

CHAPITRE I

DIMENSIONS ET UNITES

RAPPEL DE COURS

La mécanique utilise des formules mathématiques qui relient des grandeurs physiques. Toute **grandeur physique** G a une **dimension** notée $[G]$ et est mesurée dans une **unité**.

En mécanique, le système d'unités est constitué des unités fondamentales relatives aux grandeurs longueur, masse et temps. A l'aide de ces unités fondamentales on construit les unités dérivées relatives aux grandeurs de vitesse, accélération, force, travail...

La grandeur de longueur est désignée par $[L]$, celle de la masse par $[M]$ et celle du temps par $[T]$. Les expressions obtenues de n'importe quelle autre grandeur G en fonction de ces grandeurs fondamentales constituent les **équations aux dimensions** qui prennent la forme suivante :

$$[G] = L^a T^b M^c$$

EXERCICE I-1

Déterminer (ρ) , la masse volumique de l'eau dans le système international (SI), sachant qu'elle vaut 1 gcm^{-3} dans le système CGS.

EXERCICE I-2

Ecrire l'équation aux dimensions:

- d'une force;
- d'un travail d'une force;
- d'une puissance.

En déduire le facteur de conversion α permettant de passer de l'unité de puissance CGS à l'unité de puissance SI.

EXERCICE I-3

Une balle de masse m , considérée comme un point matériel est lancée verticalement vers le haut. Elle subit des forces de frottements d'expression :

$$\vec{f} = -k \vec{v}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point matériel et k est le coefficient de frottement.

- a) Ecrire l'équation aux dimensions du coefficient de frottement k .
- b) En déduire l'unité du coefficient de frottement dans le système international SI.

EXERCICE I-4

La vitesse des ondes dans un fluide dépend de deux paramètres: la densité de ce fluide ρ et le module de compressibilité appelé aussi bulk modulus B . On peut écrire donc: $V \propto \rho^a B^b$ (1)

- a) Ecrire l'équation aux dimensions de la vitesse.
- b) Ecrire l'équation aux dimensions de la densité.

- c) Sachant que l'unité de B est celle d'une pression (force par surface), écrire l'équation aux dimensions de B.
- d) Ecrire l'équation aux dimensions de l'expression (1). En déduire a et b.
- e) Trouver la relation de proportionnalité reliant la vitesse des ondes V à la densité du fluide et au bulk modulus.

EXERCICE I-5

La fréquence ν d'un dispositif tournant dépend (à priori) de son rayon R, de sa densité de masse ρ et de la constante gravitationnelle G. Donc :

$$\nu \propto R^a \rho^b G^c \quad (2)$$

- a) Ecrire l'équation aux dimensions de la fréquence ν .
- b) Ecrire l'équation aux dimensions du rayon R.
- c) Ecrire l'équation aux dimensions de la densité de masse ρ .
- d) A partir de la loi donnant la force de gravitation, écrire l'équation aux dimensions de la constante gravitationnelle G.
- e) Ecrire l'équation aux dimensions de l'expression (2). En déduire a, b et c.
- f) Trouver la relation de proportionnalité reliant la fréquence ν au rayon R, la densité de masse ρ et la constante gravitationnelle G.

EXERCICE I-6

Le kilogramme, le mètre et la seconde sont les unités de base du système international SI. Le joule est l'unité du travail dans ce même système. Parmi les unités suivantes, trouver celle (s) équivalente (s) au joule :

$$\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2} \quad \text{kg m s}^{-1} \quad \text{kg m s}^{-2} \quad \text{kg m}^2 \text{s}^{-1} \quad \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$$

EXERCICE I-7

Soit la formule suivante : $x = 3\gamma t^2 + vt + h$

où γ est une accélération, t le temps, v une vitesse et x et h sont deux longueurs.

- Quelle est la dimension et l'unité du terme $3\gamma t^2$.
- Quelle est la dimension et l'unité du terme vt .
- Quelle est la dimension et l'unité de l'expression du membre droit.
- Vérifier l'homogénéité de cette formule.

EXERCICE I-8

Un pendule simple est constitué d'un point matériel de masse m suspendu à un fil inextensible de longueur l .

La période T du pendule simple est liée à m , l et g (l'accélération de la pesanteur) par la relation :

$$T = C m^a l^b g^d \quad \text{où } C \text{ est une constante sans dimensions} \\ (2\pi)$$

- Ecrire l'équation aux dimensions de l'expression de la période du pendule.
- Déterminer a , b et d .
- En déduire l'expression de la période T du pendule simple.

EXERCICE I-9

Une bille de rayon r assimilée à un point matériel en mouvement dans un fluide, subit une force de frottement donnée par : $\vec{F}_f = -6\pi\eta r \vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la bille et η la viscosité du fluide.

- Ecrire l'équation aux dimensions de la viscosité du fluide.
- En déduire son unité.

EXERCICE I-10

Soit l'expression suivante d'une force : $F = 0,5 \rho S C_x v^2$ où ρ est une masse volumique, S une surface et v une vitesse.

Déterminer la dimension et l'unité du coefficient C_x .

EXERCICE I-11

La résistance de l'air est une force de frottement de forme $F = -k v^2$ agit sur un point matériel M de masse m .

où k est une constante et v la vitesse du point M .

On pose $\tau = \frac{m}{k v}$.

Quelle est la dimension de τ ?

EXERCICE I-12

Déterminer les unités des expressions suivantes :

$$\frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \quad m g v \cos \theta \quad m g l \sin \theta \quad \frac{F}{x} \quad \frac{1}{2} k (x - l)^2$$

où m est une masse; r , x et l des distances; g est le champ de pesanteur terrestre; ω est une vitesse angulaire; k est la raideur d'un ressort, F est une force, θ un angle et v une vitesse.

EXERCICE I-13

L'accélération de la pesanteur à la surface de la terre est donnée par l'expression :

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

où : g est l'accélération de la pesanteur ;

G est la constante de gravitation universelle ;

M est la masse de la terre ;

R est le rayon de la terre.

Quelle est l'unité de G ?

EXERCICE I-14

La loi de Stefan donne la puissance P du rayonnement émis par un corps noir en fonction de sa surface S , de sa température T (en Kelvin) et d'une constante σ appelée constante de Stefan :

$$P = \sigma S T^4$$

Déduire l'unité de la constante de Stefan.

EXERCICE I-15

En faisant une analyse dimensionnelle, discuter la validité des égalités suivantes:

$$x = \frac{(l^2 - d)}{d} \quad \text{où } x, l \text{ et } d \text{ sont des distances;}$$

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{où } t \text{ et } \tau \text{ sont des temps;}$$

$$v = \frac{g}{l} \cos \left[\omega \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad \text{où } l \text{ est une longueur, } g \text{ l'accélération de la pesanteur et } \omega \text{ une pulsation.}$$

EXERCICE I-16

Un point matériel de masse m oscille à l'extrémité d'un ressort horizontal de constante de raideur k avec une amplitude X_0 . Sa période T dépend de m , k et X_0 .

Déterminer l'expression de T .