Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ **année ST**
Année universitaire
2023 / 2024

Série de TD n°2 : Ensembles et relations

Exercice n°1

1. On considère les ensembles :

   $B = \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 3\}, E = \{x \in \mathbb{Z}/-5 < x \leq 5\}$ et $A = E \cap \mathbb{N}^*$.

   Déterminer les ensembles suivants :

$$A \cap B, \quad \complement_E^{(A\cup B)}, A \backslash B \text{ et } (A \cap B) \cap \complement_E^{(A\cap B)}.$$

2. Soient E un ensemble non vide et A, B et C quatre parties de E. Montrer que
   a. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$.
   b. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Exercice n°2

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ comme suit :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Déterminer la classe d'équivalence de a.
3. En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.
4. À quelle classe d'équivalence appartient le nombre 2022 .

Exercice n°3

1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

Montrer que :
a) $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.
b) $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty\left[, x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.\right.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
b) Cet ordre est-il total ?