Série de TD N°1 (A traiter en deux séances))

Exercice N°1 :

1. Déterminer, dans le Système international d'unités (**SI**), les dimensions et les unités des grandeurs physiques suivantes : l'énergie cinétique, la puissance et la pression.

2. Vérifier si les équations suivantes sont homogènes :

$$x = 3at^2 + vt + h \text{ et } v = gx\cos(\omega t).$$

Sachant que :

$\boldsymbol{x}$: position, $\boldsymbol{h}$: hauteur, $\boldsymbol{t}$: temps, $\boldsymbol{\omega}$: pulsation, $\boldsymbol{v}$: vitesse, $\boldsymbol{a}$: accélération, $\boldsymbol{g}$: accélération de pesanteur.

3. Supposons, à priori, que la période d'oscillation $\boldsymbol{T}$ d'un pendule simple est une fonction de sa masse $\boldsymbol{m}$, de sa longueur $\boldsymbol{l}$ et de l'accélération de pesanteur $\boldsymbol{g}$. Déterminer par analyse dimensionnelle, l'expression générale de $\boldsymbol{T}$. Commenter le résultat.

4. La masse volumique ρ d'un cylindre de masse m, de rayon R et de longueur l est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2}$$

4.1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les deux constantes x et y **.**

4.2. En déduire l'expression exacte de la masse volumique ρ.

Exercice N° 2 :

Dans un repère doté d'une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considérons les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\,;\quad \vec{V}_2 = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\,;\quad \vec{V}_3 = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

1. Représenter le vecteur $\vec{V}_1$.

2. Calculer les normes suivantes : $\| \vec{V}_1 \|, \| \vec{V}_2 \|$ et $\| \vec{V}_3 \|$.

3. Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_3$.

4. Déterminer le vecteur unitaire porté par $\vec{V}_1$.

5. Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1 . \vec{V}_2$. Déduire l'angle formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

6. Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$. Déduire l'aire du parallélogramme formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

7. Calculer le produit mixte $\vec{V}_3 . (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$.

Exercice N° 3 :

1. Calculer le gradient du champ scalaire suivant : $\boldsymbol{f(x,y,z) = 2x^2yz - 3xy^2z}$.

2. Calculer la divergence et le rotationnel du champ vectoriel suivant : $\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{3xy\,\vec{\imath} + 2xy^2z\,\vec{\jmath} + yz^3\,\vec{k}}$.

Exercices supplémentaires

Exercice S1

On considère un satellite de masse $\boldsymbol{m}$ effectuant une trajectoire circulaire de rayon $\boldsymbol{R}$ autour de la Terre de masse $\boldsymbol{M}$. Soit $\boldsymbol{T}$ la période de révolution du satellite et $\boldsymbol{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$ l'unité SI de la constante gravitationnelle $\mathbf{G}$. Par analyse dimensionnelle, retrouver la 3ème loi de Kepler à partir de l'expression suivante :

$$\frac{\boldsymbol{T^{\alpha}}}{\boldsymbol{R^{\beta}}} = \frac{\boldsymbol{4\pi^2}}{\boldsymbol{GM}}$$

Exercice S2

Soient deux points $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ de coordonnées cartésiennes $(\mathbf{3, 4, -4})$ et $(\mathbf{6, 8, 3})$, respectivement.

Déterminer les composantes, la norme, la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Exercice S3

1. Soient les trois points suivants : $\boldsymbol{A\,(2,-3)}$, $\boldsymbol{B\,(3,0)}$ et $\boldsymbol{C\,(-2,x)}$.

a) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$

b) Déterminer $\boldsymbol{x}$ pour que les trois points soient alignés.

2. Déterminer la valeur du $\boldsymbol{\alpha}$ pour que $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{3\vec{\imath} + \alpha\,\vec{\jmath} + \vec{k}}$ et $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}}$ soient perpendiculaires.