Chapitre i

Intégrales simples multiples

1. *Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives.*
2. *Intégrales doubles et triples. Application au calcul d'aires, de volumes…*

1. Rappels sur l'intégrale de Riemann.

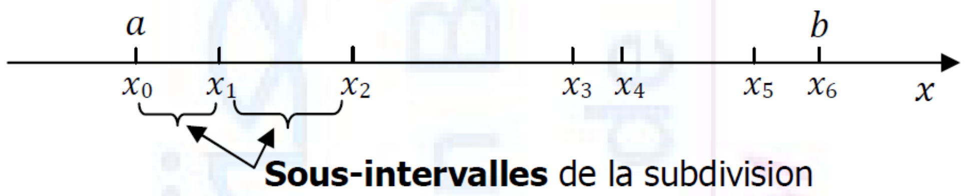
1.1 Subdivision

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Définitions

On appelle subdivision toute partie finie de points de I contenant a et b. Elle s'écrit de façon unique

2. $d = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$



3.

où $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et n un entier naturel quelconque.

Remarque

Si d est une subdivision de $[a, b]$ et E une partie finie de $[a, b]$, alors $d \cup E$ est encore une subdivision de $[a, b]$.

Le réel strictement positif

$$\delta(d) = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$$

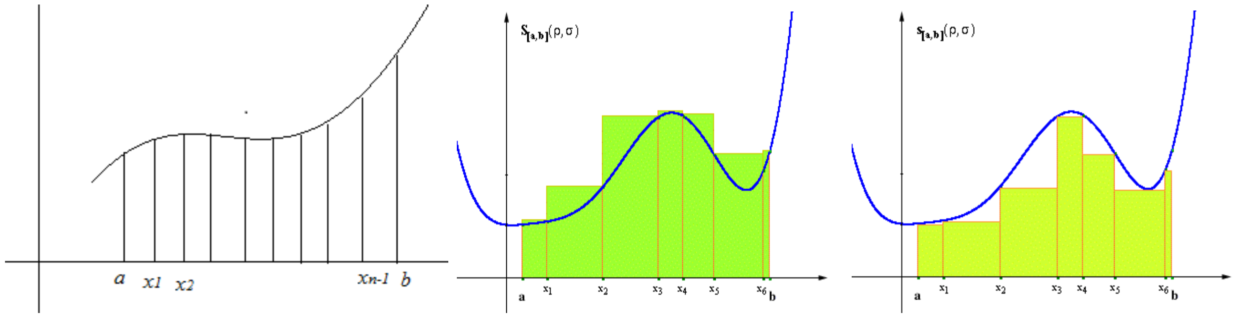
est dit : pas de la subdivision.

La est dite équidistante si le pas est uniforme ($x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1}$)

Intégrale de Riemann

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ b]$

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaia



Dans la suite on considère une subdivision régulière

$$\delta_i(d) = (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \text{ et } x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

On appelle sommes de Riemann de la fonction f définie sur $[a, b]$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\delta_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\delta_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)$$

et

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)$$

Définition : On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

existe et finie (s_a^b coïncide avec S_a^b sur la figure ci-dessus ou encore les sommes de Riemann (Sn) et (sn) sont convergentes vers $\int f(x)dx$). Ce nombre est alors appelé l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$, et on le note

$$\int_a^b f(x)dx$$

On écrit alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Remarque

La variable d'intégration x dans $\int_a^b f(x)dx$ est une variable muette, c'est-à-dire qu'elle peut-être remplacée par n'importe quelle autre variable.

1.4 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soient f, g deux fonctions Riemann-intégrables, on a alors pour toute subdivision X de $[a, b]$:

1) $s(f, X) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f, X)$
2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ Relation de Chasles
3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4) $\int_a^a f(x)dx = 0$
5) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ pour tout $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$
6) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$ la réciproque est fausse.
7) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
8) $|f|$ est Riemann-intégrables, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

Théorème (de la moyenne) Soit $f \epsilon C\ ([a, b])$. alors

$$\exists c \epsilon]a, b[: \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

2. Primitive d'une fonction continue

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition : Une fonction $F: I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f dans I si et seulement si

1) F est dérivable sur I.
2) $F' = f$ dans I.

Existence d'une primitive

Théorème : Toute fonction continue $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ possède une primitive, on écrit

$F(x) + C = \int f(x)dx$; C une constante

Et $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Primitives des fonctions usuelles

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c\, ; \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int sinxdx = -cosx + c$$

$$\int cosxdx = sinx + c$$

$$\int chxdx = shx + c$$

$$\int shxdx = chx + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arsingx + c; x\epsilon]-1,1[$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$$

Exemple : calculer l'intégrale suivante

$$I = \int (3x^2 + e^{-x} - cos2x)dx$$

Rép : $I = x^3 - e^{-x} - \frac{1}{2}sin2x + c$

Intégration par parties

Proposition : soient f et g deux fonctions de classe C^1définies sur un intervalle $[a,b]$. On a

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Donc : $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Exemples

$$\int_0^\pi xsin(x)dx$$

Posons : $u = x\ et\ v' = sinx$ alors : $u' = 1\ et\ v = -cosx$

Intégrons par parties :

$$\int_0^\pi xsin(x)dx = [-xcosx]_0^\pi + \int_0^\pi cosxdx = \pi + [sinx]_0^\pi = \pi$$

Calculer $I = \int \ln(x+1)\,dx$

Changement de variable d'intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et u : J→ I une fonction de classe $C^1(J)$.

On a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\big(u(t)\big)u'(t)ft$$

Exemple : Calculer l'intégrale suivante

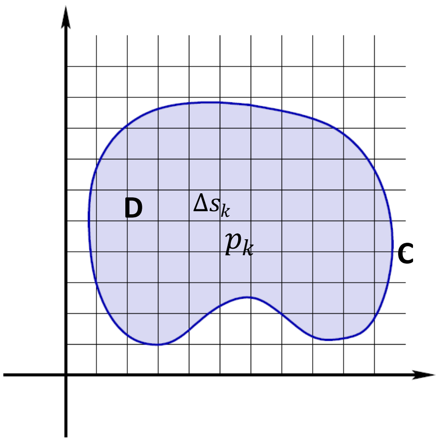
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Posons : $x = u(t) = sint \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = cost \\ x = 0 \to t = 0, x = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos(2t))dt = \frac{\pi}{4}$

3. Intégrale double

Soit dans le plan xoy un domaine D limite par la courbe Γ. Considérons dans le même domaine, la fonction $z = f(x,y)$ des deux variables indépendantes x et y. Partageons ce domaine, en n parties (sous domaine) $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Choisissons dans chaque élément Δs_k un point p_k arbitraire, dont image par l'application f vaut $f(p_k)$.



La somme des produits

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta s_k$$

est dite somme intégrale de la fonction $f(x,y)$ dans le domaine D.

Théorème :

Considérons la fonction $f(x,y)$ continue sur D. La suite $(v_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}}$ des sommes intégrales a une limite lorsque le plus grand sous domaine Δs_k tend vers 0 et que n tend vers l'infini.

Cette limite ne dépend ni du mode du découpage de D, ni du choix du point p_k dans Δs_k.

Définition :

On appelle intégrale double de la fonction $f(x,y)$ sur le domaine D, la limite de la suite $(v_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}}$, lorsque le plus grand sous domaine $\Delta s_k \to 0$ et que $n \to \infty$.

Et on note

$$\lim_{\substack{max\,\Delta s_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta s_k = \iint_D f(x,y)dydx$$

Calcul des intégrales doubles

Considérons un domaine D du plan xoy on suppose que ce dernier est limité par deux courbes $y = \varphi(x)\ et\ y = \psi(x)$ telles que $\varphi(x) \geq \psi(x)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Définition :

On dit que le domaine D est régulier selon ox (resp. oy), si toute droite parallèle à l'axe ox (resp. oy) passant par un point de D coupe sa frontière en deux points $M1\ et\ M2$ (resp. $N1\ et\ N2$).

Remarque :

Si le domaine D est régulier selon ox et selon oy, on dira qu'il est régulier.

Considérons une fonction $f(x,y)$ continue sur le domaine$D$, régulier selon oy. Supposons que ce dernier est limité par les courbes $y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$ $(y_1(x) \leq y_2(x))$ et les droites $x = a\ et\ x = b\ (a \leq b)$.

Soit $R = [a,b] \times [c,d]$, le rectangle défini par quadrillage donné par les droites $x = x_i;\ y = y_j$, où $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$.

Soit la fonction $F(x,y)$ égale à $f(x,y)$ dans D et nulle à son extérieur. On peut donc

$$I = \iint_D f(x,y)dydx = \iint_R F(x,y)dydx = \lim_{max\,\Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{l=n,m} f(p_k)\Delta s_k$$

Où Δs_ksont des pavés rectangulaires d'aire $\Delta s_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ et le point p_k de coordonnées $\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2}, \frac{y_j - y_{j-1}}{2}\right)$.

Théorème :

L'intégrale double d'une fonction continue $f(x,y)$ sur un domaine D régulier selon oy a pour valeur

$$\iint_D f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

Théorème :

L'intégrale double d'une fonction continue $f(x,y)$ sur un domaine D régulier selon ox a pour valeur

$$\iint_D f(x,y)dydx = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

Théorème de Fubini-Tonelli (cas n = 2)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: une fonction positive, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dydx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \right) dy$$

Exemple : Calculer l'intégrale suivante

$$\iint_D (x^2+y)dydx$$

Où D est défini par $1 \le x \le 2 \; et \; 0 \le y \le 2$

On a

$$\iint_D (x^2+y)dydx = \int_1^2 \left[\int_0^2 (x^2+y)dy \right] dx = \int_1^2 \left[x^2 \int_0^2 dy + \int_0^2 ydy \right] dx = \int_1^2 [2x^2+2]dx = \frac{20}{3}$$

$$\iint_D (x^2+y)dydx = \int_0^2 \left[\int_1^2 (x^2+y)dx \right] dy = \int_0^2 \left[\int_1^2 x^2dx + y\int_1^2 dx \right] dy = \int_0^2 \left[\frac{7}{3} + y \right] dy = \frac{20}{3}$$

Exemple :

$$I = \iint_D (y)dydx$$

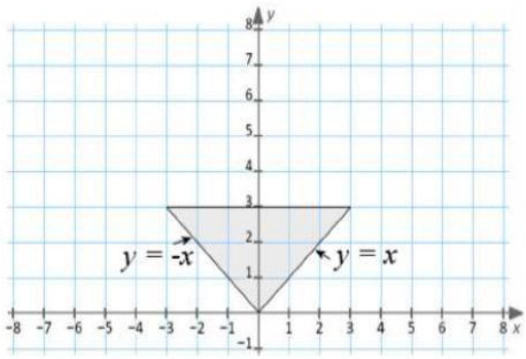
Où D est défini par $x \ge 0\,,\; y \ge 0 \; et \; x+y \le 1$

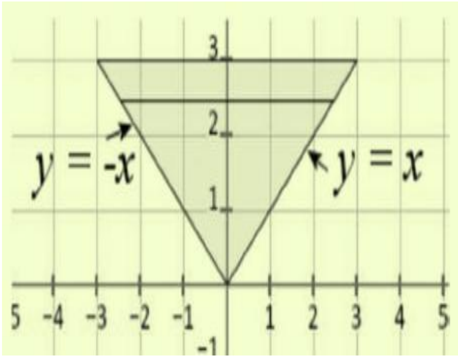
$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} ydy \right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-2x+1)dx = \frac{1}{6}$$

$$I = \int_0^1 \left[y \int_0^{1-y} dx \right] dy = \int_0^1 y(1-y)\,dy = \int_0^1 (y-y^2)dy = \frac{1}{6}$$

Exemple :

Calculer l'intégrale $\iint \; dA$ dans la région montrée sur la figure ci-dessous :



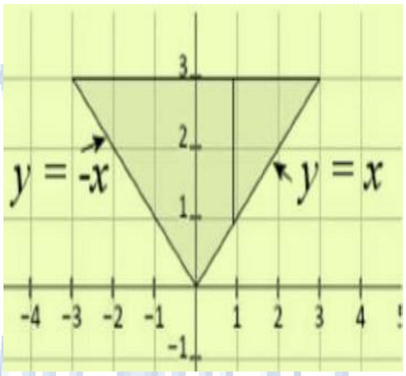


Si on commence par intégrer en x en premier, on remarque que le domaine est régulier selon OX. L'intégrale est donc :

$$\int_{0}^{3}\int_{-y}^{y} dxdy = 9$$

Si on commence par intégrer en y en premier, on remarque que le domaine est irrégulier selon OY. L'intégrale est la somme de deux intégrales :

$$\int_{-3}^{0}\int_{-x}^{3} dydy + \int_{0}^{3}\int_{x}^{3} dydy = 9$$



Changement de variables dans les intégrales doubles Correspondance biunivoque

Soit D un domaine du plan xoy et R du plan $u0'v$, à chaque point $M(x,y)$ du plan xoy on peut faire correspondre un point $m(u,v)$ du plan $u0'v$, et réciproquement à chaque point $m(u,v)$ du plan $u0'v$ correspond un point unique $M(x,y)$du plan xoy. Ainsi lorsque M décrit le domaine D du plan xoy, le point m décrit le domaine R du plan $u0'v$. On dit alors que l'on a établi une correspondance biunivoque entre le domaine D et le domaine R, c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre les deux domaines.

Exemple : Au point $M\left(3,\sqrt{3}\right)$ du plan xoy (coordonnées cartésiennes) correspond le point $m(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$ du plan $\rho o'\theta$ (coordonnées polaires) :

$\begin{cases} 3 = \rho cos\theta \\ \sqrt{3} = \rho sin\theta \end{cases}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $\rho \geq 0$

Changement de variables $\boldsymbol{x = x(u,v);\ y = y(u,v)}$

Soit l'intégrale double $\iint_D f(x,y)dxdy$ étendue au domaine D du plan xoy. Soit $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

Un changement de variable établissant une correspondance entre les domaines D et R. Si les x et y admettent des dérivées partielles continues et que la jacobienne $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ est non nulle, alors :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R f(x(u,v), y(u,v))|J|dvdu$$

Exemple :

$$I = \iint_D (x+y)dxdy \ et\ D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2, 1 \leq x-y \leq 2, -1 \leq x+3y \leq 1\}$$

Posons : $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}(3u+v) \\ y = \frac{1}{4}(-u+v) \end{cases}, \begin{cases} J = \frac{1}{4} \\ R: 1 \leq u \leq 2, -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$

$$I = \iint_D (x+y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{8}\iint_R (u+v)dudv = \frac{1}{8}\iint_R ududv + \iint_R vdudv = \frac{1}{8}\left(\int_1^2 udu\right)1\left(\int_{-1}^1 dv\right)$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\int_1^2 du\right)1\left(\int_{-1}^1 vdv\right) = \frac{3}{8}$$

Exemple :

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

$$I=\iint_D (xy)dxdy \ et \ D=\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2, x>0, y>0, x^2+y^2\leq 1\}$$

$$\begin{cases} x=\rho cos\theta \\ y=\rho sin\theta \end{cases}, J=\rho, R: 0\leq\rho\leq 1, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

$$I=\frac{1}{8}$$

Exemples calcul des surfaces : disque de rayon R. surface d'une sphère. Cône.

Intégrales triples

Les définitions de l'intégrale triple sont semblables aux définitions de l'intégrale double. Le vocabulaire est identique il suffit de remplacer $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^3$, et on parlera de volume au lieu de surface.

Soit f une fonction continue sur un domaine $D\subseteq \mathbb{R}^3$

On appelle intégrale triple de f sur D le réel noté $I=\iiint^D f(x,y,z)dxdydz$

Théorème de Fubini :

Soit $D=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]\subseteq \mathbb{R}^3$

$$\iiint^D f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_p^q f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_c^d\left(\int_p^q\left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right)dz\right)dy$$

$$=\int_p^q\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right)dx\right)dz$$

Changement de variables dans les intégrales triples

Soit l'intégrale triple $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ étendue au domaine V de l'espace $oxyz$. Considérons le changement de variable :

$$\begin{cases} x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w) \\ z=z(u,v,w) \end{cases}$$

Etablissant une correspondance entre deux domaines V et R. Si $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ et $z = z(u,v,w)$ admettent des dérivées partielles continues et que la jacobienne

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

Alors :

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_R f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)|J|dudvdw$$

Coordonnées cylindriques

Le changement en coordonnées cylindriques est donné par la transformation suivante :

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \ , \rho \geq 0 \ et \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, J = \rho \\ \quad z = z \end{cases}$$

Coordonnées sphériques :

Le changement en coordonnées sphériques est donné par la transformation suivante :

$$\begin{cases} x = \rho sin\varphi cos\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \ , \rho \geq 0 \ et \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, J = \rho^2 sin\varphi \\ \quad z = \rho cos\varphi \end{cases}$$

Exemple : calculer l'intégrale suivante

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$$

Où V est la boule de centre O(0,0,0) et de rayon R.

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz = \pi R^4$$