Université de A/MIRA de Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie $1^{\text{ère}}$ année

Année universitaire : 2022/2023
MATHS1 Octobre 2022

Corrigé de la séris de TD N°01 : Logique et raisonnement mathématiques

Exercice n°1 .

1) La proposition est vraie
La négation :

$$(2 \geq 3) \vee (2 \quad ne\ divise\ pas \quad 4)$$

2)Fausse
La négation :

$$(9 \neq 2^3) \wedge (6 \quad est\ pair)$$

3)Vraie
La négation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*; xy \neq 1$$

4)Fausse
La négation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; xy \leq 0$$

5)Vraie
La négation :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; x + y \leq 0.$$

6) Vraie
La négation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0.$$

Exercice n°2 . Soient P, Q et R trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrons que

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

On remarque de cette table de vérité que les propositions $(P \Longrightarrow Q)$ et $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$ ont la même valeur de vérité (Dans tout les cas,nles propositions sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses),donc elles sont équivalentes.

2. Montrons maintenant que
$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$$

P	Q	$\overline{Q}$	$P \wedge \overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$non(P \Longrightarrow Q)$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0

On remarque que dans tout les cas les propositions sont de même nature(vraies ou fausses simultanément), donc eLles sont équivalentes.

3. Montrons aussi que :
$$\overline{P \vee (Q \wedge R)} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$$

P	Q	R	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{R}$	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$non(P \vee (Q \wedge R))$	$\overline{Q} \vee \overline{R}$	$\overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1

On remarque aussi que les propositions $\overline{(P \vee (Q \wedge R))}$ et $\overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$ sont dans tout les cas de même nature, donc équivalentes.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, et considérons la proposition
$$S : "(n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2)"$$

(a) Donnons la négation de la proposition S.
$$\overline{S} : "[(n^2 \neq n) \wedge (n < 2)]".$$

(b) Montrons que la proposition S est vraie. Il suffit de montrer que la proposition $\overline{S}$ est fausse. En effet la proposition $(n < 2)$ est vrai si $n = 0$ ou $n = 1$. Mais dans ces deux cas, on a bien $n^2 = n$. Cest à dire que la proposition
$$\overline{S} : "[(n^2 \neq n) \wedge (n < 2)]"$$
est fausse. Par suite, la proposition S est vraie.

Exercice n°3 .

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. En utilisant le raisonnement direct, montrons que
$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

. On suppose que "$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$" est vraie. est ce que c'est vraie pour "$x = 0$" ?
On a $(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) = 1 \Longrightarrow 1 - x = 1$ donc $x = 0$ est vraie.

2. On raisonne par l'absurde. On suppose que

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\exists k \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2+1} = k \\
\Longrightarrow &\exists k \in \mathbb{N}^* : 1 = k^2 - n^2 \\
\Longrightarrow &\exists k \in \mathbb{N}^* : 1 = (k-n)(k+n) \\
\Longrightarrow &\exists k \in \mathbb{N}^* : k-n = \frac{1}{k+n}.
\end{aligned}$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
0 < \frac{1}{k+n} < 1 &\Longrightarrow 0 < k-n < 1 \\
&\Longrightarrow n < k < n+1,
\end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction (car il n'existe pas un entier entre deux entiers consécutifs).
D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}.$$

3. En raisonnant par contraposition, montrons pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$ que :

$$(x \neq 2) \wedge (y \neq 1) \Longrightarrow xy - x - 2y \neq -2$$

Donc ça revient a montrer que :

$$xy - x - 2y = -2 \Longrightarrow (x = 2) \vee (y = 1)$$

si $xy - x - 2y = -2 \Longrightarrow xy - x - 2y + 2 = 0$ par suite
$y(x-2) - (x-2) = 0 \Longrightarrow (x-2)(y-1) = 0$
Alors $x = 2$ ou $y = 1$, d'où le résultat.

Exercice n°4. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrons que

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Etape 1 (Initialisation) : Si $n = 1$ alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1$ et $\dfrac{1^2 \times (1+1)^2}{4} = 1$

La propriété est vraie au rang 1

Etape 2 On suppose que la propriété est vraie au rang n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \\
&= S_n + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\
&= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Etape 3 (Conclusion) : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire.

Par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$, on a alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^n - 1$.
Il s'agit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : 10^n - 1 = 9k$$

Etape 1 (Initialisation) : Pour $n = 0$, on a : $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9 \times 0$. $P(0)$ est donc vraie, avec $P(n)$: 9 divise $10^n - 1$

Etape 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire
$\exists k \in \mathbb{N} : \quad 10^n - 1 = 9k$
Et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire
$\exists k' \in \mathbb{N} : \quad 10^{n+1} - 1 = 9k'$
On a

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 &= 10^{n+1} - 10 + 9 \\ &= 10.10^n - 10 + 9 \\ &= 10(10^n - 1) + 9 \\ &= 10 \times 9k + 9 \quad \text{(car } P(n) \text{ est vraie)} \\ &= 9k' \quad \text{avec} \quad k' = (10k+1) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Etape 3 ((Conclusion) : Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, 9 divise $10^n - 1$

3. Soient

$$P(n) : (4^n - 1 \text{ divisible par } 3)$$

$$Q(n) : (4^n + 1 \text{ divisible par } 3)$$

a)Montrer que $P(n)$ et $Q(n)$ sont héréditaires.
Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain n,c'est-à-dire ; $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $4^n - 1 = 3k$, et montrons que $P(n+1)$ reste vraie c'est-à-dire

$$\exists ? k' \in \mathbb{N} : 4^{n+1} - 1 = 3k'$$

on a
$4^{n+1} - 1 = 4.4^n - 1 = 4.(3k+1) - 1$
$4^{n+1} - 1 = 3.4k + 3 = 3(4k+1) = 3k'$
donc $P(n)$ est héréditaire ;
de même pour $Q(n)$, si on suppose que $\exists k : 4^n + 1 = 3k \Longrightarrow 4^n = 3k - 1$.
D'autre part on a,$4^{n+1} + 1 = 4.4^n + 1$ donc
$4^{n+1} + 1 = 4.(3k-1) + 1 = 3(4k-1) = 3k'$ (avec $k' = 4k - 1$).
ce qui montre que $Q(n)$ est ausssi héréditaire.
b) Pour $n = 0, 4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3.0$ donc $P(0)$ est vraie, et avec a) on conclut que :
$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$ est vraie.
c) On remarque par exemple pour $n = 0, 1, 2.....$, $Q(n)$ n'est jamais vérifiée.