Université de A/MIRA de Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie $1^{\text{ère}}$ année

Année universitaire : 2023/2024
MATHS1 Septembre 2023

Séris de TD N°01 : Logique et raisonnement mathématiques

Exercice n°1 . Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations

1) $(2 < 3) \wedge (2 \;\; divise \;\; 4)$; 2)$(9 = 2^3) \vee (6 \;\; est\ impair)$
3) $\exists x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*; xy = 1$; 4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; xy > 0$;
5)$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x + y > 0$, 6)$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.

Exercice n°2 . Soient P, Q et R trois propositions. En utilisant la table de vérité, montrer que :

1. $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$
2. $non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$
3. $\overline{P \vee (Q \wedge R)} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, et considérons la proposition

$$S : (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2).$$

a) Donner la négation de la proposition S.
b) Montrer que la proposition S est vraie.

Exercice n°3 .

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. En utilisant le raisonnement direct, montrer que

$$\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par l'absurde que

$$\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Montrer par contraposition que

$$(x \neq 2) \wedge (y \neq 1) \Longrightarrow xy - x - 2y \neq -2.$$

Exercice n°4 . En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ divisible par 9.
3. On considère les propositions suivantes :

$$P(n) : (4^n - 1 \;\; \text{divisible par} \;\; 3)$$

$$Q(n) : (4^n + 1 \;\; \text{divisible par} \;\; 3)$$

a)Montrer que $P(n)$ et $Q(n)$ sont héréditaires.
b)Montrer que $P(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
c)Que peut-on dire de $Q(n)$?.