE

La cinématique est l'étude du mouvement d'un corps en fonction du temps, indépendamment de toute cause pouvant le provoquer ou le modifier. L'objet de la cinématique est la description mathématique du mouvement à partir des notions de position (rayon vecteur), de trajectoire (vecteur déplacement) et des vecteurs vitesse et accélération en fonction du temps, par rapport à un repère d'espace. Dans ce qui suit, nous représenterons les corps matériel en mouvement comme des points géométriques (on néglige leur extension spatiale). Nous reviendrons avec plus de détails sur cette approximation dans le chapitre consacré à la dynamique.

2- NECESSITE D'UN REFERENTIEL

L'étude du mouvement d'un corps matériel implique nécessairement la présence simultanée de ce corps et d'un observateur qui analyse son mouvement. L'observateur est le pilier de l'étude du mouvement car selon sa position par rapport à l'objet en mouvement ses conclusions quant à la nature du mouvement seront très variables. Un mouvement est donc toujours lié à un observateur. On dit qu'il est relatif. Il est donc nécessaire de définir ce que l'on appelle un référentiel ou solide de référence dans lequel l'observateur est fixe. On entend par solide de référence un ensemble de points fixes les uns par rapport aux autres.

Pour caractériser le mouvement de l'objet, l'observateur a ensuite besoin de se repérer dans l'espace qui l'environne. Il lui faut, pour déterminer la nature du mouvement, connaître la position du corps au cours du temps. Pour ce faire ; il choisit :

- Un repère d'espace : défini par une origine O qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence (XYZ) qui permettent à l'observateur de juger dans quelle direction se déplace l'objet. Ces axes sont liés au référentiel. En toute logique, l'origine O du repère doit être placée sur l'observateur. Pour un référentiel donné, il existe autant de repères d'espace que de choix d'origine et d'axes possibles, c'est-à-dire, une infinité. Par contre, à un repère d'espace donné ne correspond qu'un seul référentiel, constitué par tout ce qui est fixe par rapport à ce repère.
- Un repère de temps, c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. Cette variable est continue et croissante, ce qui traduit l'irréversibilité du temps. Elle est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre à partir d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire (échelle du temps) fixant une chronologie. L'unité du temps étant la seconde dans le système international. Il est naturel d'adopter comme origine (instant initial), l'instant pour lequel le mouvement de l'objet est connu ; les instants ultérieurs correspondent alors à une évolution vers le futur où le mouvement est encore inconnu. À chaque instant, on associe un nombre réel appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que :

- Le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres ;
- Les longueurs et les durées de temps sont absolues, c'est-à-dire, indépendantes du référentiel choisi pour décrire le mouvement.

Un référentiel est représenté par le symbole $\mathcal{R}$ associé à un repère d'espace et de temps. La notation suivante est d'usage courant : $\mathcal{R}(OXYZt)$ ou $\mathcal{R}(OXYZ)$

3- VECTEUR POSITION DANS LES DIFFERENTS SYSTEMES DE COORDONNEES

3-1. Vecteur position

La position d'un point M dans un référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O en fonction du temps t , est donnée par son vecteur position ou rayon vecteur :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

3-2. Vecteur déplacement

Si le point M se déplace de la position $M(t)$ à la position $M(t')$, pendant un intervalle de temps $\Delta t = t' - t$, alors le vecteur déplacement moyen est défini par :

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t') - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) = \Delta \overrightarrow{OM}$$

Le vecteur déplacement élémentaire s'obtient pour des intervalles de temps infinitésimaux ($\Delta t \rightarrow 0$) :

$$d\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)] = d\overrightarrow{OM}(t)$$

3-3. Trajectoire

La trajectoire est l'ensemble de toutes les positions successivement occupées par un corps lors de son déplacement (mouvement). Géométriquement, la trajectoire est une courbe. La trajectoire peut avoir ou non une réalité matérielle. Elle peut aussi être ouverte ou fermée.

Exemple : trajectoire rectiligne (ligne droite), circulaire...etc.

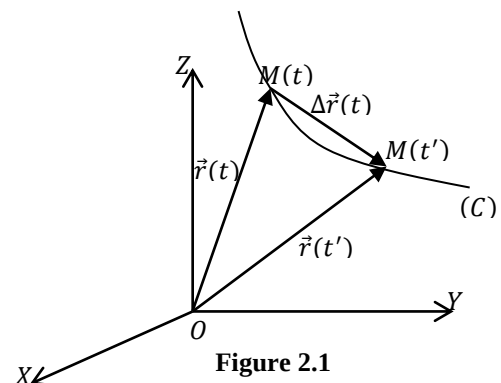


Figure 2.1

Dans la figure 2.1, on a représenté la trajectoire, les vecteurs position et déplacement d'un point M .

3-4. Systèmes de coordonnées

Ils sont utilisés pour la description mathématique du mouvement, ils attribuent des valeurs numériques à la position d'un corps. On les appelle également base de projection. De ce fait, le mouvement d'un corps peut être décrit par une ou plusieurs fonctions du temps (coordonnées), résultat de la projection du vecteur position sur cette base.

Divers systèmes de coordonnées peuvent être utilisés. Un même mouvement peut être décrit dans différents systèmes de coordonnées. Le choix judicieux d'un système de coordonnées peut souvent faciliter la résolution d'un problème. Ce choix repose généralement sur des considérations de symétrie.

Il est important de noter que suivant le choix effectué, la base utilisée, comme outil mathématique, peut être fixe ou mobile dans le référentiel donné. Ceci a des conséquences

importantes sur la dérivation des vecteurs. Pour éviter toute erreur ou confusion, on notera, à chaque fois qu'une étude est entreprise, le choix de la base en précisant si elle est fixe ou pas. Dans ce qui suit, on considère toujours des bases orthonormées et directes.

3-4.1. Système de coordonnées cartésiennes

Ce système de coordonnées a été déjà introduit dans le chapitre précédent.

Le vecteur position du point M est donnée par :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

On le note également par : $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ représentent les équations horaires ou paramétriques du mouvement de M .

Le module du vecteur position est :

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

En différentiant le vecteur position, on obtient le vecteur déplacement élémentaire :

$$d\vec{r}(t) = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k}$$

Le module de ce vecteur donne l'élément de longueur :

$$dl = \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2}$$

3-4.2. Système de coordonnées polaires

La symétrie polaire consiste à privilégier un point O fixe autour duquel tourne le point M . Si le vecteur position du point M en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

On peut introduire, dans le plan (OXY) , les paramètres ρ et θ , tels que :

$$\begin{aligned} \rho^2(t) &= x^2(t) + y^2(t) \\ \theta(t) &= (OX, \rho(t)). \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = \rho(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

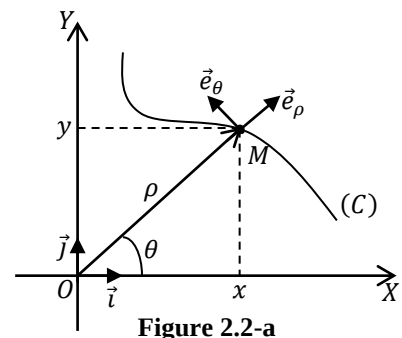


Figure 2.2-a

Par définition, ρ est une distance et est donc positif. On peut noter alors que pour décrire la totalité des points du plan, l'angle θ doit décrire un segment d'amplitude 2π . Habituellement on prend θ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Ainsi, on peut repérer invariablement le point M par ses coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ ou par les coordonnées $(\rho(t), \theta(t))$ dites polaires ; qui deviennent les équations horaires du mouvement.

Les coordonnées polaires du point M sont schématisées sur la figure 2.2-a.

Le système de coordonnées polaires est donc défini dans le plan, dont les coordonnées sont la distance ρ du point M à l'origine (pôle) et l'angle θ (angle polaire) entre le vecteur position et une direction de référence (axe polaire ; sens positif de l'axe (OX) par exemple).

On peut également exprimer les coordonnées polaires en fonction des coordonnées cartésiennes :

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\tan \theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \Rightarrow \theta(t) = \tan^{-1} \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right) [\pi]$$

Comme pour les coordonnées cartésiennes, on définit une base pour les coordonnées polaires, qu'on note $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$, comme suit :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho} ; \vec{e}_\theta = \vec{e}_\rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

La seconde relation signifie que le vecteur unitaire $\vec{e}_\theta$ est obtenu par rotation d'un angle $(\pi/2)$ dans le plan à partir de $\vec{e}_\rho$.

Il est clair que les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de la position du point M , en d'autres termes, de l'angle θ . La base est alors dite locale ou mobile.

D'après la figure 2.2-b, les relations de passage entre les bases des coordonnées cartésiennes et polaires sont obtenues par de simples projections :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases} ; \begin{cases} \vec{i} = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{j} = \sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Dés lors, il nous est facile de calculer les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ par rapport à θ :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_\rho$$

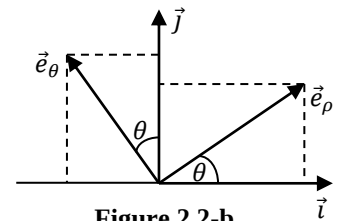


Figure 2.2-b

Il en résulte que les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ par rapport au temps sont données par :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho \quad \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \right)$$

D'après la figure 2-2.a, le vecteur position du point M en coordonnées polaires est donné par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho$$

et son module par :

$$\|\vec{r}(t)\| = \rho(t)$$

Le déplacement élémentaire se calcule par différentiation du vecteur position :

$$d\vec{r}(t) = d(\rho(t)\vec{e}_\rho) = d\rho(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)d(\vec{e}_\rho)$$

Or, on sait que :

$$\frac{d(\vec{e}_\rho)}{d\theta} = \vec{e}_\theta \Rightarrow d(\vec{e}_\rho) = d\theta\vec{e}_\theta$$

D'où :

$$d\vec{r}(t) = d(\rho(t)\vec{e}_\rho) = d\rho(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)d\theta\vec{e}_\theta$$

Il s'en suit que l'élément de longueur en coordonnées polaires est donné par :

$$dl = \sqrt{(d\rho(t))^2 + (\rho(t)d\theta)^2}$$

3-4.3. Système de coordonnées cylindriques

On généralise les coordonnées polaires par les coordonnées cylindriques en ajoutant le même axe (OZ) que pour les coordonnées cartésiennes. La symétrie cylindrique consiste à privilégier cet axe qui est souvent l'axe de symétrie du problème. Le point M est alors repéré par :

- Les coordonnées polaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$ de sa projection M' dans le plan (OXY) ;
- Sa coordonnée axiale $z(t)$.

Dans ce cas, les équations horaires sont :
$$\begin{cases} \rho(t) \\ \theta(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Les coordonnées cylindriques ne sont qu'une extension des coordonnées polaires au cas tridimensionnel. Les coordonnées cylindriques du point M sont schématisées sur la figure 2.3. D'après cette figure :

- Les relations de passage entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes sont données par :

$$\begin{cases} x = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y = \rho(t) \sin \theta(t) \\ z(t) \end{cases} ; \begin{cases} \rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \\ \theta(t) = \tan^{-1} \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right) \\ z(t) \end{cases}$$

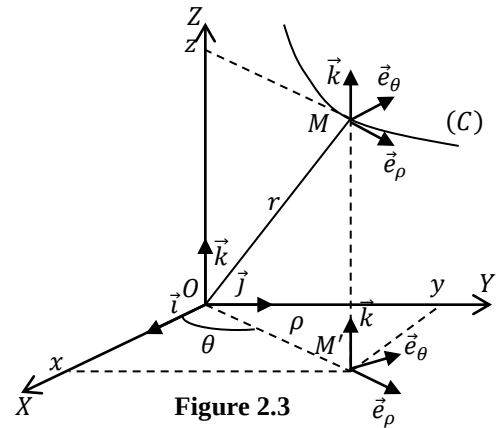


Figure 2.3

- La base des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ est définie comme suit :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho} ; \vec{e}_\theta = \vec{e}_\rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) ; \vec{k} = \vec{k}$$

Il est clair que les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de la position du point M , en d'autres termes, de l'angle θ ($\vec{e}_\rho(\theta), \vec{e}_\theta(\theta)$), contrairement au vecteur $\vec{k}$ qui est constant. La base est alors dite locale ou mobile.

D'après les figures 2-2.b et 2.3, les relations de passage entre les bases des coordonnées cartésiennes et cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} ; \begin{cases} \vec{i} = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{j} = \sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$ et $\vec{k}$ par rapport à θ et leurs dérivées par rapport au temps sont données par :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_\rho, \quad \frac{d\vec{k}}{d\theta} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0} \quad \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \right)$$

D'après la figure 2.3, le vecteur position s'écrit comme suit:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho + z(t) \vec{k}$$

et son module par :

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{\rho^2(t) + z^2(t)}$$

En différentiant le vecteur position, on obtient le vecteur déplacement élémentaire :

$$d\vec{r}(t) = d\rho(t) \vec{e}_\rho + \rho(t) d\theta(t) \vec{e}_\theta + dz(t) \vec{k}$$

dont le module donne l'élément de longueur en coordonnées cylindriques :

$$dl = \sqrt{(d\rho(t))^2 + (\rho(t)d\theta)^2 + (dz(t))^2}$$

3-4.4. Système de coordonnées sphériques

La symétrie sphérique consiste à privilégier un point O et les rotations autour de ce point. Les coordonnées sphériques d'un point M sont :

- Sa distance à l'origine : $r = OM$ ($r \geq 0$);
- L'angle azimuthal : $\theta = (\vec{k}, \overrightarrow{OM})$ ($0 \leq \theta \leq \pi$);
- L'angle polaire φ , formé par la projection M' de M dans le plan (OXY) et l'axe (OX) : $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

Les coordonnées sphériques du point M sont schématisées sur la figure 2.4.

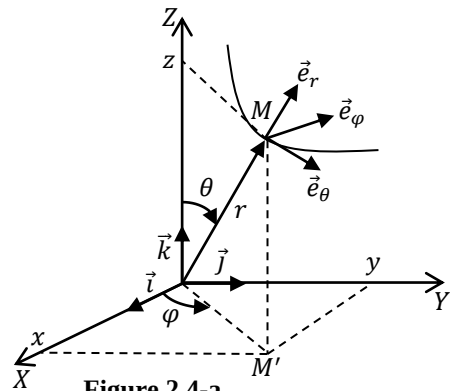


Figure 2.4-a

Dans ce cas, les équations horaires sont :

$$\begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{cases}$$

D'après la figure 2.4-a, les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et sphériques sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \varphi(t) \sin \theta(t) \\ y(t) = r(t) \sin \varphi(t) \sin \theta(t) \\ z(t) = r(t) \cos \theta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \\ \varphi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right) \\ \theta(t) = \cos^{-1} \left(\frac{z(t)}{r(t)} \right) \end{cases}$$

La base des coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{e}_\theta &= \vec{e}_\rho \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Cette base est orthonormée et directe, il s'en suit que $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$.

Il est clair que les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ dépendent de la position du point M , en d'autres termes, des angles θ et φ . La base sphérique est donc dite locale ou mobile.

Les relations de passage entre les bases des coordonnées cartésiennes et sphériques, d'après la figure 2.4-b, sont données par :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = (\sin \theta \cos \varphi) \vec{i} + (\sin \theta \sin \varphi) \vec{j} + (\cos \theta) \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi) \vec{i} + (\sin \varphi \cos \theta) \vec{j} + (-\sin \theta) \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi) \vec{i} + (\cos \varphi) \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{i} = (\sin \theta \cos \varphi) \vec{e}_r + (\cos \theta \cos \varphi) \vec{e}_\theta + (-\sin \varphi) \vec{e}_\varphi \\ \vec{j} = (\sin \theta \sin \varphi) \vec{e}_r + (\sin \varphi \cos \theta) \vec{e}_\theta + (\cos \varphi) \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = (\cos \theta) \vec{e}_r + (-\sin \theta) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

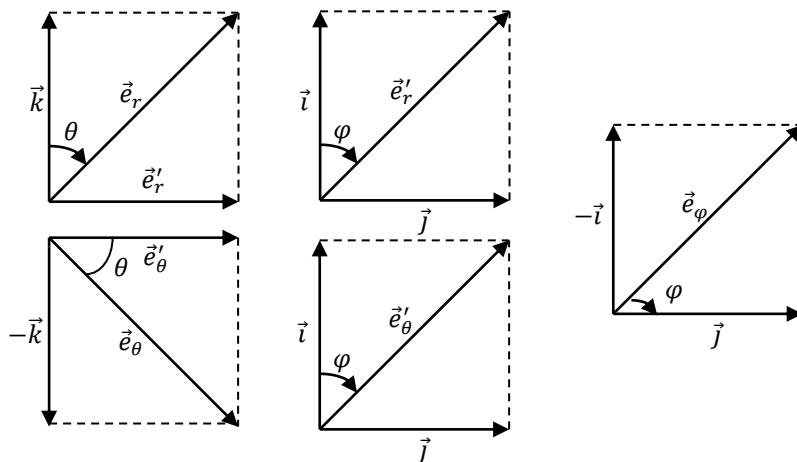


Figure 2.4-b

où $\vec{e}'_r$ et $\vec{e}'_\theta$ sont respectivement les projections des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans le plan (OXY).

Les dérivées des vecteurs de base $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ par rapport à θ et φ et leurs dérivées par rapport au temps sont alors données par

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} &= \vec{e}_\theta, & \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} &= -\vec{e}_r, & \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\theta} &= \vec{0} \\ \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} &= \sin \varphi \vec{e}_\varphi, & \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} &= \cos \varphi \vec{e}_r, & \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} &= -(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta + \dot{\varphi}(t) \sin \theta(t) \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\theta}(t) \vec{e}_r + \dot{\varphi}(t) \cos \theta(t) \vec{e}_\varphi,$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(t) [\sin \theta(t) \vec{e}_r + \cos \theta(t) \vec{e}_\theta]$$

D'après la figure 2.4, le vecteur position s'écrit comme suit:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{e}_r$$

et son module par :

$$\|\vec{r}(t)\| = r(t)$$

En différentiant le vecteur position, on obtient le vecteur déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dr}(t) = dr(t) \vec{e}_r + r(t) d\theta(t) \vec{e}_\theta + r(t) \sin \theta(t) d\varphi(t) \vec{e}_\varphi$$

dont le module donne l'élément de longueur en coordonnées sphériques :

$$\|\overrightarrow{dr}(t)\| = \sqrt{[dr(t)]^2 + [r(t)d\theta(t)]^2 + [r(t) \sin \theta(t) d\varphi(t)]^2}$$

3-4.5. Système de coordonnées curvilignes

Le terme curviligne signifie ligne courbée ou tout simplement courbe. Ce système est dit également système de coordonnées intrinsèques.

Si la trajectoire d'un point M est connue on peut :

- L'orienter dans un sens arbitraire ;
- Choisir un point origine M_0 fixe sur cette trajectoire ;
- Choisir une unité graphique.

La valeur algébrique de l'arc $(\widehat{M_0M})$ est l'abscisse curviligne $s(t)$ du point M à un instant t (Fig. 2.5-a).

Exemple: Sur une carte routière, les distances sont déterminées à partir des abscisses curvilignes. L'origine est le point kilométrique zéro et l'unité est le kilomètre.

Comme pour les autres systèmes, on peut définir également un repère curviligne (fig. 2.5-a) formé :

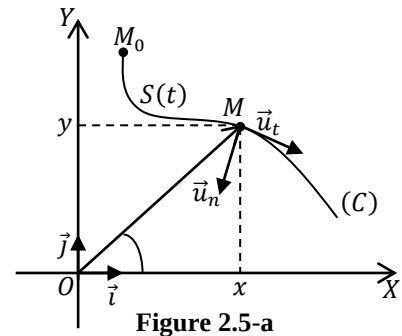


Figure 2.5-a

- d'un axe tangentiel (MT) muni du vecteur unitaire tangent $\vec{u}_t$ en M et orienté dans le sens du mouvement ;
- d'un axe normal (MN) muni du vecteur unitaire $\vec{u}_n$ perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et orienté vers le côté concave de la trajectoire.

Le vecteur $\vec{u}_t$ étant unitaire (de module égal à 1), on a :

$$\vec{u}_t \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} = 0$$

On en déduit que :

$$\vec{u}_t \perp \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

Donc le vecteur $\vec{u}_n$ est colinéaire à $\left(\frac{d\vec{u}_t}{dt} / \vec{u}_t\right)$.

Soit un cercle tangent à la trajectoire en M de centre O et de rayon R_c .

Si M et M' sont deux points très proches, on a d'après la figure 2.5-b :

$$\overline{MM'} = R_c d\alpha = ds$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{d\vec{u}_t}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds}$$

Sachant que :

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\alpha} = \vec{u}_n$$

on obtient :

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{1}{R_c} \vec{u}_n$$

où :

$$\frac{1}{R_c} = \frac{d\alpha}{ds} = \left\| \frac{d\vec{u}_t}{ds} \right\|$$

La quantité R_c (qu'on note également ρ ou ρ_c) est appelée rayon de courbure de la trajectoire au point M .

Le repère $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$ est un repère local défini au point M . C'est le repère de Frénet – Serret. C'est un repère intrinsèque qui ne dépend que de la trajectoire et des caractéristiques cinématiques du mouvement.

Remarques :

- Le plan $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$ est dit plan tangent ou osculateur.
- Si la trajectoire est suffisamment régulière, il y a toujours un cercle et un seul qui lui est tangent; R_c est alors son rayon.

4- VECTEURS VITESSE ET ACCELERATION DANS LES DIFFERENTS SYSTEMES DE COORDONNEES

4-1. Vecteur vitesse

La vitesse est une grandeur vectorielle qui, à chaque instant, caractérise les variations du vecteur position d'un corps. On distingue la vitesse moyenne et la vitesse instantanée.

Si $\vec{r}(t)$ est la position d'un point M à un instant t et $\vec{r}(t')$ sa position à un instant t' , la vitesse moyenne (Fig. 2.6), dans l'intervalle de temps $\Delta t = t' - t$, est définie par :

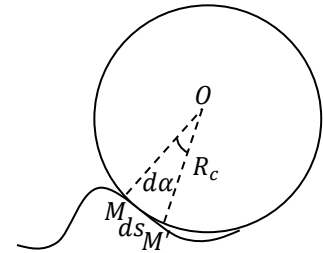


Figure 2.5-b

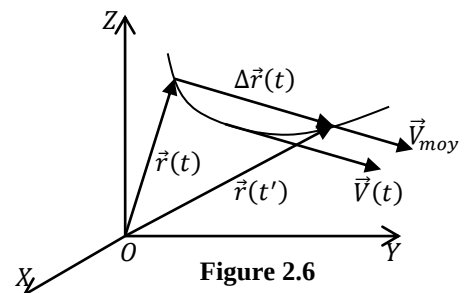


Figure 2.6

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Comme pour le déplacement élémentaire, la vitesse instantanée (voir figure 2.6) est obtenue pour des intervalles de temps infinitésimaux ($\Delta t \rightarrow 0$) :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

Le vecteur vitesse instantanée est donc la dérivée première, par rapport au temps, du vecteur position. Ce vecteur est tangent à la trajectoire et il est orienté dans le sens du mouvement. L'unité de la vitesse est le mètre par seconde (m/s) dans le SI.

Le diagramme des vitesses est la représentation graphique des composantes du vecteur vitesse instantanée en fonction du temps.

4-2. Vecteur accélération

Le vecteur accélération décrit les variations du vecteur vitesse d'un corps. Comme pour la vitesse, on distingue l'accélération moyenne et l'accélération instantanée.

Si $\vec{v}(t)$ est la vitesse d'un point M à un instant t et $\vec{v}(t')$ sa vitesse à un instant t' , l'accélération moyenne (Fig. 2.7), dans l'intervalle de temps $\Delta t = t' - t$, est définie par :

$$\vec{a}_{moy}(\vec{v}_{moy}) = \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

De la même manière, que la vitesse instantanée, l'accélération instantanée (Fig. 2.7) est définie par :

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Le vecteur accélération est donc la dérivée première du vecteur vitesse ou seconde du vecteur position par rapport au temps. Il est toujours orienté vers le côté concave de la trajectoire. L'unité de l'accélération est le mètre par seconde au carré (m/s^2) dans le SI.

Une augmentation de vitesse (accélération) ainsi qu'une diminution de vitesse (décélération) sont appelées accélération positive ou négative respectivement.

Les diagrammes des accélérations est la représentation graphique des composantes du vecteur vitesse instantanée en fonction du temps.

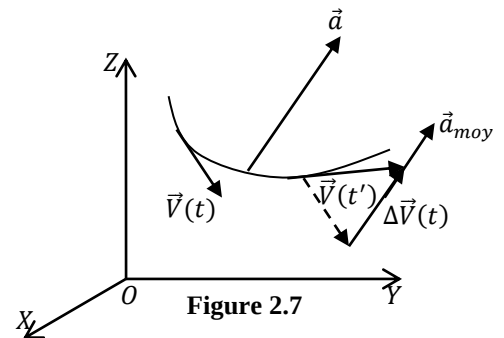


Figure 2.7

Remarques :

- Les vecteurs cinématiques (position, vitesse et accélération) permettent de comprendre la nature du mouvement et de prévoir ces différentes phases. Pour ce faire, on utilise le produit scalaire entre ces deux vecteurs :
 - a- Si $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$, alors le mouvement est dit accéléré ;
 - b- Si $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$, alors le mouvement est dit décéléré (retardé) ;

- c- Si $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$, alors le mouvement dit uniforme.
- Si on connaît le vecteur accélération, on peut obtenir les vecteurs vitesse et position par intégration :

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C}_1$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \vec{C}_2$$

où les vecteurs $\vec{C}_1$ et $\vec{C}_2$ sont des constantes d'intégration, qu'on détermine en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{r}(t = t_0) \\ \vec{v}_0 = \vec{v}(t = t_0) \end{cases}$$

où t_0 est un temps où la position et la vitesse du point M sont connues. Généralement, c'est l'instant initial (début du mouvement) qu'on prend égal à zéro.

- Les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération peuvent être positives ou négatives (grandeurs algébriques), contrairement à leurs modules qui sont des nombres réels strictement positifs.

4-3. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées cartésiennes

Le vecteur vitesse moyenne est donné par :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = v_{x,moy} \vec{i} + v_{y,moy} \vec{j} + v_{z,moy} \vec{k}$$

$$\|\vec{v}_{moy}\| = \sqrt{v_{x,moy}^2 + v_{y,moy}^2 + v_{z,moy}^2}$$

où :

$$\begin{cases} v_{x,moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_{y,moy} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ v_{z,moy} = \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$$

Le vecteur vitesse instantanée et son module sont donnés par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} = v_x(t) \vec{i} + v_y(t) \vec{j} + v_z(t) \vec{k}$$

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \\ v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t) \end{cases}$$

Le vecteur accélération moyenne et son module sont donnés par :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = a_{x,moy} \vec{i} + a_{y,moy} \vec{j} + a_{z,moy} \vec{k}$$

$$\|\vec{a}_{moy}\| = \sqrt{a_{x,moy}^2 + a_{y,moy}^2 + a_{z,moy}^2}$$

$$\begin{cases} a_{x,moy} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \\ a_{y,moy} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} \\ a_{z,moy} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \frac{v_z(t + \Delta t) - v_z(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

Le vecteur accélération instantanée et son module sont donnés par :

$$\vec{a}(t) = a_x(t) \vec{i} + a_y(t) \vec{j} + a_z(t) \vec{k} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \vec{k}$$

$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} \vec{k}$$

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \dot{v}_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \dot{v}_y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) \\ a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \dot{v}_z(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t) \end{cases}$$

4-4. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées polaires

En dérivant par rapport au temps le vecteur position, en tenant compte des dérivées des vecteurs de base $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ par rapport au temps, il est aisé d'établir que le vecteur vitesse est donné par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt} \vec{e}_\rho + \rho(t) \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho + \rho(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta = v_\rho(t) \vec{e}_\rho + v_\theta(t) \vec{e}_\theta$$

où le terme $v_\rho(t) = \dot{\rho}(t)$ représente la vitesse radiale et le terme $v_\theta(t) = \rho(t) \dot{\theta}(t)$ représente la vitesse orthoradiale. Le module du vecteur vitesse est alors donné par :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2(t) + \rho^2(t) \dot{\theta}^2(t)}$$

De même, le vecteur accélération (dérivée du vecteur vitesse) s'écrit comme suit :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\ddot{\rho}(t) - \rho(t) \dot{\theta}^2(t) \right) \vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}(t) \dot{\theta}(t) + \rho(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{e}_\theta = a_\rho(t) \vec{e}_\rho + a_\theta(t) \vec{e}_\theta$$

où le terme $a_\rho = \ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)$ représente l'accélération radiale et le terme $a_\theta(t) = 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)$ représente l'accélération orthoradiale. Le module du vecteur accélération est alors donné par :

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_\rho^2(t) + a_\theta^2(t)} = \sqrt{[\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)]^2 + [2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)]^2}$$

4-5. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées cylindriques

En dérivant par rapport au temps le vecteur position, en tenant compte des dérivées des vecteurs de base $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{k}$ par rapport au temps, il est aisé d'établir que le vecteur vitesse est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta + \dot{z}(t)\vec{k} \\ &= v_\rho(t)\vec{e}_\rho + v_\theta(t)\vec{e}_\theta + v_z(t)\vec{k}\end{aligned}$$

où le terme $v_\rho(t) = \dot{\rho}(t)$ représente la vitesse radiale, le terme $v_\theta(t) = \rho(t)\dot{\theta}(t)$ représente la vitesse orthoradiale et le terme $v_z(t) = \dot{z}(t)$ la vitesse axiale. Le module du vecteur vitesse est alors donné par :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2(t) + v_\theta^2(t) + v_z^2(t)} = \sqrt{(\dot{\rho}(t))^2 + (\rho(t)\dot{\theta}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$$

De même, le vecteur accélération (dérivée du vecteur vitesse) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)]\vec{e}_\rho + [\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t)]\vec{e}_\theta + \ddot{z}(t)\vec{k} \\ &= a_\rho(t)\vec{e}_\rho + a_\theta(t)\vec{e}_\theta + a_z(t)\vec{k}\end{aligned}$$

où le terme $a_\rho(t) = \ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)$ représente l'accélération radiale, le terme $a_\theta(t) = 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)$ représente l'accélération orthoradiale et le terme $a_z(t) = \ddot{z}(t)$ représente l'accélération axiale. Le module du vecteur accélération est alors donné par :

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_\rho^2(t) + a_\theta^2(t) + a_z^2(t)} = \sqrt{[\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)]^2 + [2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)]^2 + (\ddot{z}(t))^2}$$

4-6. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées sphériques

En dérivant par rapport au temps le vecteur position, en tenant compte des dérivées des vecteurs de base $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ par rapport au temps, il est aisé d'établir que le vecteur vitesse est donné par :

$$\vec{v}(t) = v_r(t)\vec{e}_r + v_\theta(t)\vec{e}_\theta + v_\varphi(t)\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} v_r(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \dot{r}(t) \\ v_\theta(t) = r(t) \frac{d\theta(t)}{dt} = r(t) \dot{\theta}(t) \\ v_\varphi(t) = r(t) \sin \theta(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} = r(t) \sin \theta(t) \dot{\varphi}(t) \end{cases}$$

où le terme $v_r(t)$ représente la vitesse radiale, le terme $v_\theta(t) = r(t) \dot{\theta}(t)$ représente la vitesse orthoradiale et le terme v_φ la vitesse azimutale. Le module du vecteur vitesse est alors donné par :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2(t) + v_\theta^2(t) + v_\varphi^2(t)} = \sqrt{(\dot{r}(t))^2 + (r(t) \dot{\theta}(t))^2 + (r(t) \sin \theta(t) \dot{\varphi}(t))^2}$$

De même, le vecteur accélération (dérivée du vecteur vitesse) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_r(t) \vec{e}_r + a_\theta(t) \vec{e}_\theta + a_\varphi(t) \vec{e}_\varphi \\ \begin{cases} a_r(t) = \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) - r(t) \dot{\varphi}^2(t) \sin^2 \theta(t) \\ a_\theta(t) = r(t) \ddot{\theta}(t) + 2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) - r(t) \dot{\varphi}^2(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) \\ a_\varphi(t) = r(t) \ddot{\varphi}(t) \sin \theta(t) + 2\dot{r}(t) \dot{\varphi}(t) \sin \theta(t) + 2r(t) \dot{\varphi}(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \end{cases} \end{aligned}$$

où le terme $a_r(t)$ représente l'accélération radiale, le terme $a_\theta(t)$ représente l'accélération orthoradiale et le terme $a_z(t)$ représente l'accélération azimutale. Le module du vecteur accélération est alors donné par :

$$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_r^2(t) + a_\theta^2(t) + a_\varphi^2(t)}$$

4-7. Vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées intrinsèques

On définit la vitesse curviligne (intrinsèque) par la relation :

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Comme le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, il s'écrit dans le repère de Frénet :

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{u}_t$$

où $v(t)$ est le module de la vitesse (qu'on a noté $\|\vec{v}(t)\|$). Dérivons cette expression par rapport au temps pour trouver l'accélération:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{u}_t + v(t) \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

Notons que :

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{ds} \frac{ds(t)}{dt}$$

Rappelons que :

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t)$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{1}{R_c} \vec{u}_n$$

Il en résulte l'expression explicite suivante de l'accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2(t)}{R_c} \vec{u}_n = a_t(t) \vec{u}_t + a_n(t) \vec{u}_n$$

$$\begin{cases} a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt} \\ a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R_c} \end{cases}$$

où a_t est la composante tangentielle de l'accélération et a_n sa composante normale.

Dans la figure 2.8, on a représenté les vecteurs vitesse et accélération d'un point M et leurs composantes dans la base intrinsèque.

Interprétation:

- La composante tangentielle $a_t(t)$ est liée au changement du module de la vitesse, c'est-à-dire, si le point M se déplace plus ou moins vite.
- Si cette accélération est nulle, le mouvement est uniforme ;
- Si cette accélération est constante, le mouvement est uniformément varié. Il est accéléré si $a_t > 0$ et décéléré si $a_t < 0$.
- La présence de R_c dans l'expression de l'accélération normale indique que la trajectoire est courbée. En conséquence, cette accélération mesure la variation de la direction du vecteur vitesse.
- Si le mouvement est rectiligne (trajectoire sous forme d'une ligne droite), il n'y a pas de variation de la direction du vecteur vitesse. Dans ce cas, le rayon de courbure R_c de la trajectoire est infini et de ce fait $a_n = 0$;
- Si le rayon de courbure R_c est constant, le mouvement est circulaire

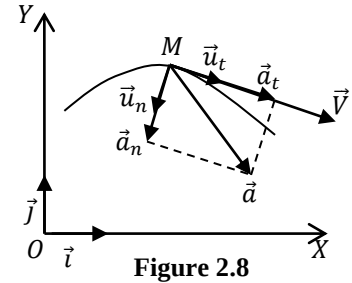


Figure 2.8

Remarques :

- Il est évident que si l'on connaît le rayon de courbure de la trajectoire ; l'accélération normale est donnée par la relation :

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R_c}$$

Par contre, si ce rayon n'est pas donné à priori, il faut tout d'abord calculer le vecteur accélération et son module (en coordonnées cartésiennes par exemple) et ensuite calculer l'accélération normale via la relation :

$$a^2(t) = a_t^2(t) + a_n^2(t) \Rightarrow a_n(t) = \sqrt{a^2(t) - a_t^2(t)}$$

- Les modules des différentes grandeurs vectorielles cinématiques sont les mêmes dans toutes les bases. Seules les composantes de ces vecteurs changent d'un système à un autre.

- Il convient de noter que nous avons ainsi exprimé les mêmes vecteurs (position, vitesse, accélération) dans des bases différentes. La base cartésienne est celle du référentiel $\mathcal{R}$, et les autres nous ont permis d'introduire les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

On distinguera donc soigneusement le référentiel $\mathcal{R}$, qui est une donnée fondamentale pour définir les grandeurs cinématiques (position, vitesse et accélération) puisqu'il représente l'observateur, de la base, parfois mobile, qui est une donnée technique nécessaire à l'exploitation d'une égalité vectorielle et donc secondaire.

Par exemple, l'expression de la vitesse dans le repère de Frénet – Serret est $\vec{v} = \left(\frac{ds}{dt} \vec{u}_t \right)$. Cette relation signifie que dans la base $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n, \vec{u}_b)$, la vitesse a pour composantes $\left(\frac{ds}{dt}, 0, 0 \right)$. Cependant, il faut comprendre que cette vitesse n'est pas celle mesurée par rapport au repère de Frénet – Serret ; en effet celle-ci serait nulle puisque ce repère suit le point M dans son mouvement. Donc, la vitesse $\vec{v}$ n'est définie que par rapport à un référentiel, c'est-à-dire un système d'axes lié à un observateur. Une fois le vecteur vitesse est défini, on peut l'exprimer dans n'importe quel repère géométrique. Celui-ci, contrairement au référentiel, n'intervient pas dans la définition du mouvement.

5- MOUVEMENTS PARTICULIERS

Dans cette section, nous allons étudier quelques mouvements particuliers.

5-1. Mouvement rectiligne

5-1.1. Cas général

Le mouvement rectiligne est un mouvement dont la trajectoire est une ligne droite. Si cette trajectoire est portée par l'axe $(X'OX)$, de vecteur unitaire $\vec{i}$, la position d'un point M est donné par :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i}$$

Les vecteurs vitesse et accélération se déduisent aisément par dérivation :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} = \dot{x}(t) \vec{i}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{i} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{i} = \ddot{x}(t) \vec{i}$$

Les modules de ces trois vecteurs sont :

$$\|\vec{r}(t)\| = |x(t)|, \quad \|\vec{v}(t)\| = |\dot{x}(t)|, \quad \|\vec{a}(t)\| = |\ddot{x}(t)|$$

Pour déterminer la nature du mouvement, il suffit d'étudier le signe du produit scalaire $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)$. Puisque le mouvement est rectiligne, les vecteurs vitesse et accélération sont colinéaires :

$$(\vec{v}, \vec{a}) = 0, \pi \Rightarrow \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = v(t)a(t)$$

Donc :

- Si $a(t)v(t) < 0$, alors le mouvement est décéléré ;
- Si $a(t)v(t) > 0$, alors le mouvement est accéléré ;
- Si $a(t)v(t) = 0$, alors le mouvement est uniforme ($a(t) = 0$ et $v(t) = \text{cste} \neq 0$).

5-1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement rectiligne uniformément varié est un mouvement rectiligne dont l'accélération est constante. On a alors :

$$a = cste \Rightarrow \begin{cases} v(t) = \int a dt = at + C_1 \\ x(t) = \int v(t) dt = \int (at + C_1) dt = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2 \end{cases}$$

- Si $a > 0 \Rightarrow$ le mouvement est dit uniformément accéléré.
- Si $a < 0 \Rightarrow$ le mouvement est dit uniformément décéléré.
- Si $a = 0 \Rightarrow$ le mouvement est dit uniforme, soit $v(t) = v = cste$. Par conséquent :

$$x(t) = vt + C_0$$

où C_0, C_1 et C_2 sont des constantes d'intégrations déterminées par les conditions initiales.

Application :

La chute libre, à la surface de la Terre, est un mouvement rectiligne uniformément varié (accélération constante $g = 9.80 \text{ m/s}^2$). Dans ce cas, le corps, placé dans le champ de pesanteur terrestre, est abandonné sans vitesse initiale à partir d'une hauteur h . Si l'origine des ordonnées est pris au niveau du sol, il est facile d'établir que :

$$\vec{a} = -g \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v(t) = -gt \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

On peut envisager le cas où le corps est lancé vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. Il est également facile d'établir que :

$$\begin{cases} \vec{a} = -g \vec{j} \\ v(t) = v_0 - gt \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h \end{cases}$$

Dans les deux cas, le mouvement s'effectue le long de l'axe $(Y'OY)$ orienté vers le haut.

On peut également envisager le cas où le corps est lancé vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} \vec{a} = -g \vec{j} \\ \vec{v}(t) = -(gt)\vec{j} + \vec{v}_0 : \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \\ \vec{r} = -\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j} + \vec{v}_0t + \vec{r}_0 : \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + y_0 \end{cases} \end{cases}$$

Si le corps est lancé à partir de l'origine des coordonnées on a alors $x_0 = y_0 = 0$. Dans tous les cas, l'instant initial est $t_0 = 0$.

Remarques :

- Dans le cas du mouvement rectiligne uniformément varié, on a toujours $C_1 = v_0 = v(t=0)$ et $C_2 = a_0 = a(t=0)$.
- En plus des deux relations donnant la vitesse et la position en fonction du temps, on a par ailleurs : $v^2 - v_0^2 = 2ax$
- Géométriquement, les équations paramétriques de la position, vitesse et accélération sont des droites et des paraboles. La figure 2.9 illustre les différents cas possibles.

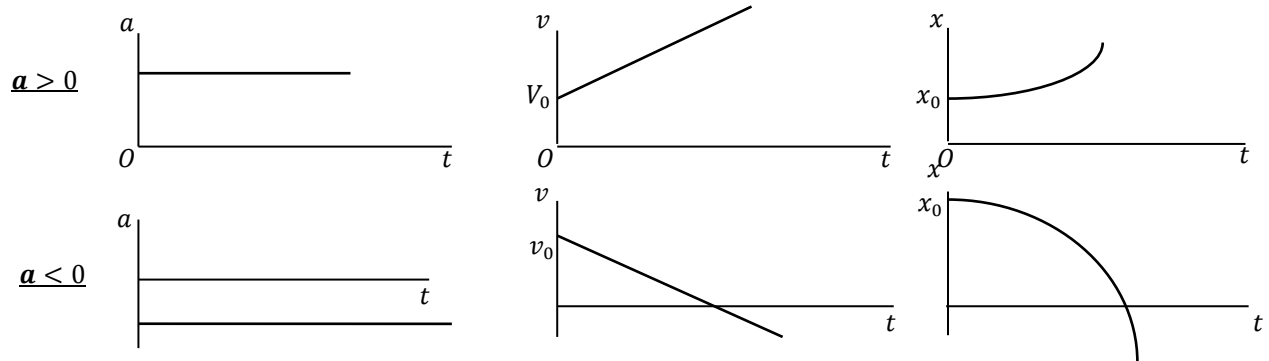


Figure 2.9

5-2. Mouvement circulaire**5-2.1. Cas général**

C'est un mouvement s'effectuant dans un plan et dont la trajectoire est un cercle de rayon R . On peut étudier ce mouvement dans les différents systèmes de coordonnées (Fig. 2.10), mais vu la nature courbée de la trajectoire, les systèmes de coordonnées polaires et intrinsèques sont les plus adéquats.

Dans ce cas, les équations horaires sont données par :

$$\begin{cases} \rho(t) = R \\ \theta(t) \end{cases}$$

Par conséquent, les vecteurs position, vitesse et accélération ainsi que leurs modules sont donnés par :

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho = R\vec{e}_\rho ; \|\vec{r}(t)\| = |\rho(t)| = R$$

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta ; \|\vec{v}(t)\| = R\dot{\theta}(t)$$

$$\vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2(t)\vec{e}_\rho + R\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta ; \|\vec{a}(t)\| = R\sqrt{\ddot{\theta}^2(t) + \dot{\theta}^4(t)}$$

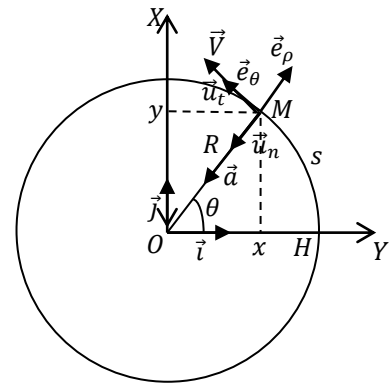


Figure 2.10

Remarques :

- Les quantités $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$ sont appelées position, vitesse et accélération angulaires et elles sont notées $\theta(t)$, $\omega(t)$ et $\alpha(t)$, respectivement. Leurs unités dans le SI sont le rd , rd/s et rd/s^2 , respectivement.
- Dans un mouvement circulaire, le vecteur position est toujours orthogonal au vecteur vitesse.

- Dans le cas du mouvement circulaire (Fig. 2.10), les bases des systèmes polaire et curviligne sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{u}_t = \vec{e}_\theta \\ \vec{u}_n = -\vec{e}_\rho \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} a_t = a_\theta = R\alpha(t) \\ a_n = -a_\rho = R\omega^2(t) \end{cases}$$

- Dans le cas où la trajectoire est dans le plan (OXY) , en remarquant que $\vec{u}_\theta = \vec{k} \times \vec{u}_\rho$, la relation $\vec{v}(t) = R\omega(t)\vec{u}_\theta$ devient alors :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= R\omega(t)(\vec{k} \times \vec{u}_\rho) = (\omega(t)\vec{k}) \times (R\vec{u}_\rho) = \vec{\omega}(t) \times \vec{OM}(t) \\ &= \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \end{aligned}$$

Ainsi, dans un mouvement circulaire on représente la vitesse angulaire par un vecteur $\vec{\omega}(t)$, dit vecteur vitesse de rotation, tel que le trièdre $(\vec{OM}(t), \vec{v}(t), \vec{\omega}(t))$ soit direct (Fig. 2.11). Le mouvement circulaire est donc un mouvement avec une distance constante à l'axe de rotation et le vecteur vitesse de rotation est porté par cet axe.

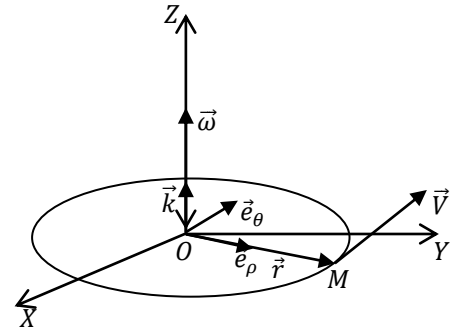


Figure 2.11

5-2.2. Mouvement circulaire uniformément varié

C'est un mouvement dont l'accélération angulaire α est constante. Par intégration, on obtient :

$$\begin{cases} \omega(t) = \int \alpha dt = \alpha t + \omega_0 \\ \theta(t) = \int \omega(t) dt = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

Les constantes d'intégration ω_0 et θ_0 sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta_0 = \theta(t = 0) \\ \omega_0 = \omega(t = 0) \end{cases}$$

La nature du mouvement est déterminée par le signe du produit scalaire :

$$\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = R^2 \alpha \omega(t)$$

- Si $\alpha \cdot \omega(t) > 0 \Rightarrow$ Le mouvement est accéléré ;
- Si $\alpha \cdot \omega(t) < 0 \Rightarrow$ Le mouvement est décéléré ;

5-2.3. Mouvement circulaire uniforme

C'est un mouvement dont la vitesse angulaire ω est constante ($\alpha = 0$). On obtient par intégration :

$$\theta(t) = \int \omega dt + \theta_0 = \omega t + \theta_0$$

L'abscisse curviligne, le module de la vitesse, les accélérations tangentielle et normale s'écrivent alors :

$$\begin{cases} S(t) = R\omega t + S_0 \\ v = R\omega \\ a_t = a_\theta = 0 \\ a_n = -a_\rho = R\omega^2 \end{cases}$$

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération tangentielle est nulle. Il n'existe qu'une accélération normale dite centripète (qui est toujours dirigée vers le centre du cercle).

Le mouvement circulaire uniforme est un mouvement périodique, c'est-à-dire, que le point M passe en un point quelconque de la trajectoire à intervalles de temps égaux. Ce mouvement est caractérisé par :

- Sa période T qui est le temps nécessaire pour faire un tour complet (une révolution);
- Sa fréquence f qui est le nombre de tours (révolutions) par unité de temps.

Il existe une relation simple entre la vitesse angulaire et la période. Le premier tour est accompli au bout de la période T . Il vient :

$$\theta(T) = \theta_0 + \int_0^T \omega dt = \theta_0 + \omega T$$

Après un tour complet, l'angle θ_0 a augmenté de 2π , ce qui nous permet d'écrire :

$$\theta(T) - \theta_0 = 2\pi = \omega T$$

Ce qui nous donne la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Comme le point M effectue un tour par période de temps, la fréquence est alors :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Remarque :

Les équations paramétriques décrivant le mouvement circulaire uniformément varié ont la même forme que celle du mouvement curviligne uniformément varié (rectiligne par exemple). D'ailleurs, on peut passer de l'un à l'autre via les relations suivantes :

$$\begin{cases} dS = R d\theta \\ v = \frac{dS}{dt} = R\omega \\ a = \frac{dV}{dt} = R\alpha \end{cases}$$

5-3. Mouvement sinusoïdal

Dit aussi mouvement harmonique ou oscillatoire ou vibratoire. Il s'agit du mouvement périodique d'un point matériel autour d'une position d'équilibre. En général, la dépendance temporelle de la coordonnée décrivant ce mouvement est donnée par :

$$G(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

où :

- G_m est l'amplitude du mouvement : elle représente la valeur maximale (respectivement minimale) de G ($-G_m \leq G \leq +G_m$) ;
- ω est sa pulsation ou pulsation angulaire (en hz) ;
- $(\omega t + \varphi_0) = \varphi(t)$ sa phase (en rd) ;
- φ sa phase initiale (en rd) : $\varphi_0 = \varphi(t = 0)$

La période est la fréquence du mouvement sont données par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} ; f = \frac{1}{T}$$

Nous avons reporté sur la figure 2.12 une représentation graphique de la fonction $G(t)$ dans le cas où $\varphi = 0$.

Notons qu'il existe d'autres dépendances fonctionnelles équivalentes pour $G(t)$ telles que :

$$G(t) = G_m \sin(\omega t + \varphi_0) ; G(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

On peut évidemment passer de l'une à l'autre par de simples transformations trigonométriques.

Selon la nature de la trajectoire, on distingue deux types de mouvements sinusoïdaux : rectiligne et circulaire.

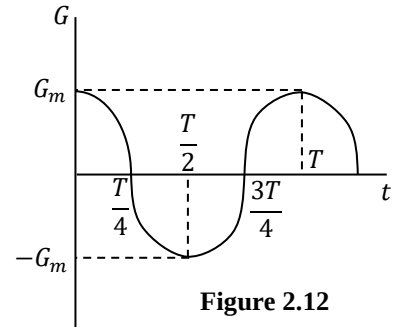


Figure 2.12

5-3.1. Mouvement rectiligne sinusoïdal

Dans le cas où le déplacement s'effectue suivant l'axe (OX) du repère cartésien $\mathcal{R}(OXYZ)$, le point M a pour vecteur position :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} = x_m \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{i}$$

Sa vitesse et son accélération sont alors données par :

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{i} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{i}$$

$$\vec{a}(t) = a(t)\vec{i} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{i} = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{i} = -\omega^2 x(t) \vec{i} = -\omega^2 \vec{r}$$

Dans un mouvement rectiligne sinusoïdal, le vecteur accélération a la même direction que le vecteur position mais un sens opposé.

Comme exemple de ce mouvement, citons les oscillations d'une masse m accrochée à un ressort de constant de raideur k .

5-3.2. Mouvement circulaire sinusoïdal

C'est un cas particulier du mouvement circulaire où :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Ce mouvement possède les mêmes caractéristiques que le mouvement rectiligne sinusoïdal. La seule différence réside dans l'amplitude, qui est dans le cas du mouvement rectiligne sinusoïdal une longueur et dans le cas du mouvement circulaire sinusoïdal un angle.

La vitesse et l'accélération angulaires sont alors données par :

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = -\omega \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \theta_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \theta(t)$$

Comme exemple physique de ce mouvement, citons les petites oscillations d'un pendule simple.

6- MOUVEMENT RELATIF

6-1. Introduction

On considère deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Le premier est caractérisé par un de ses repères $\mathcal{R}(OXYZ)$ avec la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et le second par $\mathcal{R}'(O'X'Y'Z')$ avec la base cartésienne $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ (Fig. 2.13). Les axes (OX) , (OY) et (OZ) sont choisis de sorte à être parallèles respectivement aux axes $(O'X')$, $(O'Y')$ et $(O'Z')$ à un instant quelconque qui peut être choisi comme instant origine ($t = 0$). Cette condition valide à $t = 0$ ne l'est plus quand le temps s'écoule puisque nous considérons que $\mathcal{R}'$ se déplace par rapport à $\mathcal{R}$.

Le but de cette section est de répondre à la question suivante : quelles relations existent-elles entre les caractéristiques cinématiques (position, vitesse et accélération) d'un même point M relatives à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$?

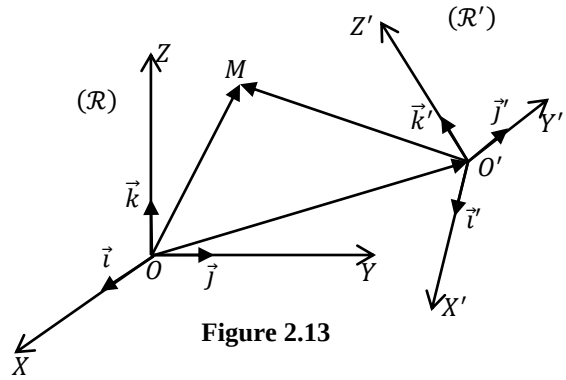


Figure 2.13

Remarque :

Le référentiel $\mathcal{R}$ est dit absolu et le référentiel $\mathcal{R}'$ est dit relatif. Les notions de référentiels absolu et relatif seront éclaircies dans le chapitre de dynamique. Toutes les grandeurs cinématiques exprimées dans le référentiel $\mathcal{R}$ sont dites absolues et celles exprimées dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sont dites relatives.

Exemple :

Le mouvement d'un objet (ballon par exemple) qui se déplace sur le sol par rapport à deux observateurs ; l'une debout sur le sol et l'autre immobile à l'intérieur d'un véhicule en mouvement.

6-2. Position d'un point M

D'après la figure 2.13, la relation de Chasles appliquée aux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow \vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'$$

avec :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} ; \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

6-3. Loi de composition des vitesses

Si on dérive la relation entre les vecteurs positions par rapport au temps et relativement au référentiel $\mathcal{R}$, en tenant compte du fait que la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ n'est pas fixe dans $\mathcal{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) &= \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left[\frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right] + \left[\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] \\ &= \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \end{aligned}$$

où :

$$\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} ; \quad \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}'$$

On distingue dans cette expression deux termes :

- $\vec{v}_r = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ qui représente la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}'$ et que l'on appelle vitesse relative de M par rapport à $\mathcal{R}'$;
- $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + x' \dot{\vec{i}}' + y' \dot{\vec{j}}' + z' \dot{\vec{k}}'$ qui est la vitesse d'entraînement de M dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. Cette vitesse est la somme de deux termes. Le premier terme correspond à la vitesse d'entraînement due au déplacement de l'origine O' (terme de translation) et le deuxième correspond à la vitesse d'entraînement traduisant le changement d'orientation du référentiel mobile $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, en d'autres termes, le mouvement de rotation de la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Théorème de composition des vitesses:

Le vecteur vitesse absolue est égale à la somme des vecteurs vitesses d'entraînement et relative:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

6-4. Loi de composition des accélérations

Si on dérive la loi de composition des vitesses par rapport au temps et relativement au référentiel absolu $\mathcal{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{a}_a = \vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left[\frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}' \right] \\ &+ \left[\frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right] + 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] \\ &= \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \vec{a}_r &= \frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}' \\ \vec{a}_e &= \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \\ \vec{a}_c &= 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] \end{aligned}$$

Nous pouvons interpréter ces trois termes comme suit :

- Le premier terme $\vec{a}_r = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ représente l'accélération de M dans $\mathcal{R}'$ (accélération relative) ;
- Le dernier terme $\vec{a}_c$ représente l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire. Elle n'existe que si le point M est en mouvement dans $\mathcal{R}'$ et si $\mathcal{R}'$ est un référentiel en rotation par rapport à $\mathcal{R}$;
- Le terme intermédiaire représente l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$. Cette accélération correspondrait à l'accélération qu'aurait le point M par rapport à $\mathcal{R}$ s'il était fixe dans $\mathcal{R}'$. Dans ce cas les accélérations relative et complémentaire sont nulles. Le premier terme de cette accélération correspond à l'accélération d'entraînement due au déplacement de l'origine O' (terme de translation) et le deuxième correspond à l'accélération d'entraînement traduisant le changement d'orientation du référentiel mobile $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, en d'autres termes, le mouvement de rotation de la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Théorème de composition des accélérations:

Le vecteur accélération absolue est égale à la somme des vecteurs accélérations d'entraînement, relative et de Coriolis :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

6-5. Mouvement de translation

Nous dirons que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ si les axes du référentiel $\mathcal{R}'$ restent parallèles à ceux du référentiel $\mathcal{R}$ au cours du mouvement. Si le point O' est en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$, tous les points constituant le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplacent de la même quantité vectorielle que O' (Fig. 2.14). Par Conséquent :

$$\vec{i} = \vec{i}' ; \vec{j} = \vec{j}' ; \vec{k} = \vec{k}'$$

La base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est donc une base fixe dans $\mathcal{R}'$ mais aussi dans $\mathcal{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ correspond au vecteur translation.

Le mouvement de translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ peut être rectiligne, circulaire, uniforme ou varié ou quelconque, selon la nature du mouvement de l'origine O' du référentiel $\mathcal{R}'$.

Dans ce cas, les dérivées premières et secondes des vecteurs de la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par rapport au temps et relativement au référentiel $\mathcal{R}$ sont nulles :

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{j}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} = \vec{0}$$

Dans les lois de composition des vitesses et des accélérations, ceci se traduit par :

$$\vec{v}_{eT} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} ; \vec{a}_{eT} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} ; \vec{a}_c = \vec{0}$$

où l'indice « T » renvoie à translation.

Remarque :

Dans le cas d'une translation rectiligne et uniforme, on a :

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} ; \vec{a}_e(t) = \vec{a}_c(t) = \vec{0}$$

Par conséquent :

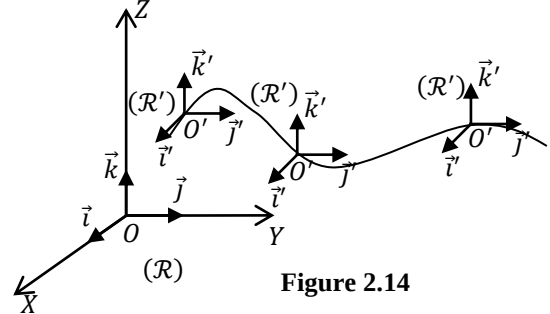
$$\vec{a}_a(t) = \vec{a}_r(t)$$

Les deux observateurs liés aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ mesurent donc la même accélération pour M . Dans ce cas, le mouvement de translation s'effectue avec une vitesse constante $\vec{v} = \vec{v}_e$ et on a évidemment :

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_e t + \vec{r}'(t)$$

6-6. Mouvement de rotation

Nous dirons qu'un référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ si les axes du référentiel $\mathcal{R}'$ tournent par rapport à ceux du référentiel $\mathcal{R}$. Le point O' , origine du repère du référentiel $\mathcal{R}'$, est immobile par rapport à $\mathcal{R}$. Nous considérerons la rotation autour d'un seul axe, cette rotation étant caractérisée par le vecteur vitesse de rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$: $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$



Dans ces conditions, on peut choisir l'origine O confondue avec le point O' et choisir un repère $(OXYZ)$ de sorte que le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ soit de la forme :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \vec{k}$$

L'axe $(O'Z')$ peut être confondu avec l'axe (OZ) et donc $\vec{k} = \vec{k}'$. Les axes $(O'X')$ et $(O'Y')$ sont alors en rotation autour de l'axe (OZ) . Dans ces conditions, la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, qui est la base fixe du référentiel $\mathcal{R}'$, est une base mobile dans $\mathcal{R}$. Les vecteurs $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ tournent autour de l'axe (OZ) au cours du temps (Fig. 2.15). Si θ est l'angle que fait $\vec{i}'$ avec l'axe (OX) du référentiel $\mathcal{R}$, nous avons alors :

$$\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta}$$

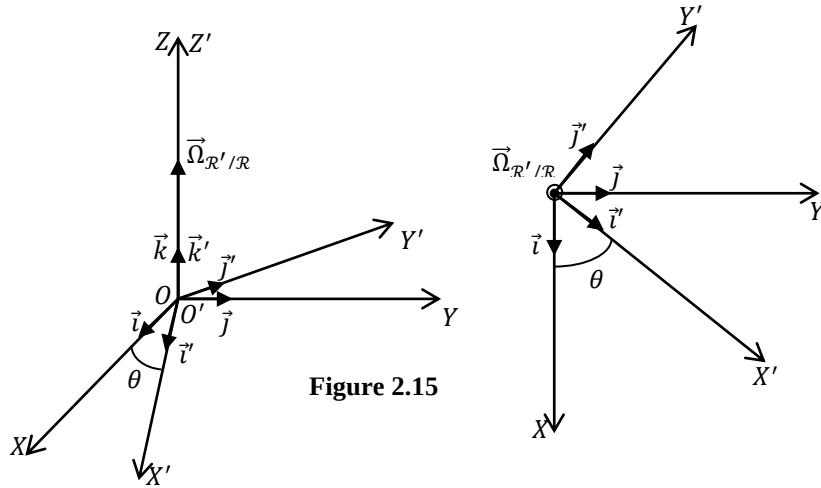


Figure 2.15

Si nous nous plaçons dans le référentiel $\mathcal{R}$, la dérivation, par rapport au temps, des vecteurs de base, donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \dot{\theta} \vec{j}' = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \vec{j}' = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} (\vec{k}' \wedge \vec{i}') = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{i}' \\ \left(\frac{d\vec{j}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= -\dot{\theta} \vec{i}' = -\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \vec{i}' = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} (\vec{k}' \wedge \vec{j}') = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{j}' \\ \left(\frac{d\vec{k}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Notons que la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ du référentiel $\mathcal{R}'$ se confond avec la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$, mobile des coordonnées cylindriques du repère $(OXYZ)$.

Sachant que $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = \vec{O'M}$, la relation de composition des vitesses devient :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) &= \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left[\frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right] + \left[x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] = \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \left[x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] \\ &= \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + [x' (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{i}') + y' (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{j}')] \\ &= \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (x' \vec{i}' + y' \vec{j}') \end{aligned}$$

Comme le vecteur vitesse de rotation est dirigée selon $\vec{k}'$, nous avons aussi :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}') = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}$$

Ainsi, dans deux référentiels en rotation, la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\vec{v}_{eR} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}$$

De la même manière nous obtenons pour les accélérations d'entraînement et de Coriolis les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{eR} &= x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \vec{OM} \\ \vec{a}_c &= 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right] = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_r \end{aligned}$$

où l'indice « R » renvoie à rotation.

Remarques :

- Les résultats qu'on vient d'énoncer sont valables pour n'importe quel axe de rotation.
- Dans le cas d'un mouvement de rotation et uniforme avec un vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ constant, on a :

$$\vec{a}_e = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}) ; \vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_r$$

6-7. Cas général

Un mouvement quelconque peut être considéré comme une combinaison d'un mouvement de translation et de rotation. Dans ce cas, dans les expressions de la vitesse et l'accélération d'entraînement, il faut tenir compte de ces deux mouvements :

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM} = \vec{v}_{eT} + \vec{v}_{eR} \\ \vec{a}_e &= \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \vec{OM} = \vec{a}_{eT} + \vec{a}_{eR} \\ \vec{a}_c &= 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_r \end{aligned}$$

6-8. Résolution pratique d'un problème de changement de référentiel

Lors de la résolution d'un problème pratique de changement de référentiels, il est conseillé de suivre la démarche suivante :

- Identifier les référentiels absolu et relatif ainsi que le mobile ;
- Identifier les vitesses absolue, relative et d'entraînement ;
- Faire un schéma représentatif de ces vitesses ;
- Appliquer la loi de composition des vitesses en ne perdant pas de vue qu'il s'agit d'une relation vectorielle.

7- EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1 :

Dans un référentiel cartésien, le mouvement d'un point M est décrit par les équations horaires suivantes :

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \beta e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \\ y(t) = \beta e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \end{cases}$$

où β, α et ω sont des constantes réelles positives. On se propose d'étudier ce mouvement dans les différents systèmes des coordonnées.

Etude du mouvement en coordonnées cartésiennes :

Les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules sont donnés par :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \beta[-\alpha \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)]e^{-\alpha t}\vec{i} + \beta[-\alpha \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)]e^{-\alpha t}\vec{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \beta e^{-\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \beta[2\alpha\omega \sin(\omega t) + (\alpha^2 - \omega^2) \cos(\omega t)]e^{-\alpha t}\vec{i} + \beta[-2\alpha\omega \sin(\omega t) + (\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t)]e^{-\alpha t}\vec{j}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \beta e^{-\alpha t} (\alpha^2 + \omega^2)$$

Etude du mouvement en coordonnées polaires :

Les coordonnées polaires de M sont données par

$$\rho(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \beta e^{-\alpha t} ; \tan(\theta) = \frac{y}{x} = \tan(\omega t) \Rightarrow \theta = \omega t$$

Ce qui nous permet de trouver l'équation de la trajectoire de M :

$$t = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow \rho = e^{-\frac{\alpha}{\omega}\theta}$$

Calculons, tout d'abord, les dérivées des vecteurs unitaires de la base polaire :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega ; \frac{d(\vec{e}_\rho)}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta = \omega\vec{e}_\theta ; \frac{d(\vec{e}_\theta)}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho = -\omega\vec{e}_\rho$$

Ces résultats nous permettent d'écrire le vecteur position et de calculer les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules :

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho = \beta e^{-\alpha t}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \beta e^{-\alpha t} [-\alpha \vec{e}_\rho + \omega \vec{e}_\theta] ; \quad \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \beta e^{-\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\vec{a}(t) = \beta e^{-\alpha t} [(\alpha^2 - \omega^2) \vec{e}_\rho - (2\alpha\omega) \vec{e}_\theta] ; \quad \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \beta e^{-\alpha t} (\alpha^2 + \omega^2)$$

Etudes du mouvement en coordonnées curvilignes :

Connaissant le module de la vitesse de M , nous pouvons déterminer son abscisse curviligne :

$$s(t) = \int v dt = -\frac{\beta \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\alpha} e^{-\alpha t} + s_0$$

où s_0 est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales.

Les accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire sont donnés par :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -\alpha \beta e^{-\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} ; \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \omega \beta e^{-\alpha t} \sqrt{\omega^2 + \alpha^2}$$

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \beta \frac{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{\omega} e^{-\alpha t}$$

Remarques :

- Les modules des vecteurs position, vitesse et accélération sont indépendants de la base choisie ;
- Pour des considérations de simplicité mathématique, il apparaît que le système polaire est plus adapté à l'étude de ce mouvement. Le critère de symétrie joue également un rôle important dans le choix du système de coordonnées, si la trajectoire du mouvement est connue.

Exercice 2 :

Un nageur plonge d'un point situé sur la rive d'un fleuve et veut atteindre l'autre rive. Pour cela, il nage perpendiculairement au courant avec une vitesse $\vec{v}_1$. Sa vitesse par rapport au sol est $\vec{v}_3$ et la vitesse du courant est $\vec{v}_2$.

La première étape consiste à identifier chacune des vitesses $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ aux vitesses, absolue $\vec{v}_a$, relative $\vec{v}_r$ et d'entraînement $\vec{v}_e$. Pour ce faire, il est nécessaire de connaître :

Le référentiel absolu qui est la rive ; le référentiel relatif qui est le courant d'eau et le mobile qui est le nageur. Par conséquent :

La vitesse du nageur par rapport au courant $\vec{v}_1$ est la vitesse relative $\vec{v}_r$;

La vitesse du nageur par rapport à la rive $\vec{v}_3$ est la vitesse absolue $\vec{v}_a$;

La vitesse du courant par rapport à la rive $\vec{v}_2$ est la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$.

D'après la loi de composition des vitesses, on a :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_3 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

Connaissant $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, déterminons :

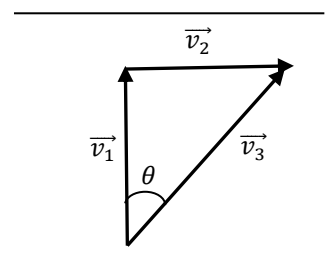


Figure 2.16-a

1- La vitesse du nageur par rapport à la Terre (module et direction) :

D'après la figure 2.16-a, on a :

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_1^2}$$

$$\tan \theta = \frac{v_2}{v_1}$$

On remarque que le nageur ne se déplace pas en ligne droite, en d'autres termes, il est entraîné par le courant.

2- La direction dans laquelle le nageur doit s'orienter pour qu'il se déplace en ligne droite et perpendiculaire à la rive à la vitesse constante $\vec{v}_3$:

Dans ce cas, pour nager en ligne droite, le nageur doit lutter contre le courant.

D'après la figure 2.16-b, on a :

$$\sin \theta = \frac{v_2}{v_1}$$

Par conséquent, la vitesse du nageur par rapport au sol est :

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}$$

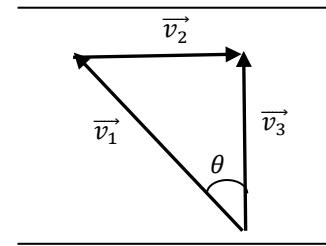


Figure 2.16-b