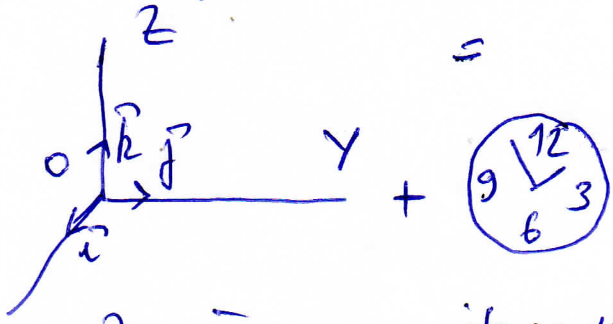
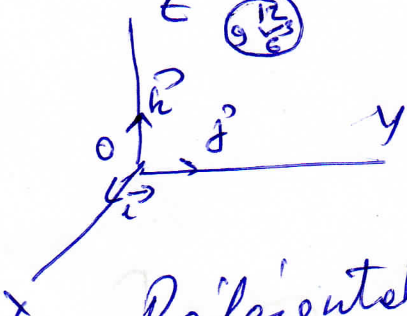
Cinématique : Les mouvements relatifs.

1. Changement de référentiels.

Un référentiel = Repère + horloge.

=



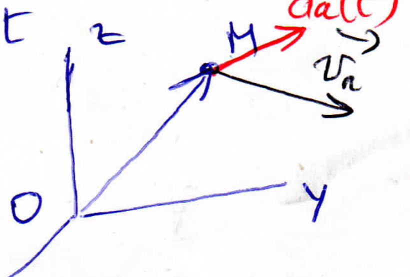


Repère + temps = Référentiel.

Le mouvement de M dans un référentiel donné $R(O,x,y,z)$ est connu (position, vitesse, accélération). On veut déterminer le mvt de M dans un autre référentiel $R'(O',x',y',z')$.

Soit $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un référentiel fixe (il est **absolu**) dans lequel :

* vecteur-position : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
* Vecteur-vitesse absolue : $\vec{v}_a = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$
* Vecteur-accélération absolue : $\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$



Soit un 2ᵉ référentiel $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ qui est en mouvement par rapport à $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
$R'(O'; \vec{i}'; \vec{j}'; \vec{k}')$ est un <u>référentiel relatif</u>

Dans $R'(O'; \vec{i}'; \vec{j}', \vec{k}')$ on définit :

* Vecteur-position : $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$.
* Vecteur-vitesse relative : $\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'$
* Vecteur-accélération relative : $\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'$

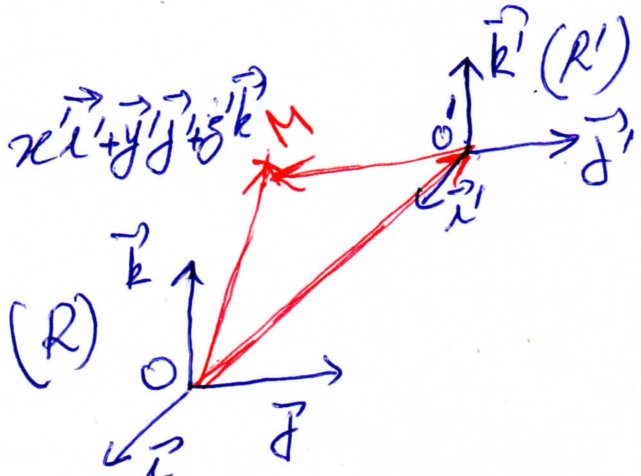
Définitions :

* $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ = référentiel <u>absolu</u>
* $R'(O'; \vec{i}'; \vec{j}', \vec{k}')$ = " <u>relatif</u>
* Mouvement <u>absolu</u> = Mouvement de M par rapport à R
* " <u>relatif</u> = Mvt de M par rapport à R'
* Mvt de $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par rapport à $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ = mvt. d'<u>entraînement</u>

2- <u>Relations entre les positions</u> :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$



Relation entre les vitesses :

On a : $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{O'M}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v_a} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right)$$

$R'(O;\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$ est en mvt $\Rightarrow$ les vecteurs $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ et $\vec{k'}$ ne sont pas constants dans le temps.

$\Rightarrow \frac{d\vec{i'}}{dt} \neq \vec{0}$. les dérivées ne sont pas nulles.

$$\vec{v_a} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v_a} = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right) + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v_a} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + \dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'}$$

$$\Rightarrow \vec{v_a} = \left[\frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right] + \vec{v_r}$$

$$\boxed{\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}}$$

avec $\vec{v_e} = \left[\frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right]$ = vitesse d'entrainement

c'est la vitesse d'entrainement de (R') par rapport à (R).

si M' st immobile dans (R'), $\vec{V_e} = \vec{V_a}$.

On avait défini le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par la relation :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}.$$

Pour les vecteurs unitaires $(\vec{i'})$, $(\vec{j'})$ et $(\vec{k'})$ cette relation st toujours valable :

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i'}$$

$$\frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j'}$$

$$\frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'}$$

$\vec{\omega}$ = vecteur - vitesse de rotation

⚠ $\vec{\omega}$ n'st pas la vitesse de rotation de O' dans (R) ; mais la vitesse de rotation des vecteurs $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ et $\vec{k'}$ dans (R').

On peut écrire :

$$\vec{V_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x'(\vec{\omega} \wedge \vec{i'}) + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{j'}) + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k'})$$

$$\vec{V_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge x'\vec{i'}) + (\vec{\omega} \wedge y'\vec{j'}) + (\vec{\omega} \wedge z'\vec{k'})$$

$$\vec{V_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})$$

$$\vec{V_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M}.$$

$$\Rightarrow \vec{V_e} = \underbrace{\frac{d\vec{OO'}}{dt}}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}}_{\text{Rotation}}$$

Donc la vitesse d'entraînement $\vec{V_e}$ est composée d'une vitesse de translation $\left(\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)$ de l'origine O' dans (R) et des vitesses de rotation des axes de (R') par rapport à (R). $(\vec{\omega} \wedge \vec{O'M})$

Cas particuliers

- Si M est fixe dans (R') $\Rightarrow \vec{V_r} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V_a} = \vec{V_e}$
- Si R' est fixe par rapport à (R) $\Rightarrow \vec{V_e} = \vec{0}$
  $\Rightarrow \vec{V_a} = \vec{V_r}$.
- Si (R') est en mvt rectiligne uniforme (pas de rotation) $\Rightarrow \vec{V_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}$.
  $\vec{\omega} \wedge \vec{O'M} = \vec{0}$.

Relation entre les accélérations :

L'expression de la vitesse absolue est donné par :

$$\vec{V_a} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \left(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'\right)$$

L'accélération absolue est :

$$\vec{a_a} = \frac{d\vec{V_a}}{dt} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'\right).$$

$$\vec{a_a} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}'}{dt} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$$
$$+ \frac{d\dot{x}'}{dt}\vec{i}' + \dot{x}'\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{d\dot{y}'}{dt}\vec{j}' + \dot{y}'\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{d\dot{z}'}{dt}\vec{k}' + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$\vec{a_a} = \underbrace{\left[\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt^2}\right]}_{\vec{a_e}} + \underbrace{2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)}_{\vec{a_c}}$$
$$+ \underbrace{\left(\ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'\right)}_{\vec{a_r}}$$

Donc $\vec{a_a} = \vec{a_e} + \vec{a_c} + \vec{a_r}$

où

$\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$ = accélération d'entrainement

$\vec{a_c} = 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$ = accélération complémentaire ou accélération de Coriolis

$\vec{a_a}$ = accélération absolue

$\vec{a_r} = \left(\ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'\right)$ = accélération relative.

Accélération de Coriolis

$$\vec{a_c} = 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$= 2\left[\dot{x}'(\vec{\omega}\wedge\vec{i'}) + \dot{y}'(\vec{\omega}\wedge\vec{j'}) + \dot{z}'(\vec{\omega}\wedge\vec{k'})\right]$$

$$= 2\left[(\vec{\omega}\wedge\dot{x}'\vec{i'}) + (\vec{\omega}\wedge\dot{y}'\vec{j'}) + (\vec{\omega}\wedge\dot{z}'\vec{k'})\right]$$

$$= 2\left[\vec{\omega}\wedge(\dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'})\right]$$

$$= 2\,\vec{\omega}\wedge\vec{v_r}$$

donc $\boxed{\vec{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v_r}}$

Accélération d'entraînement:

$$\vec{a_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i'}}{dt}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{j'}}{dt}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{i'}) + y'\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{j'}) + z'\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{k'})$$

$$= \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{i'} + \vec{\omega}\frac{d\vec{i'}}{dt}\right) + y'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{j'} + \vec{\omega}\frac{d\vec{j'}}{dt}\right)$$
$$+ z'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{k'} + \vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{i'}\right) + y'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{j'}\right) + z'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{k'}\right)$$
$$+ x'\left(\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{i'}}{dt}\right) + y'\left(\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{j'}}{dt}\right) + z'\left(\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{k'}}{dt}\right).$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge x'\vec{i'}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge y'\vec{j'}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge z'\vec{k'}\right)$$
$$+ x'\left(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{i'})\right) + y'\left(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{j'})\right) +$$
$$+ z'\left(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{k'})\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})\right]$$
$$+ \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge x'\vec{i'}) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge y'\vec{j'}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge z'\vec{k'})$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge (x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{a}_a = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})\right] + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{a}_r}$$

Cas particuliers :

* si M est fixe dans (R') $\Rightarrow \vec{v}_r = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a}_r = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e$.

* Si les axes de (R') ne tournent pas par rapport à (R) (il y a uniquement la translation) $\Rightarrow$

$$\vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a_c} = \vec{0} \text{ et } \vec{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}.$$

$$\Rightarrow \vec{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{a_r}.$$

Si la translation est uniforme :

$$\Rightarrow \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a_a} = \vec{a_r}$$

Les accélérations mesurées dans (R) et (R') sont les mêmes ($\vec{a_a} = \vec{a_r}$).

exemple :

Les coordonnées d'un point mobile M dans (R) sont données en fonction de temps par :

$$\begin{cases} x(t) = 2t^3 + 1 \\ y(t) = 4t^2 + t + 1 \\ z(t) = t^2 \end{cases}$$

Dans un second référentiel (R') tq $\vec{i'} = \vec{i}$, $\vec{j'} = \vec{j}$ et $\vec{k'} = \vec{k}$) ces coordonnées sont données par :

$$\begin{cases} x'(t) = 2t^3 \\ y'(t) = 4t^2 - 3t + 2 \\ z'(t) = t^2 - 5 \end{cases}$$

(1) Exprimer la vitesse v de M dans (R) en fn de sa vitesse v' dans (R'). Même chose pour l'accélération

(2) Définir le mvt d'entraînement de (R') par rapport à (R).

Solution

① Les positions de M :

Dans (R) : $\vec{OM}$ $\begin{cases} x = 2t^3+1 \\ y = 4t^2+t-1 \\ z = t^2 \end{cases}$

Dans (R') : $\vec{O'M}$ $\begin{cases} x' = 2t^3 \\ y' = 4t^2-3t+2 \\ z' = t^2-5 \end{cases}$

Les vitesses de M :

Dans (R) : $\vec{v} = \vec{v_a} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = 6t^2\vec{i} + (8t+1)\vec{j} + 2t\vec{k}$

Dans (R') : $\vec{v'} = \vec{v_r} = \frac{d\vec{O'M}}{dt} = 6t^2\vec{i} + (8t-3)\vec{j} + 2t\vec{k}$

vitesse d'entraînement :

$\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r} \Rightarrow \vec{v_e} = \vec{v_a} - \vec{v_e} = \vec{v} - \vec{v'} = +4\vec{j}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v_a} = \vec{v'} + 4\vec{j}}$

Les accélérations de M :

Dans (R) : $\vec{a} = \vec{a_a} = \frac{d\vec{v_a}}{dt} = 12t\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$

Dans (R') : $\vec{a'} = \vec{a_r} = \frac{d\vec{v_r}}{dt} = 12t\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$

On voit bien que $\vec{a} = \vec{a'} \Rightarrow \vec{a_a} = \vec{a_r}$

② Comme $\vec{a_a} = \vec{a_r}$, (R') est donc en mouvement de translation uniforme suivant l'axe (Oy) avec une vitesse de 4 m/s ($\vec{v_e} = 4\vec{j}$).