Chapitre IV

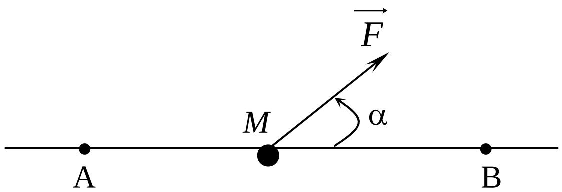
Travail, Puissance et Energie

I. Travail d’une force

I. 1. Force constante sur un déplacement rectiligne

Soit une force constante agissant sur un point matériel M. Sous l’effet de $\vec{F}$, M se déplace entre les points A et B.

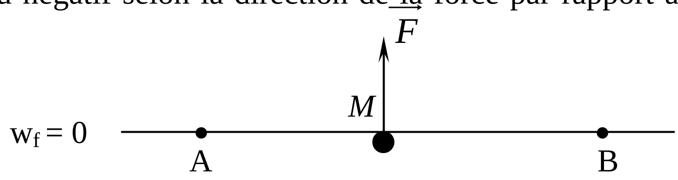
Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacement rectiligne AB est donné par :

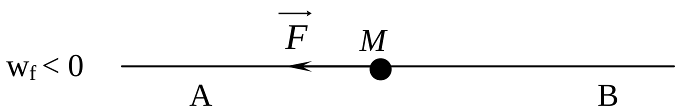


$$w_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{AB} = F\cdot AB\cdot\cos\alpha ,$$ α est l’angle que fait $\vec{F}$ avec $\vec{AB}$

Remarque

Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force par rapport au déplacement.



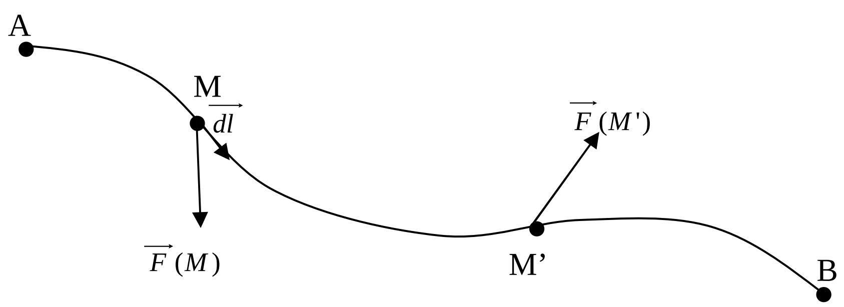


L'unité de travail, dans le système MKSA, est le **Joule**.

I. 2. Travail élémentaire

Dans le cas où la force $\vec{F}$ varie au cours de déplacement qui peut être quelconque, il n'est plus possible d'utiliser l'expression précédente.

On décompose le trajet AB en une succession de déplacements élémentaires $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$ infiniment petits et donc rectilignes.



Sur $\overrightarrow{MM'}$, la force $\vec{F}$ peut être considéré comme constante ; alors on définit le travail élémentaire donné par :

$$dw_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

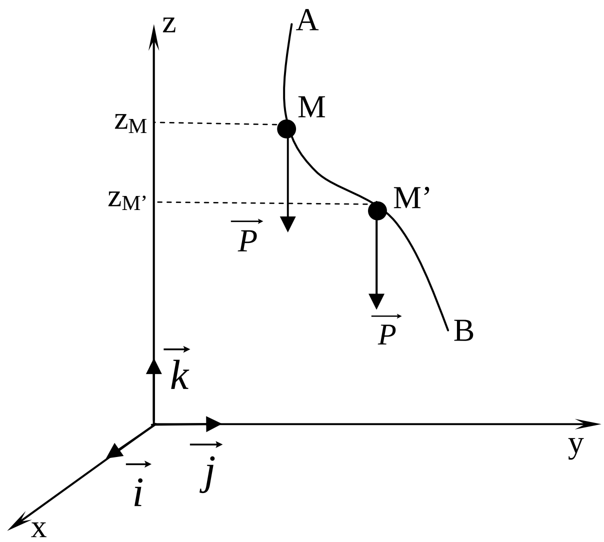
I. 3. Force variable sur un déplacement quelconque

Pour obtenir le travail total sur le déplacement total,

il suffit d'additionner les travaux élémentaires.

$$w_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

I. 4. Travail de la force de pesanteur



$h = z_M - z_{M'}$

$$w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P} \cdot \vec{dl}$$

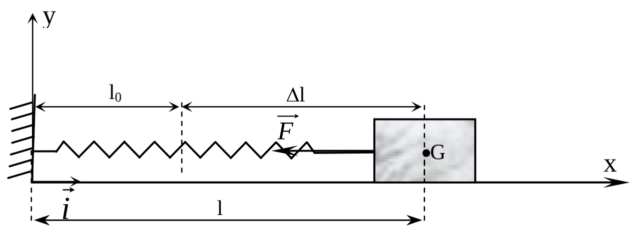
et $\vec{P} = -P\vec{k}$, $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}\,\vec{dl} = -P\,dz$$

donc, $w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P} \cdot \vec{dl} = \int_M^{M'} -P dz = -P(z_{M'} - z_M)$

$$\Rightarrow \quad w_{\vec{P}} = P(z_M - z_{M'}) = P\,h = mg\,h$$

I. 5. Travail d'une force élastique



$$\vec{F} = -k\,\Delta l\vec{i} = -k(l - l_0)\vec{i}$$
$$= -k\,x\vec{i}$$

$$dw_{\vec{F}} = \vec{F}\,\vec{dl} = -kx\vec{i}\,dx\vec{i} = -kxdx = -d(\frac{1}{2}kx^2)$$

Lorsque $\vec{F}$ passe d'une position x_1 à x_2 , on a :

$$w_{\vec{F}} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\,\vec{dl} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}k\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right)$$

II. puissance d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ est le rapport du travail de celle-ci au temps mis pour l'accomplir. Selon la durée considérée, cette puissance est dite moyenne ou instantanée. L'unité de la puissance, dans le système MKSA, est le Watt.

Puissance moyenne : $P_{moy} = \dfrac{\Delta w_{\vec{F}}}{\Delta t}$

Puissance instantanée : $P(t) = \dfrac{dw_{\vec{F}}}{dt}$

III. Energie

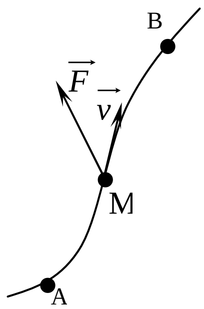
III. 1. Energie cinétique

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel *M*, de masse *m* et animé avec une vitesse $\vec{v}$, par la grandeur E_c, telle que,

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$$

Soit un point matériel *M*, de masse m, en déplacement entre les points *A* et *B* sous l'action d'une force extérieure $\vec{F}$. Selon le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donné par :

$$dw_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

car $\vec{v}(t) = \dfrac{\overrightarrow{dl}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{dl} = \cdot\, \vec{v}(t)\, dt$

il vient $$dw_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

Le travail effectué entre les points *A* et *B* sera :

$$w_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \int_A^B dE_c = E_c(B) - E_c(A)$$

III.2. Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une autre position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$E_c(B) - E_C(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{ext}})$$

III. 3. Forces conservatrices et non conservatrices

Les forces sont dites conservatrices lorsque leur travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

<u>Exemples</u>

- force de pesanteur ;
- force du poids ;
- force de rappel des ressorts.

Les forces sont dites non conservatrices ou forces vives lorsque leur travail dépend du chemin suivi.

<u>Exemple</u>

Force de frottement.

III. 4. Energie potentielle

Par définition, le travail des forces conservatrices ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Le travail de ces forces peut s'exprimer à partir d'une <u>*fonction d'état*</u> appelée <u>*énergie potentielle*</u> E_p

$$E_p(B) - E_p(A) = -w_{AB}(\overrightarrow{F_c}),$$

avec $\overrightarrow{F_c}$: force conservatrice.

$$\Delta E_p = -w_{AB}(\overrightarrow{F_c})$$

Lorsque la variation est très faible, $\Delta E_p \to dE_p$.

En utilisant la notion du travail élémentaire, on a :

$$dE_p = -\overrightarrow{F_c} \cdot \overrightarrow{dl}$$

D'autre part, soit le gradient ($\overrightarrow{grad}$) d'une fonction f défini par :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

La différentielle totale de f est donnée par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

On définit un point M, repéré dans le référentiel Oxyz par son vecteur $\overrightarrow{OM}$, tel que,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{i} + dz\vec{k}$$

Alors

$$\overrightarrow{grad}\, f \cdot d\overrightarrow{OM} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Il vient, $\overrightarrow{grad} f \cdot d\overrightarrow{OM} = df$ ✦

A partir de l'équation (✦), on peut facilement remarquer que puisque

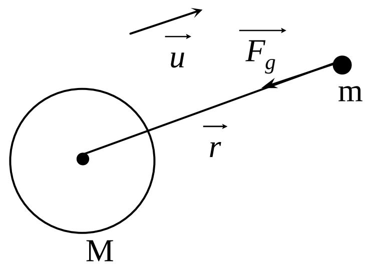
$$dE_p = -\overrightarrow{F_c} \cdot \overrightarrow{dl} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{i} + dz\,\vec{k}$$

alors,

$$\boxed{\overrightarrow{F_c} = -\overrightarrow{grad}\, E_p}$$

IV. 5. Exemples de forces conservatrices

✓ *Force gravitationnelle*



$\overrightarrow{F_g}$ est une force conservatrice.

$$\overrightarrow{F_g}(r) = -G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}$$

$$= -G\frac{M\,m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

avec $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{F_g} = -G\frac{M\,m}{r^3}\vec{r}$$

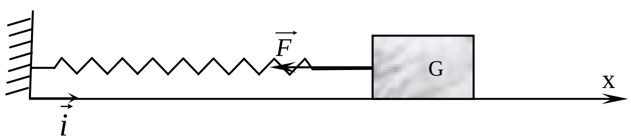
$$\overrightarrow{F_g} = -\overrightarrow{grad}\, E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dr} = G\frac{M\,m}{r^2}$$

$$E_p(r) = \int G\frac{M\,m}{r^2}dr$$

$$\Rightarrow \quad E_p(r) = G\frac{M\,m}{r} + cste$$

✓ *Force élastique*



$$\vec{F} = -k\,x\vec{i}$$

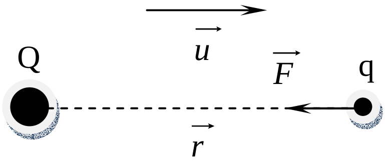
$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dx} = k\,x$$

$$\Rightarrow \quad E_p = \int k\,x\,dx = \frac{1}{2}k\,x^2 + cste$$

✓ *Force électrique*

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2} = K\frac{Qq}{r^2}$$



En suivant le même raisonnement que précédemment, on aura :

$$E_p = -kQq\frac{1}{r} + cste$$

III. 6. Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatrices et non conservatrices. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$E_c(B) - E_C(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_C}) + \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

$\overrightarrow{F_C}$: Force conservatrice ;

$\overrightarrow{F_{NC}}$: Force non conservatrice.

Alors $\quad E_c(B) - E_C(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) + \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$

puisque $\quad \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_C}) = \left(E_p(A) - E_p(B)\right)$

il vient $\quad E_c(B) + E_p(B) - \left(E_C(A) + E_p(A)\right) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$

On introduit une nouvelle quantité qu'on va l'appeler <u>*Energie Total*</u> du système Symbolisée par (E), telle que,

$$E = E_c + E_p = Energie\,Cinétique + Energie\,Potentielle$$

Alors, entre les deux points A et B

$$E(B) - E(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

Théorème de l'énergie mécanique totale

La variation de l'énergie mécanique totale d'un système, en mouvement entre deux points *A* et *B*, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatrices appliquées à ce système,

$$E(B) - E(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

Cependant, lorsque le système est isolé (c'est dire, il ne subit aucune force extérieure non conservatrice) l'énergie totale se conserve.

V. Stabilité d'un système

V. 1. Définition de la stabilité

Pour un système soumis uniquement à une force conservatrice $\overrightarrow{F_c}$, il est intéressant de savoir s'il existe ou pas des états d'équilibre. La forme locale de l'énergie potentielle permet d'écrire que:

$$\overrightarrow{F_c} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

Dans le cas où l'énergie ne dépend que d'une variable x, cela revient à dire que:

$$\overrightarrow{F_c} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

La condition d'équilibre, pour l'importe quel système soumis à un ensemble de forces, est que la somme ou la résultante de l'ensemble des forces est égale à zéro ($\sum \vec{F} = \vec{0}$). Dans le cas d'un système soumis uniquement à une force conservatrice $\overrightarrow{F_c}$, celle-ci devrait être nulle, il vient:

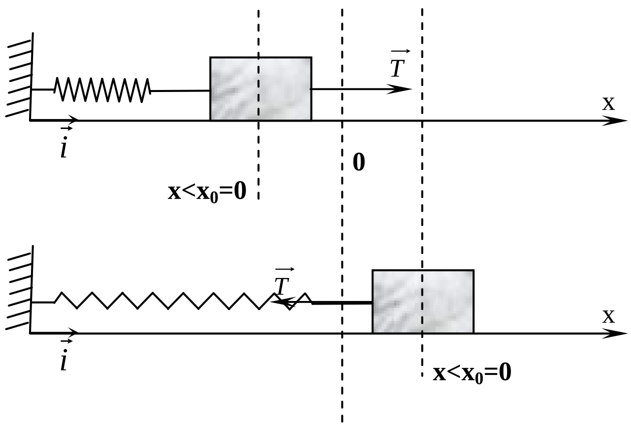
$$F_c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dE_p}{dx} = 0$$

Une position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction énergie potentielle. En d'autre terme, l'énergie potentielle devrait être maximale ou minimale pour qu le système soit en équilibre.

Un équilibre est dit **stable** si, à la suite d'une perturbation qui a éloigné le système de cette position, celle-ci y retourne spontanément. Dans le cas contraire, l'équilibre est dit **instable**.

V. 2. Condition de stabilité

Soit le cas de la figure ci-dessous, cas où l'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x.



Position d'équilibre $\mathbf{x_0=0}$

Supposant que la dérivée de l'énergie potentielle à x_0 est nulle ($\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$). Pour une perturbation amenant le système à $x<x_0$, la valeur algébrique de la force doit être positive pour ramener le système vers x_0 $F_c > 0$ donc,

$$\frac{dE_p}{dx} < 0 \qquad \textit{puisque} \qquad F_c = -\frac{dE_p}{dx}$$

Dans le cas contraire $x>x_0$, la force doit être négative et donc $\frac{dE_p}{dx} > 0$.

L'énergie potentielle E_p décroît avant x_0 et est croissante après x_0. Elle présente donc un minimum pour $x=x_0$.

Dans ce cas, la fonction $\frac{dE_p}{dx}$ est une fonction croissante qui s'annule pour $x=x_0$. La condition de stabilité, c'est-à-dire, E_p minimale, peut donc se traduire par $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ au voisinage de x_0 et donc pour $x=x_0$. Dans le cas contraire, la position sera une position d'équilibre instable.

Equilibre stable pour $x=x_0$ $\Leftrightarrow$ $E_p(x_0)$ minimale

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad et \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0$$

Equilibre instable pour $x=x_0$ $\Leftrightarrow$ $E_p(x_0)$ maximale

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad et \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0$$

Un système, livré à lui-même, évolue spontanément vers un état d'équilibre qui correspond à une position pour laquelle l'énergie potentielle est minimale.

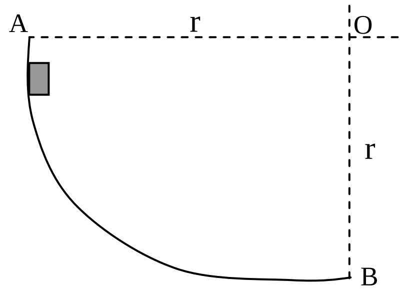
VI. Applications

Exercice 01

Un solide de masse m=500 g peut glisser sans frottement sur une piste circulaire de rayon r=1 m (Fig. 01). Il part d'un point A sans vitesse initiale.

1. Déterminer la vitesse du solide au point B.
2. En réalité, la vitesse en B est de 3,5 ms^{-1}. Déterminer le travail des forces de frottement puis en déduire l'intensité, supposée constante, de la résultante des ces forces de frottement.

Fig. 01



Exercice 02

Dans un référentiel galiléen, un point matériel M, de masse m, considéré comme ponctuel, peut coulisser sans frottement sur une tige rigide horizontale fixe x'Ox (Fig. 02). Cette masse est attachée à l'extrémité d'un ressort, de masse négligeable, fixé en un point fixe A, distant de OA = h_0 de l'axe x'Ox. La position instantanée de la masse sur la tige est notée OM = x. La longueur au repos du ressort est l_0, et sa raideur est k. On se place dans un cas où : $l_0 < h_0$.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle U(x) de la masse m, en fonction de k, h_0, l_0 et x. On prendra U(x) = 0 pour x = 0.

2. Représenter schématiquement la fonction U(x) en fonction de x. Déterminer la position d'équilibre de x_e de la masse m. Cet équilibre est-il stable ou instable ?

Fig. 02