Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ année ST
Année universitaire
2023 / 2024

Corrigé de la série de TD n°2 : Ensembles et relations

Exercice n°1

1. On considère les ensembles :

   $B = \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 3\}, E = \{x \in \mathbb{Z}/-5 < x \leq 5\}$ et $A = E \cap \mathbb{N}^*$.

   On détermine $A \cap B$. On a

   $$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}/-3 < x < 3\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

   d'autre part, on a

   $$E = \{x \in \mathbb{Z}/-5 < x \leq 5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

   donc

   $$A = E \cap \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

   ensuite

   $$A \cap B = \{1, 2\}$$

   On détermine : $\complement_E^{A \cup B}$.

   $$\complement_E^{A \cup B} = \{x \in E/x \notin A \cup B\}$$

   comme : $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, d'où

   $$\complement_E^{A \cup B} = \{-4, -3\}$$

   On détermine : $A \backslash B$.

   $$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \backslash \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{3, 4, 5\}$$

   On détermine : $(A \cap B) \cap \complement_E^{A \cap B}$:

   $$(A \cap B) \cap \complement_E^{A \cap B} = \{1, 2\} \cap \{-4, -3, -2, -1, 0, 3, 4, 5\} = \varnothing$$

2. Soient E un ensemble non vide et A, B, C et D quatre parties de E.
   a) Montrons que : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$.
   On suppose que $A \cap B = \emptyset$ et on démontre que : $A \subset C_E B$.
   Soit $x \in A$.

   $$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \notin B \,\text{car}\, A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow x \in C_E B, \end{aligned}$$

   donc $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C_E B$, d'où $A \subset C_E B$.
   Alors, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$

b) Montrons que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.
On a :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \text{ et } (x,y) \in (C \times D) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)
\end{aligned}$$

Donc, $\forall (x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Alors, $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Exercice n°2

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ comme suit :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k.$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
i. Réflexivité de $\mathcal{R}$: Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a

$$x - x = 0 = 3 \times 0.$$

Par conséquent

$$\exists k = 0 \in \mathbb{Z} : x - x = 3k.$$

D'où $x\mathcal{R}x$ et donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
ii. Symétrie de $\mathcal{R}$: Soient $x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y$. On a

$$\begin{aligned}
x\mathcal{R}y &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = -3k \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = 3(-k) \\
&\Rightarrow \exists k' = (-k) \in \mathbb{Z} : y - x = 3k' \\
&\Rightarrow y\mathcal{R}x.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
iii. Transitivité de $\mathcal{R}$: Soient $x, y, z \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Montrons que $x\mathcal{R}z$.

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k \ldots\ldots\ldots(1) \\ \text{et} \\ \exists k' \in \mathbb{Z} : y - z = 3k' \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(1) \text{ et } (2) &\Rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : x - z = 3\,(k + k') \\
&\Rightarrow \exists k'' = (k + k') \in \mathbb{Z} : x - z = 3k'' \\
&\Rightarrow x\mathcal{R}z.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.
Finalement, de i), ii) et iii), $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) Classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \{x \in \mathbb{Z}/x\mathcal{R}a\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}/\exists k \in \mathbb{Z} : x - a = 3k\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}/\exists k \in \mathbb{Z} : x = 3k + a\} \\ &= \{3k + a/k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

c) L'ensemble quotient :

$a = 0, \overline{0} = \{3k/k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots - 6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

$a = 1, \overline{1} = \{3k + 1/k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots - 5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

$a = 2, \overline{2} = \{3k + 2/k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots - 4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

$a = 3, \overline{3} = \{3k + 3/k \in \mathbb{Z}\} = \{3(k + 1)/k \in \mathbb{Z}\} = \{3k'/k' \in \mathbb{Z}\} = \overline{0}.$

$a = -1, \overline{-1} = \{3k - 1/k \in \mathbb{Z}\} = \{3(k - 1) + 2/k \in \mathbb{Z}\} = \{3k' + 2/k' \in \mathbb{Z}\} = \overline{2}.$

$a = -2, \overline{-2} = \overline{1}.$

D'où $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

d) On a $2023 = 3(674) + 1$, donc $2023 \in \overline{1}$.

Exercice n°3

1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :

On a : $0\mathcal{R}2$, car $0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2$. Mais, $2 \not\mathcal{R} 0$, car $2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0$.

b) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique :
On a $0\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}0$, car

$$0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \text{ et } 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0.$$

Mais $0 \neq 1$.
2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty\, [, x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
i) Réflexivité de S ? $(\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[, x\mathcal{S}x)$?
Soit $x \in]\frac{1}{2}, +\infty\, [$. On a : $x^2 - x^2 = 0 = x - x$.
Donc, $x^2 - x^2 \leq x - x$.
Par la suite, $\forall x \in]\, \frac{1}{2}; +\infty[, x\mathcal{S}x$.
D'où, $\mathcal{S}$ est une relation réflexive.

ii) Antisymétrie de S ? $(\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y)$?
Soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ et on démontre $x = y$.
On a

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ x^2 - y^2 \geq x - y \end{cases}$$

Par la suite, $x^2 - y^2 = x - y$.
On a :

$$x^2 - y^2 = x - y \Longrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0.$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ ou} \\ x = 1 - y \text{ (impossible, car } x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[). \end{cases}$$

Donc, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y$.
D'où la relation $\mathcal{S}$ est antisymétrique.
iii) Transitivité de S : $(\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z)$?
Soient $x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$ et on démontre $x\mathcal{S}z$.
On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{S}z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{cases}$$
$$\Longrightarrow x^2 - z^2 \leq x - z.$$

Donc, $\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z$.
D'où la relation $\mathcal{S}$ est transitive
De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
b) Cet ordre est total.
En effet, soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.
On a : $x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $x^2 - y^2 \geq x - y$.
donc, $x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $y^2 - x^2 \leq y - x$.
d'où, $x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$.
Alors, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$: $x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$.