LOUAIL Layachi
ROUMILI Abdelkrim
MAOUCHE Djamel
MOSBAH Ammar

Université Sétif 1

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

RECUEIL D'EXERCICES

avec

RAPPELS DE COURS

première année SM, MI, ST, STU

OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

AVANT-PROPOS

Ce livre est avant tout un recueil d'exercices et de problèmes avec des rappels de cours de la mécanique du point matériel, domaine très concret de la physique. En effet, la plupart des exercices proposés, existent sous différentes formes et dans plusieurs autres ouvrages.

Conforme au programme, c'est un outil de travail qui s'adresse aux étudiants de la première année des filières SM (sciences de la matière), MI (mathématiques et informatique), ST (sciences et techniques) et STU (sciences de la terre et de l'univers).

Cet ouvrage est conçu pour apporter aux étudiants une aide dans leur cursus et leur permet de progresser. Il existe pour accompagner l'étudiant dans son travail personnel.

Nous espérons que ce rappel de cours et recueil d'exercices sans solutions, aidera nos étudiants à comprendre la mécanique du point matériel. Nous pensons que l'étudiant doit devenir capable à se prendre en main et accroitre lui-même ses connaissances à travers la résolution des exercices au lieu de regarder directement les solutions (habitude chez nos étudiants). Ainsi, et pour tirer profit de cet ouvrage, il est clair que le lecteur devra lire attentivement le rappel de cours qui précède chaque chapitre et chercher lui-même les solutions des exercices proposés.

Toutes les critiques et suggestions seront les bienvenues.

Les auteurs

CHAPITRE I

DIMENSIONS ET UNITES

RAPPEL DE COURS

La mécanique utilise des formules mathématiques qui relient des grandeurs physiques. Toute **grandeur physique** G a une **dimension** notée [G] et est mesurée dans une **unité**.

En mécanique, le système d'unités est constitué des unités fondamentales relatives aux grandeurs longueur, masse et temps. A l'aide de ces unités fondamentales on construit les unités dérivées relatives aux grandeurs de vitesse, accélération, force, travail...

La grandeur de longueur est désignée par [L], celle de la masse par [M] et celle du temps par [T]. Les expressions obtenues de n'importe quelle autre grandeur G en fonction de ces grandeurs fondamentales constituent les **équations aux dimensions** qui prennent la forme suivante :

$$[G] = L^a\, T^b\, M^c$$

EXERCICE I-1

Déterminer (ρ), la masse volumique de l'eau dans le système international (SI), sachant qu'elle vaut 1 gcm^{-3} dans le système CGS.

EXERCICE I-2

Ecrire l'équation aux dimensions:

- d'une force;
- d'un travail d'une force;
- d'une puissance.

En déduire le facteur de conversion α permettant de passer de l'unité de puissance CGS à l'unité de puissance SI.

EXERCICE I-3

Une balle de masse m, considérée comme un point matériel est lancée verticalement vers le haut. Elle subit des forces de frottements d'expression :

$$\vec{f} = -k\,\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point matériel et k est le coefficient de frottement.

a) Ecrire l'équation aux dimensions du coefficient de frottement k.
b) En déduire l'unité du coefficient de frottement dans le système international SI.

EXERCICE I-4

La vitesse des ondes dans un fluide dépend de deux paramètres: la densité de ce fluide ρ et le module de compressibilité appelé aussi bulk modulus B. On peut écrire donc: $V \propto \rho^a B^b$ (1)

a) Ecrire l'équation aux dimensions de la vitesse.
b) Ecrire l'équation aux dimensions de la densité.

c) Sachant que l’unité de B est celle d’une pression (force par surface), écrire l’équation aux dimensions de B.

d) Ecrire l’équation aux dimensions de l’expression (1). En déduire a et b.

e) Trouver la relation de proportionnalité reliant la vitesse des ondes V à la densité du fluide et au bulk modulus.

EXERCICE I-5

La fréquence ν d’un dispositif tournant dépend (à priori) de son rayon R, de sa densité de masse ρ et de la constante gravitationnelle G. Donc : $\nu \propto R^a \rho^b G^c$ (2)

a) Ecrire l’équation aux dimensions de la fréquence ν.

b) Ecrire l’équation aux dimensions du rayon R.

c) Ecrire l’équation aux dimensions de la densité de masse ρ.

d) A partir de la loi donnant la force de gravitation, écrire l’équation aux dimensions de la constante gravitationnelle G.

e) Ecrire l’équation aux dimensions de l’expression (2). En déduire a, b et c.

f) Trouver la relation de proportionnalité reliant la fréquence ν au rayon R, la densité de masse ρ et la constante gravitationnelle G.

EXERCICE I-6

Le kilogramme, le mètre et la seconde sont les unités de base du système international SI. Le joule est l’unité du travail dans ce même système. Parmi les unités suivantes, trouver celle (s) équivalente (s) au joule :

$kg\ m^{-1} s^{-2}$ $kg\ m\ s^{-1}$ $kg\ m\ s^{-2}$ $kg\ m^2\ s^{-1}$ $kg\ m^2\ s^{-2}$

EXERCICE I-7

Soit la formule suivante : $x = 3\gamma t^2 + vt + h$

où γ est une accélération, t le temps, v une vitesse et x et h sont deux longueurs.

a) Quelle est la dimension et l'unité du terme $3\gamma t^2$.
b) Quelle est la dimension et l'unité du terme vt.
c) Quelle est la dimension et l'unité de l'expression du membre droit.
d) Vérifier l'homogénéité de cette formule.

EXERCICE I-8

Un pendule simple est constitué d'un point matériel de masse m suspendu à un fil inextensible de longueur l.

La période T du pendule simple est liée à m, l et g (l'accélération de la pesanteur) par la relation :

$T = C\, m^a\, l^b\, g^d$ où C est une constante sans dimensions (2π)

a) Ecrire l'équation aux dimensions de l'expression de la période du pendule.
b) Déterminer a, b et d.
c) En déduire l'expression de la période T du pendule simple.

EXERCICE I-9

Une bille de rayon r assimilée à un point matériel en mouvement dans un fluide, subit une force de frottement donnée par : $\vec{F}_f = - 6\, \pi\, \eta\, r\, \vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la bille et η la viscosité du fluide.

a) Ecrire l'équation aux dimensions de la viscosité du fluide.
b) En déduire son unité.

EXERCICE I-10

Soit l'expression suivante d'une force : $F = 0{,}5\ \rho\ S\ C_x\ v^2$ où ρ est une masse volumique, S une surface et v une vitesse.

Déterminer la dimension et l'unité du coefficient C_x .

EXERCICE I-11

La résistance de l'air est une force de frottement de forme $F = -\,k\,v^2$ agit sur un point matériel M de masse m.

où k est une constante et v la vitesse du point M.

On pose $\tau = \frac{m}{k\,v}$.

Quelle est la dimension de τ ?

EXERCICE I-12

Déterminer les unités des expressions suivantes :

$\frac{1}{2}\, m\, r^2\, \omega^2 \qquad m\, g\, v \cos\theta \qquad m\, g\, l \sin\theta \qquad \frac{F}{x} \qquad \frac{1}{2}\, k\, (x - l)^2$

où m est une masse; r, x et l des distances; g est le champ de pesanteur terrestre; ω est une vitesse angulaire; k est la raideur d'un ressort, F est une force, θ un angle et v une vitesse.

EXERCICE I-13

L'accélération de la pesanteur à la surface de la terre est donnée par l'expression :

$$g = G\,\frac{M}{R^2}$$

où : g est l'accélération de la pesanteur ;
G est la constante de gravitation universelle ;
M est la masse de la terre ;
R est le rayon de la terre.

Quelle est l'unité de G ?

EXERCICE I-14

La loi de Stefan donne la puissance P du rayonnement émis par un corps noir en fonction de sa surface S, de sa température T (en Kelvin) et d'une constante σ appelée constante de Stefan :

$$P = \sigma \, S \, T^4$$

Déduire l'unité de la constante de Stefan.

EXERCICE I-15

En faisant une analyse dimensionnelle, discuter la validité des égalités suivantes:

$x = \frac{(l^2 - d)}{d}$ où x, l et d sont des distances;

$x = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ où t et τ sont des temps;

$v = \frac{g}{l} \cos\left[\omega \left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ où l est une longueur, g l'accélération de la pesanteur et ω une pulsation.

EXERCICE I-16

Un point matériel de masse m oscille à l'extrémité d'un ressort horizontal de constante de raideur k avec une amplitude X_0. Sa période T dépend de m, k et X_0.

Déterminer l'expression de T.

CHAPITRE II
LES VECTEURS

RAPPEL DE COURS

Le **vecteur** est défini par sa norme, sa direction et son sens. La norme est un scalaire. La direction est une orientation dans l'espace. Pour chaque direction, il y a deux sens.

Somme des vecteurs :

Il existe 3 méthodes :

1) On place les vecteurs les uns à la suite des autres, puis on relie l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier vecteur. On aura la **résultante** des vecteurs.
2) A l'aide de deux vecteurs à additionner on forme un parallélogramme. La diagonale de ce parallélogramme sera la résultante.
3) La méthode algébrique qui consiste à additionner les composantes des vecteurs pour trouver les **composantes de la résultante**.

$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2)\,\vec{i} + (y_1 + y_2)\,\vec{j} + (z_1 + z_2)\,\vec{k}$

Relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Produit scalaire des vecteurs :

Il existe deux méthodes :

1) $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\,\|\vec{V}_2\| \cos\alpha$ où α est l'angle $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.
2) $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ (dans une base orthonormée)

$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$

$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$

Produit vectoriel des vecteurs:

Il existe deux méthodes :

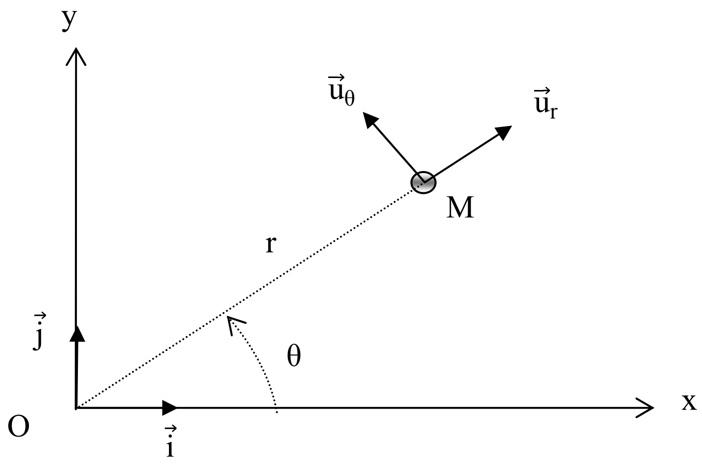
1) $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \ \|\vec{V}_2\| \sin\alpha \ \vec{u}$ $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{u})$ forment une base directe
2) $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\,\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\,\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\vec{k}$

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1)$

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont colinéaires

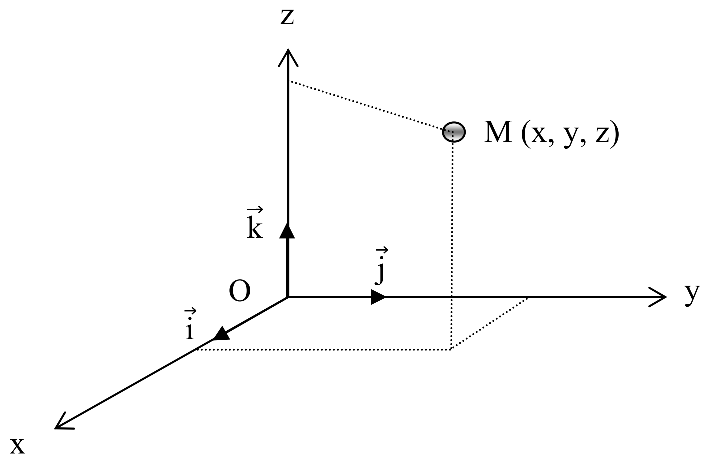
Vecteur position d'un point dans le plan dans un repère orthonormé:

1. en coordonnées cartésiennes (x, y) : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$
2. en coordonnées polaires (r, θ) : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$

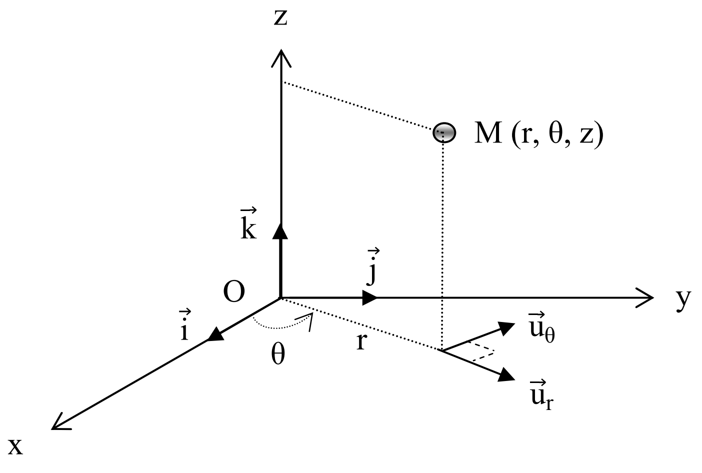


Vecteur position d'un point dans l'espace dans un repère orthonormé :

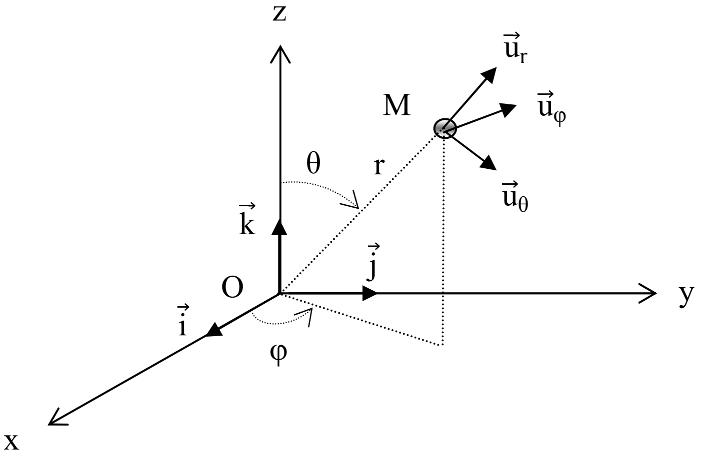
1. en coordonnées cartésiennes (x, y, z) :
   $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$



2. en coordonnées cylindriques (r, θ, z) : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k}$



3. en coordonnées sphériques (r, θ, φ) : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$



EXERCICE II-1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points : A (-1, 0, -1) et B(0, 1, 1).

a) Trouver les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$
b) Trouver les normes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$
c) Calculer et représenter le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$
d) Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$
e) En déduire la valeur de l'angle $A\hat{O}B$.

EXERCICE II-2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u}.\vec{v} = -3$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

a) Calculer l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$
b) Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$
c) Calculer $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

EXERCICE II-3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de même norme.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.

EXERCICE II-4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que: $\| \vec{u} \| = 2$; $\| \vec{v} \| = 6$ et $\vec{u}.\vec{v} = -8$.

a) Calculer $(3\vec{u} + \vec{v}) . (\vec{u} - 2\vec{v})$
b) Calculer $\| -2\vec{u} + 3\vec{v} \|$
c) Déterminer le réel k tel que $\| k\vec{u} + \vec{v} \| = 6$

EXERCICE II-5

Soient les vecteurs $\vec{V}_1\ (1, 2, 2)$, $\vec{V}_2(2, 2\sqrt{2}, 2)$ et $\vec{V}_3(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

a) Calculer $\|\vec{V}_1\|$, $\|\vec{V}_2\|$ et $\|\vec{V}_3\|$.
b) Déduire les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des directions de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.
c) En considérant les angles θ_1, θ_2 et θ_3 compris entre 0 et π, calculer :

$\cos\theta_1 = \cos(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$; $\cos\theta_2 = \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ et $\cos\theta_3 = \cos(\vec{u}_2, \vec{u}_1)$

d) Calculer les composantes des vecteurs

$\vec{u}_{23} = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$; $\vec{u}_{31} = \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1$ et $\vec{u}_{12} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$

e) En déduire $\sin\theta_1$, $\sin\theta_2$ et $\sin\theta_3$.

EXERCICE II-6

a) Vérifier sur un exemple de votre choix que :
$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} . \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} . \vec{b})$
b) De la même manière, vérifier que :
$\vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} . (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} . (\vec{a} \wedge \vec{b})$

EXERCICE II-7

Soient les trois points : A(2, 1), B(3, 3) et C(−4, 1).

Trouver les coordonnées d'un point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

EXERCICE II-8

Soient les trois points : A(2, −3), B(3, 0) et C(−2, x).

a) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Déterminer x pour que les trois points soient alignés.

EXERCICE II-9

Déterminer si ABCD forme un parallélogramme à partir des points suivants:

a) A(−1, −2), B(4, 0), C(3, 3) et D(−2, 1)
b) A(2 , 5), B(−1 , 4), C(2 , −3) et D(−5 , −3)

EXERCICE II-10

Considérons les point A(−1, 3), B(2, −2) et C(4, −1).

a) Déterminer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.
b) Calculer les coordonnées du point I milieu de AC.
c) En utilisant les coordonnées du point I, déduire celles de D pour que ABCD soit un parallélogramme.

EXERCICE II-11

Dans chacun des cas suivants, les points M, N et P sont-ils alignés ?

a) M(4, −1), N(7, −3), P(−5, 5)
b) M(−2, 3), N(−3, 7), P(−5, 14)

EXERCICE II-12

Soit I le milieu du segment AB.

Déterminer les valeurs de α, β, γ et δ tels que :

$\overrightarrow{AI} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI} = \beta\,\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{BI} = \gamma\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI} + \delta\,\overrightarrow{BI} = \vec{0}$

EXERCICE II-13

Un point matériel M se déplace dans l'espace muni d'un repère cartésien $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) et ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont fonctions du temps.

a) Exprimer r, θ, z en fonction de x, y, z.
b) Exprimer $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}$ les vecteurs unitaires du repère cylindrique en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
c) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel M dans la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
d) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel M dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

CHAPITRE III
CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

RAPPEL DE COURS

Le **point matériel** est un objet de dimensions assez petites par rapport aux distances parcourues pour être assimilé à un point dans l'espace.

La **cinématique** est le domaine de la mécanique qui étudie les mouvements à travers la position de l'objet (sa trajectoire), sa vitesse et son accélération indépendamment de la cause qui provoque ces mouvements.

La position d'un matériel est définie à l'aide du **vecteur position** : $\overrightarrow{OM}$.

La vitesse par son **vecteur vitesse** : $\vec{V}(M) = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$

L'accélération par son **vecteur accélération** :

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d(\vec{V}(M))}{dt} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2}$$

passage cinématique :

$$\text{position} \underset{\int .\, dt}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftarrows}} \text{vitesse} \underset{\int .\, dt}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftarrows}} \text{accélération}$$

Equations horaires: ce sont les fonctions x(t), y(t), z(t), r(t), θ(t), φ(t)

Trajectoire : c'est la relation liant les coordonnées x, y, z, r, θ, φ indépendamment du temps.

Types de mouvement d'un point matériel :

1. Mouvement **rectiligne**, la trajectoire est une droite.

- mouvement rectiligne **uniforme**, le vecteur vitesse est constant.
- mouvement rectiligne **uniformément varié**, le vecteur accélération est constant.
- mouvement rectiligne **sinusoïdal**, l'équation horaire est une fonction sinusoïdale.
- mouvement rectiligne quelconque, le vecteur accélération dépend du temps.

2. Mouvement **curviligne**, la trajectoire est une portion d'une courbe.

3. Mouvement **circulaire**, la trajectoire est un cercle. On trouve le mouvement circulaire uniforme, uniformément varié, sinusoïdal et quelconque.

4. Mouvement **parabolique**, la trajectoire est une parabole ou partie d'une parabole.

EXERCICE III-1

Un point matériel M est animé d'un mouvement rectiligne.

Son équation horaire est : $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 7t$

a) Déterminer $\dot{x}(t)$, l'expression de la vitesse du point matériel.
b) Déterminer $\ddot{x}(t)$, l'expression de son accélération.
c) Déterminer les périodes pendant lesquelles le mouvement de ce point matériel est accéléré ou retardé.

EXERCICE III-2

L'accélération d'un point matériel M animé d'un mouvement rectiligne est de la forme $\|\vec{\gamma}\| = \gamma = -k\,v^2$. Où v est la vitesse du point et k est une constante.

A t = 0, le point M passe par la position x = 0 avec une vitesse v_0.

a) Donner l'expression de la vitesse v(t) du point M en fonction du temps et de v_0.
b) Etablir l'équation horaire x(t).
c) Trouver v(x), la loi de variation de la vitesse en fonction de x.
d) Tracer v(x).

EXERCICE III-3

Sur un trajet rectiligne (axe Ox, de vecteur unitaire $\vec{i}$) et à partir d'une vitesse initiale nulle, un véhicule d'accélération γ_0 constante, parcourt une distance OA = 200 m au bout de 30 secondes.

a) Déterminer x, la position du véhicule, en fonction du temps.
b) Déterminer la valeur de l'accélération de ce véhicule.
c) Déterminer la valeur de sa vitesse atteinte au point A.

A partir du point A, le véhicule entre dans une phase de freinage avec une décélération de 7 ms^{-2}.

d) Ecrire $\vec{\gamma}_{fr}$, le vecteur décélération du véhicule.
e) Donner l'expression de la vitesse du véhicule en fonction du temps.
f) Quel est alors le temps nécessaire pour que le véhicule s'arrête.
g) Quelle est la distance d'arrêt.

EXERCICE III-4

Une voiture est stationnée à 100 m d'un piéton immobile. A un instant donné, elle démarre et roule avec une accélération constante de 5 ms^{-2}.

a) Quelle est la nature du mouvement de la voiture ?
b) Ecrire v(t), l'expression de la vitesse de la voiture en fonction du temps.
c) Ecrire x(t), l'expression de sa position en fonction du temps.
c) Quelle est la position de la voiture au bout de 10 secondes. A-t-elle atteint le piéton au bout de ce temps ?

Une seconde voiture démarre du même endroit avec une accélération constante mais met le double de temps pour atteindre l'individu.

d) Quelle est la nature du mouvement de cette deuxième voiture ?
e) Déterminer l'accélération de la deuxième voiture.

EXERCICE III-5

Un individu se met à courir. Ses coordonnées en mètres par rapport à un repère orthonormé sont :

$$x(t) = -0,5t^2 + 5t + 30 \qquad \text{et} \qquad y(t) = 0,25t^2 - 10t + 30$$

a) Ecrire $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$, les deux composantes de sa vitesse en fonction du temps.
b) Ecrire la norme de sa vitesse en fonction du temps.
c) Quelle sera la vitesse de cet individu après 10 secondes ?

d) Ecrire les deux composantes de son accélération en fonction du temps.
e) Ecrire la norme de son accélération en fonction du temps.
f) Quelle sera son accélération après 12 secondes ?

EXERCICE III-6

Sur une route rectiligne, une voiture roule à vitesse constante $v_0 = 110\ kmh^{-1}$. Un motard gendarme démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément (accélération γ_0).

Le motard atteint la vitesse de $90\ kmh^{-1}$ au bout de 10 s.

En prenant comme origine x = 0 à t = 0 (position de la voiture et de la moto, ce sont les mêmes),

a) Exprimer x(t), la position de la voiture en fonction du temps.
b) Exprimer la vitesse du motard et sa position en fonction du temps.
c) Déterminer l'accélération du motard.
d) Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture.
e) Quelle distance aura-t-il parcouru ?
f) Quelle vitesse aura-t-il alors atteint ?

EXERCICE III-7

Un randonneur se situant en un point A s'est égaré en forêt. Il marche alors pendant 2 h à la vitesse $v_1 = 7\ km\ h^{-1}$ dans la direction Nord-Est jusqu'à un point B puis 1 h dans la direction Sud à la vitesse $v_2 = 4\ km\ h^{-1}$ avant de retrouver la sortie de la forêt en C.

a) Déterminer la distance totale parcourue par le randonneur.
b) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AC}$.
c) En déduire la distance $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.

d) Combien de temps aurait-il mis en marchant directement de A vers C à la vitesse $v_3 = 6$ km h^{-1} ?

e) A partir du point A, dans quelle direction aurait-il dû partir pour arriver au point C ? (c'est-à-dire donner l'angle en degrés que fait $\overrightarrow{AC}$ avec l'axe Ouest-Est).

EXERCICE III-8

Soit un point matériel M en mouvement rectiligne dans un plan.

a) Comment doivent être les directions du vecteur vitesse et du vecteur accélération.

b) Comment doivent être les normes de la vitesse et de l'accélération.

EXERCICE III-9

Les équations horaires du mouvement d'un point matériel dans le plan Oxy sont :

$x(t) = A\cos(\omega t) + x_1$ et $y(t) = y_1$ avec x_1 et y_1 des constantes.

a) Quelle est la trajectoire du point matériel ?

b) Quelle est la nature du mouvement du point matériel ?

c) Calculer l'expression $\frac{d^2x}{dt^2}$ en fonction de x et écrire l'équation différentielle du mouvement du point.

EXERCICE III-10

Soit un point matériel M en mouvement circulaire uniforme dans un plan. Son vecteur vitesse est-il constant ?

Ce point matériel parcourt un cercle de rayon R = 10 cm à la vitesse v = 2 ms^{-1}.

a) Calculer la période de rotation du point M.

b) Calculer l'accélération du point M.

EXERCICE III-11

Soit un point matériel M en mouvement circulaire de centre O dans un plan Oxy.

a) Si le mouvement est uniforme, son vecteur vitesse $\vec{v}$ change-t-il de direction ?
b) Si le mouvement est uniforme, quelle est la direction du vecteur accélération ?
c) Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est-il perpendiculaire ou parallèle au plan Oxy.
d) Exprimer $\vec{v}$, le vecteur vitesse en fonction de $\vec{\omega}$ et du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

EXERCICE III-12

Un point matériel M est en un mouvement curviligne plan. Il est repéré par les deux coordonnées polaires r et θ. On choisit la base orthonormée ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$) liée à ce point.

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position de ce point matériel dans cette base.
b) Déterminer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point M.
c) Déterminer $\vec{\gamma}(M)$, le vecteur accélération du point matériel M en précisant les deux composantes : radiale γ_r et orthoradiale γ_θ de cette accélération.
d) Que devient $\vec{\gamma}(M)$ dans le cas d'un mouvement curviligne uniforme.
e) Que devient $\vec{\gamma}(M)$ dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

EXERCICE III-13

Un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Il tourne avec une accélération $\gamma = g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2$ où R = 6400 km est le rayon de la terre, $g_0 = 9{,}8\ ms^{-2}$ et r le rayon de l'orbite.

La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la terre sur elle-même.

a) Exprimer la période T de rotation de la Terre sur elle-même en secondes.
b) Calculer sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
c) Ecrire $\vec{r}$, le vecteur position du satellite en coordonnées polaires (r, θ) dans un repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ lié au satellite.
d) En déduire $\vec{v}$, l'expression du vecteur vitesse du satellite.
e) En déduire $\vec{\gamma}$, l'expression du vecteur accélération du satellite.
f) Trouver r, l'altitude de l'orbite (le rayon de l'orbite géostationnaire).

EXERCICE III-14

Un point matériel parcourt un cercle de rayon R à la vitesse $v = \alpha t$ où α est une constante. On propose de travailler dans la base vectorielle des coordonnées polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

a) Quelle est la relation entre v et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$?
b) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel dans la base vectorielle des coordonnées polaires.
c) Déduire $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel.
d) Déduire v_r et v_θ, les deux composantes de la vitesse du point.
e) Exprimer $\vec{\gamma}(M)$, le vecteur accélération du point matériel.
f) Trouver γ_r et γ_θ, les deux composantes de son accélération.

EXERCICE III-15

Dans un plan Oxy muni d'un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$, un point matériel M est repéré par :

- Ces deux coordonnées cartésiennes x(t) et y(t).
- Ainsi que par ces deux coordonnées polaires r(t) et θ(t).

a) Représenter la base vectorielle $(O, \vec{i}, \vec{j})$ liée à l'origine O du repère orthonormé.

b) Représenter la base vectorielle orthonormée $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ liée au point M.

c) Etablir les relations donnant les coordonnées cartésiennes x et y du point M en fonction des coordonnées polaires r et θ.

d) Ecrire le vecteur $\vec{u}_r$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

e) Ecrire le vecteur $\vec{u}_\theta$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

f) En déduire $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$.

EXERCICE III-16

a) Dans la base des vecteurs unitaires des coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ d'un point matériel en fonction des coordonnées cylindriques r, θ et z.

b) En déduire $\vec{V}(M)$, l'expression du vecteur vitesse.

c) En déduire $\vec{\gamma}(M)$, l'expression du vecteur accélération.

EXERCICE III-17

a) Dans la base des vecteurs unitaires des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ d'un point matériel en fonction des coordonnées sphériques r, θ et φ.

b) Trouver les expressions de $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

c) Trouver $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$, $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$ et $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$.

d) En déduire $\vec{V}(M)$, l'expression du vecteur vitesse du point.

e) En déduire $\vec{\gamma}(M)$, l'expression son vecteur accélération.

EXERCICE III-18

Un point matériel se déplace sur une courbe plane d'équation en coordonnées polaires dans le plan Oxy: $r = r_0 e^{-\omega t}$ avec $\omega t = \theta$ et ω une constante.

a) Trouver v_r et v_θ, les deux composantes de la vitesse du point matériel en coordonnées polaires.
b) Calculer $\|\vec{v}\|$, la norme de la vitesse du point matériel.
c) Trouver γ_r et γ_θ, les deux composantes de l'accélération du point matériel en coordonnées polaires.
d) Calculer $\|\vec{\gamma}\|$, la norme de l'accélération du point matériel.

EXERCICE III-19

Deux voitures de performances différentes : la première a une accélération de $\gamma_1 = 4\ ms^{-2}$ et la deuxième de $\gamma_2 = 5\ ms^{-2}$ se mettent en position de départ de course. Mais, la première voiture démarre 1 seconde avant la deuxième.

a) Ecrire x_1 (t), l'équation horaire de la première voiture.
b) Ecrire $x_2(t)$, l'équation horaire de la seconde voiture.
c) Déterminer le temps nécessaire à la deuxième voiture pour rattraper la première.
d) En déduire la distance parcourue jusqu'à ce rattrapage.
e) Si la piste de la course était de 100 m, ce rattrapage serait-il possible ?
f) Calculer la vitesse de chaque voiture au moment du rattrapage.

EXERCICE III-20

Pour décoller, un avion doit atteindre la vitesse de 200 kmh^{-1} et une accélération de 12 ms^{-2}. On veut savoir si cet avion est capable de décoller depuis l'aéroport de Sétif (longueur de la piste est de 190 m).

A t = 0, l'avion est au point de départ ($x = 0$) et sa vitesse est nulle ($v_0 = 0$).

a) Donner x(t), l'expression de la position de l'avion en fonction du temps.

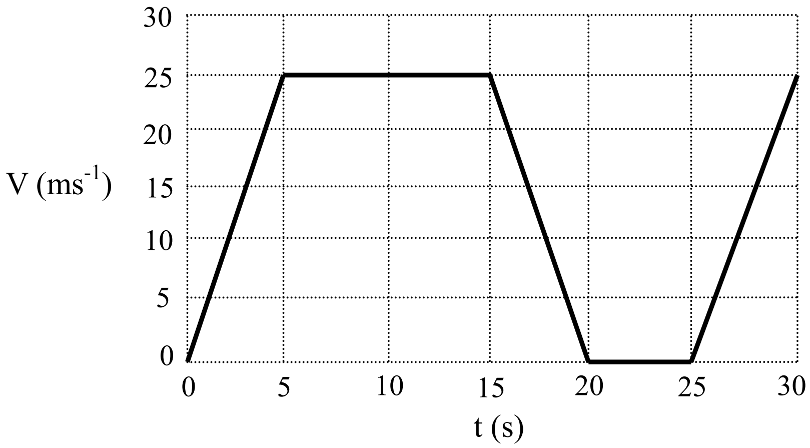
b) Donner v(t), l'expression de sa vitesse en fonction du temps.

c) En déduire x(t) en fonction de la vitesse et l'accélération.

d) L'avion est-il capable de décoller à partir de l'aéroport de Sétif ?

EXERCICE III-21

La figure représente la variation de la vitesse v(t) d'un point matériel en mouvement, en fonction du temps.



a) Calculer $\gamma(t)$, l'accélération de ce point matériel durant chaque intervalle de temps.

b) Représenter l'accélération du point matériel en fonction du temps.

EXERCICE III-22

Un point matériel M de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha \cos(\omega t + \psi) \\ y(t) = \beta \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad \text{où } \omega \text{ est une constante,}$$

se déplace sur une ellipse d'équation cartésienne

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

A l'instant $t = 0$, le point matériel M est au point $A(a,0)$.

a) Déterminer α, ψ et φ.
b) Déduire β.
c) Déterminer $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$, les composantes de la vitesse du point matériel.
d) Déterminer $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{y}(t)$, les composantes de son accélération.
e) Ecrire $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ en fonction de x et y.
f) Montrer que l'accélération est de forme $\vec{\gamma} = -k\overrightarrow{OM}$.
g) En déduire la constante k.

EXERCICE III-23

Un point matériel se déplace le long d'une hélice circulaire. Son mouvement est donné en coordonnées cylindriques dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ par :

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \omega t \\ z = ht \end{cases}$$

où R, ω et h sont des constantes.

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel.
b) Exprimer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.
c) En déduire la norme de sa vitesse.

d) Donner l'expression du vecteur accélération du point matériel dans la même base vectorielle.
e) En déduire la norme de son accélération.

EXERCICE III-24

Soit un point matériel M en mouvement uniforme. Son accélération est-elle nulle ?

EXERCICE III-25

Le vecteur accélération d'un point matériel M en mouvement est donnée :

$\vec{\gamma} = \gamma \vec{j}$ où γ est une constante.

A t = 0, la vitesse de M est $v_0\vec{i}$.

a) Trouver v_x et v_y, les deux composantes du vecteur vitesse du point M.
b) Déduire x(t) et y(t), les deux composantes du vecteur position du point M.
c) Trouver y(x), l'équation de la trajectoire du mouvement du point M.
d) Quelle est la nature de la trajectoire du mouvement de ce point.

EXERCICE III-26

Un point matériel M décrit une hélice d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = \alpha t \end{cases} \qquad \text{où R, } \alpha \text{ et } \omega \text{ sont des constantes.}$$

Le pas de l'hélice est défini par : $p = z(t+T) - z(t)$ où T est la période du mouvement.

a) Calculer le pas de l'hélice en fonction de α et ω.
b) Représenter l'allure de cette hélice.

Etude en coordonnées cartésiennes dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$*:*

c) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
d) Exprimer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel dans la même base.
e) Exprimer $\vec{\gamma}(M)$, le vecteur accélération du point matériel.

Etude en coordonnées cylindriques dans la base $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$*:*

Les coordonnées cylindriques du point matériel M sont :

$$r = R, \quad \theta = \omega t \quad \text{et} \quad z = \alpha t$$

f) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel dans la base $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.
g) Exprimer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse v du point matériel dans la même base.
h) Exprimer $\vec{\gamma}(M)$, le vecteur accélération a du point matériel.
i) Quel est l'angle formé par les vecteurs vitesse et accélération ?

EXERCICE III-27

Le bras d'une grue tourne dans un plan horizontal Oxy à vitesse angulaire constante ω_0. Sur ce bras, un chariot assimilé à un point matériel M subit une translation à vitesse constante v_0.

A l'instant initial, le chariot se trouve au centre de rotation O du bras. Le mouvement est observé depuis le sol.

a) Donner r(t) et θ(t) les équations horaires du mouvement du chariot. r(t) est la distance r parcourue par le chariot le long du bras de la grue.
b) En déduire r(θ), l'équation de la trajectoire du mouvement du chariot.
c) Représenter la trajectoire dans un plan Oxy.

Supposant la base des vecteurs unitaires $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ liée au centre de rotation O où $\vec{u}_r$ est suivant le trajet du chariot. Ce système de base tourne avec la grue.

d) Etablir $\overrightarrow{OM}$, l'expression du vecteur position du chariot dans cette base.
e) Etablir $\vec{V}(M)$, l'expression du vecteur vitesse du chariot dans cette même base.
f) Etablir $\vec{\gamma}(M)$, l'expression du vecteur accélération du chariot dans la même base.

Supposant la base des vecteurs unitaires du système cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ liée au centre de rotation O. Ce système de base est fixe.

g) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du chariot dans le système cartésien.
h) Exprimer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du chariot dans le système cartésien.
i) Exprimer $\vec{\gamma}(M)$, le vecteur accélération du chariot dans le système cartésien.

EXERCICE III-28

Un point matériel M en mouvement décrit une trajectoire plane d'équations horaires :

$$\begin{cases} r = R(1 + \cos\theta) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

R et ω sont des constantes.

a) Trouver les coordonnées des points particuliers :
$\theta = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}, \ldots$
b) Représenter l'allure de la trajectoire du mouvement du point matériel.
c) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel dans le système polaire de vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

d) Exprimer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point dans le même système.
e) Calculer la norme de cette vitesse.

EXERCICE III-29

L'accélération d'un point matériel M en mouvement est donnée dans la base des vecteurs unitaires $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par : $\vec{\gamma} = bt\,\vec{i} + ct^2\,\vec{j}$

a) Etablir $\vec{V}(M)$, l'expression du vecteur vitesse du point M.
b) Etablir $\overrightarrow{OM}$, l'expression du vecteur position du point M.
c) La donnée du vecteur accélération suffit-elle à caractériser le mouvement.
d) Si le point M était à l'origine à l'instant initial et était animé d'une vitesse initiale v_0 dirigée selon Ox, trouver $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position de ce point en fonction du temps.
e) Donner l'équation de la trajectoire pour ce dernier mouvement.

EXERCICE III-30

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un mobile assimilé à un point matériel décrit une trajectoire donnée par :

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4\left(t - \dfrac{t^3}{3}\right) \\ z = 3t + t^3 \end{cases}$$

a) Exprimer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse de ce mobile.
b) Déduire l'angle entre le vecteur vitesse et l'axe Oz.

EXERCICE III-31

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, deux mobiles M et P assimilables à des points matériels, de même masse m suivent deux trajectoires d'équations horaires :

M : $x = 4t^2$; $y = 4t^4 - 1$; $z = 0$

P : $x = 4\omega$; $y = 4\omega^2 - 1$; $z = 0$

Où ω est une fonction du temps telle que : $t = \omega + \frac{4}{3}\omega^3$

a) Ecrire l'expression de la trajectoire du mobile M. Tracer-la dans le plan Oxy.
b) Ecrire l'expression de la trajectoire du mobile P. Tracer-la dans le même plan.
c) Ecrire l'expression $t = f(x)$ du mobile M. Tracer-la dans le plan Oxy.
d) Ecrire l'expression $t = f(x)$ du mobile P. Tracer-la dans le même plan.
e) Donner la position de chaque mobile à l'instant $t = 0$.
f) Parmi les deux mobiles, lequel démarre plus rapidement.
g) Quand est ce que l'autre mobile le rattrape. Le dépasse-t-il ?
h) Déterminer graphiquement l'instant de la rencontre des deux mobiles.
i) Déterminer analytiquement l'instant de la rencontre des deux mobiles.
j) Calculer les composantes du vecteur vitesse du mobile M.
k) Calculer la norme de la vitesse du mobile M.
l) Calculer les composantes du vecteur vitesse du mobile P.
m) Calculer la norme de la vitesse du mobile P.

EXERCICE III-32

Une particule se déplace de telle manière que sa position en fonction du temps est donnée par : $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + 4t^2\vec{j} + t\,\vec{k}$.

a) Trouver $\vec{V}(M)$, l'expression du vecteur vitesse de cette particule.
b) Trouver $\vec{\gamma}(M)$, l'expression du vecteur accélération de cette particule.
c) Quelle est la nature du mouvement de la particule ?
d) Quelle est la valeur de la vitesse de la particule à l'instant t = 3s.

EXERCICE III-33

Un point matériel est repéré par ces coordonnées cartésiennes:

$$x(t) = \alpha t^2 \quad \text{et} \quad y(t) = \beta t^2 \quad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ constants.}$$

a) Trouver les deux composantes $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ de la vitesse du point matériel en fonction de α et β.
b) En déduire la norme de sa vitesse en fonction de α et β.
c) Trouver les deux composantes $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{y}(t)$ de l'accélération du point matériel en fonction de α et β.
d) En déduire la norme de son accélération en fonction de α et β.

EXERCICE III-34

Un point matériel se déplace dans le plan Oxy. Il décrit la courbe d'équation en coordonnées polaires : $r = a\,(1 + \cos\theta)$ où a est une longueur et $\theta = \omega t$ avec ω constante.

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, vecteur position du point matériel dans la base vectorielle cartésienne $(\vec{i}, \vec{j})$ en fonction de r et ω.
b) Exprimer $\vec{V}(M)$, vecteur vitesse du point matériel dans la même base vectorielle.
c) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, vecteur position du point matériel dans la base vectorielle polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ en fonction de r et ω.
d) Exprimer $\vec{V}(M)$, vecteur vitesse du point matériel dans la même base vectorielle.
e) Exprimer $\vec{\gamma}(M)$, vecteur accélération du point matériel dans la même base vectorielle.

EXERCICE III-35

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point matériel M se déplace suivant une courbe hélicoïdale. Sa trajectoire est donnée par l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r(2\pi - \theta) \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \theta < 2\pi \text{ et r constant}$$

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, vecteur position du point matériel dans la base vectorielle cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de r et θ.
b) Exprimer $\vec{V}(M)$, vecteur position du point matériel dans la même base vectorielle.
c) Exprimer $\vec{\gamma}(M)$, vecteur accélération du point matériel dans la même base vectorielle.
d) Exprimer $\vec{\gamma}(M)$, vecteur accélération du point matériel dans la même base vectorielle.
e) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, vecteur position du point matériel dans la base vectorielle cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ en fonction de r et θ.
f) Exprimer $\vec{V}(M)$, vecteur vitesse du point matériel dans la même base vectorielle.
g) Exprimer $\vec{\gamma}(M)$, vecteur accélération du point matériel dans la même base vectorielle.

CHAPITRE IV

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

RAPPEL DE COURS

La **dynamique** relie le mouvement d'un point matériel à ses causes.

Les causes du mouvement d'un corps sont appelées les efforts mécaniques ou actions ou **forces**. La force est une grandeur vectorielle.

Référentiel :

Un référentiel est un système d'axes lié à un observateur.

Quantité de mouvement :

La quantité de mouvement d'un point matériel est définie par :

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

Les trois principes de la dynamique (les lois de Newton) :

1.principe d'inertie :

Dans un référentiel galiléen, un corps isolé (qui n'est soumis à aucune force), est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme.

Ce qui est équivalent au principe de **conservation de la quantité de mouvement** en absence de force : $\vec{p} = \overrightarrow{cte}$

2.principe fondamental de la dynamique :

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces qui s'exercent sur un corps est égale au produit de sa masse par son vecteur accélération.

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{\gamma}$$

ou en introduisant la quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

3. principe d'action et de réaction :

La force exercée par un premier corps sur un deuxième corps est égale et opposée à la force exercée par le deuxième sur le premier :

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Ce qui est équivalent au principe de **conservation de la quantité de mouvement totale** : $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \overrightarrow{cte}$

Référentiel galiléen :

Un référentiel est galiléen si le principe d'inertie s'applique.

Moment cinétique d'un point matériel:

Le moment cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$, par rapport au point O est défini par :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Moment d'une force :

Le moment d'une force appliquée à un point matériel situé au point M, par rapport au point fixe O est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Théorème de la variation du moment cinétique :

La variation du moment cinétique est égale au moment de la résultante des forces par rapport au point fixe O.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

Dans le cas d'une force centrale : $\overrightarrow{OM} // \vec{F}$

donc : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$ d'où : $\vec{L}_O = \overrightarrow{cte}$

Dans tous les exercices de ce quatrième chapitre, on travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

EXERCICE IV-1

Une balle de masse m = 100 g, considéré comme un point matériel est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale.

Elle subit des forces de frottements d'expression proportionnelles à sa vitesse de type: $\vec{f} = -k\vec{v}$ où k est le coefficient de frottement (0,1 en SI).

a) Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur la balle.
b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement de la balle). C'est une équation vectorielle.
c) Quelle est la valeur de la vitesse de la balle lorsqu' elle atteint son altitude maximale ?
d) Trouver l'accélération de la balle lorsqu'elle atteint son altitude maximale.
e) En supposant que la chute est suffisamment longue pour que la balle puisse atteindre une vitesse limite v_{lim} (vitesse constante), quelle est la valeur de cette vitesse limite ?

EXERCICE IV-2

Un flocon de neige assimilé à un point matériel de masse m, tombe verticalement sans vitesse initiale. Il est soumis à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse v, de la forme : $\vec{f} = -k\,m\,\vec{v}$ où k est une constante positive.

a) Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur le flocon.
b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique.
c) En projetant cette équation vectorielle selon l'axe de chute, établir l'équation scalaire du mouvement.
d) En tenant compte des conditions initiales, établir v(t) la loi de vitesse du flocon en fonction du temps (la solution générale de cette équation).
e) Représenter v(t) la vitesse du flocon en fonction du temps.
f) Déterminer v_{lim}, la vitesse limite du flocon en fonction de k et g.

EXERCICE IV-3

Un corps supposé point matériel de masse m chute sans vitesse initiale. Dans l'air, il est soumis à une force de frottement visqueux de norme kv^2 avec k une constante.

a) Comment peut-on comprendre qualitativement l'existence d'une vitesse limite ?
b) Déterminer l'expression de cette vitesse limite.
c) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement du corps).
d) Projeter cette équation vectorielle selon l'axe du mouvement.
e) En déduire l'équation différentielle donnant la vitesse du corps en fonction de v_{lim} et g.

EXERCICE IV-4

Un point matériel de masse m est lâché sans vitesse initiale d'une altitude $z_0 = 100$ m.

Chute sans frottements :

a) Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le point matériel.
b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
c) En projetant cette équation vectorielle selon l'axe de chute, établir l'équation scalaire du mouvement.
d) Déduire l'expression de la vitesse du point matériel.
e) Déduire l'expression de la position du point matériel.
f) Déterminer le temps de la chute.

Chute avec frottements :

On suppose maintenant que la chute se fait avec une force de frottement fluide d'expression $\vec{f} = -\mu \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du point matériel et μ une constante.

g) Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le point matériel.
h) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
i) En projetant cette équation vectorielle selon l'axe de chute, établir l'équation scalaire du mouvement.
j) Déduire l'expression de la vitesse du point matériel.
k) Déduire l'expression de la position du point matériel.

EXERCICE IV-5

Un point matériel de masse $m = 20$ kg est lâché verticalement sans vitesse initiale. L'air exerce sur ce point une force de frottement opposée à la vitesse et de norme $f = \alpha v^2$ (α un coefficient de frottement positif).

On constate que le point matériel atteint une vitesse limite v_{lim} de 45 ms^{-1}.

a) Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le point matériel.
b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
c) En projetant cette équation vectorielle selon l'axe de chute, établir l'équation scalaire du mouvement.
d) Trouver l'expression du coefficient α en fonction de v_{lim}, m et g.
e) En déduire la valeur de α.

EXERCICE IV-6

Une pierre de masse m assimilé à un point matériel est lancée verticalement vers le haut depuis un point O avec une vitesse v_0.

Une force de frottement de la part de l'air de norme : $F_f = k\,v^2$ est opposée à la vitesse de l'objet. (k est une constante positive).

Ascension :

a) Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur l'objet.
b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
c) En projetant cette équation vectorielle selon l'axe du mouvement, établir l'équation scalaire du mouvement.
d) A partir de cette équation différentielle du premier ordre, déterminer v(z), la vitesse de la pierre en fonction de son altitude.
e) Calculer z_{max}, l'altitude maximale atteinte.

Descente :

Avec les conditions initiales de la descente : $z = z_{max}$ et $v = 0$,

f) Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur l'objet.
g) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
h) En projetant cette équation vectorielle selon l'axe du mouvement, établir l'équation scalaire du mouvement.
i) A partir de cette équation différentielle du premier ordre, déterminer v(z), la vitesse de l'objet en fonction de son altitude.
j) Calculer la vitesse de l'objet lorsqu'il atteint le sol.

Pour simplifier les calculs, faire apparaitre dans les expressions les termes : $C = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ et $l = \frac{m}{2k}$.

EXERCICE IV-7

Une bille d'acier de masse m et de rayon R, assimilée à un point matériel, est lâchée en O sans vitesse initiale dans un liquide de coefficient de viscosité η.

Ce liquide exerce sur la bille deux types de forces :

- la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$;

- une force de frottement $\vec{F}_{fr} = - 6(3,14)\eta R\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la bille.

On donne :

ρ la masse volumique de l'acier = 7800 kgm^{-3}

ρ_0 la masse volumique du liquide = 1260 kgm^{-3}

a) Exprimer $\vec{\pi}$, la poussée d'Archimède en fonction de ρ_0 et R.
b) Exprimer $\vec{p}$, le poids de la bille en fonction de ρ et R.
c) Comparer la valeur de la poussée d'Archimède subit par la bille à son poids P. (Calculer $\frac{\pi}{P}$).
d) Quel pourcentage représente la force d'Archimède par rapport au poids.
e) Etablir un bilan des forces appliquées à la bille M.
f) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
g) En projetant cette équation vectorielle selon l'axe du mouvement, écrire l'équation scalaire du mouvement.
h) Au bout d'un certain temps, la vitesse de la bille tend vers une valeur limite constante. Exprimer cette vitesse limite v_{lim} en fonction de ρ, ρ_0, η et R.

EXERCICE IV-8

Un sauteur à l'élastique de masse $m = 70$ kg assimilé à un point matériel tombe depuis un point A avec un élastique. Pendant les 20 premiers mètres de chute (jusqu'au point B), l'élastique n'est d'aucune utilité et le sauteur est donc en chute libre.

a) Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le sauteur.

b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
c) En projetant cette équation vectorielle selon l'axe de la chute, écrire l'équation scalaire du mouvement.
d) En tenant compte des conditions initiales de la chute, établir l'expression de la vitesse du sauteur.
e) En tenant compte des conditions initiales de la chute, établir l'expression de la position du sauteur.
f) Déterminer le temps de la phase de chute libre (du point A au point B).
g) Déterminer v_B, la vitesse du sauteur au point B (fin de la phase de chute libre).

A partir du point B supposé nouvelle origine du mouvement dans cette phase, l'action de l'élastique est modélisée par un ressort de masse négligeable, de longueur $l_0 = 20$ m et de raideur $k = 20\ Nm^{-1}$.

h) En s'intéressant au mouvement au-delà du point B jusqu'à sa fin (point C), établir un bilan des forces appliquées au sauteur.
i) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
j) En projetant cette équation vectorielle selon l'axe du mouvement, écrire l'équation différentielle du mouvement

La solution d'une telle équation comporte une solution particulaire et une autre solution sans second membre :

$$z(t) = \frac{mg}{k} + \alpha \cos\omega_0 t + \beta \sin\omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Où α et β sont des constantes à définir à partir des conditions initiales (point B).

k) Exprimer z(t) en fonction de m, k, ω_0 et v_B.
l) Déterminer z_{max} (la distance BC).
m) Déterminer la hauteur totale de la chute du sauteur (du point A au point C).

n) Déterminer l'accélération maximale du sauteur pendant la deuxième phase (entre B et C).

On donne : $\alpha \sin\omega t + \beta \cos\omega t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\omega t + \varphi)$

EXERCICE IV-9

Un plongeur de masse m = 80 kg, assimilé à un point matériel, saute sans vitesse initiale d'un plongeoir situé à une hauteur h = 10 m au-dessus de la surface de l'eau. On suppose qu'il est soumis uniquement à la force de pesanteur (chute libre).

a) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement du plongeur).
b) Déduire l'équation du scalaire du mouvement en projetant cette équation vectorielle suivant l'axe du mouvement.
c) En déduire l'expression de la vitesse du baigneur.
d) En déduire l'expression de sa position.
e) Déterminer le temps de chute (le temps d'entrée dans l'eau).
f) Déterminer v_{eau}, la vitesse d'entrée dans l'eau.

Lorsqu'il est dans l'eau, le baigneur subit, en plus de la pesanteur :

- une force de frottement $\vec{F}_{fr} = - k\,\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant la vitesse et k une constante = 250 kgs^{-1}) ;
- et une poussée d'Archimède $\vec{\pi} = - \frac{m}{d}\,\vec{g}$ (d étant la densité du corps humain = 0,9).

g) Ecrire le principe fondamental de la dynamique.
h) Trouver l'équation du mouvement.
i) En déduire l'équation différentielle que vérifie la vitesse du plongeur.
j) En tenant compte des nouvelles conditions initiales (l'entrée du baigneur dans l'eau), écrire v(t), la solution générale de cette équation.
k) En déduire v_{lim}, la vitesse limite du baigneur.
l) Déterminer à quel instant le plongeur commence à remonter.

EXERCICE IV-10

Un point matériel M de masse m est relié au point fixe O par un fil inextensible de longueur OM = l et de masse négligeable.

A t = 0, on abandonne l'ensemble sans vitesse initiale, le fil faisant un angle θ_0 avec la verticale. On néglige tous les frottements.

a) Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur le point matériel dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ liée à ce point.

b) Exprimer :

$\overrightarrow{OM}$, le vecteur position de M dans la même base de vecteurs ;

$\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point M ;

$\vec{\gamma}(M)$ le vecteur accélération du point M .

c) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement du point matériel).

d) En déduire l'équation scalaire du mouvement du point matériel M.

e) En déduire aussi la tension T du fil.

f) Que devient cette équation dans le cas des petites oscillations.

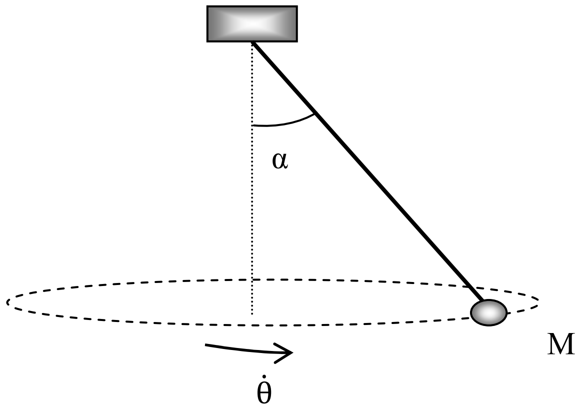
La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$$\theta(t) = \theta_1 \cos\omega t + \theta_2 \sin\omega t$$

- Déterminer les constantes du mouvement θ_1 et θ_2.
- En déduire la solution $\theta(t)$.
- En déduire la période du mouvement.

EXERCICE IV-11

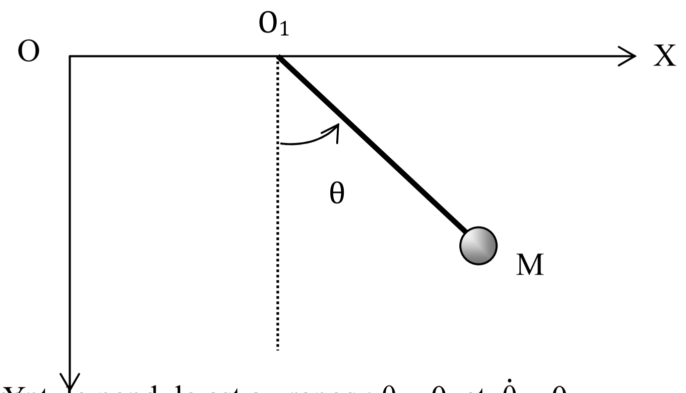
L'ensemble du fil, de longueur l et du point matériel M de masse m qui lui est attaché, décrit un cône d'axe vertical et de demi-angle α à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante. On néglige tous les frottements.



a) Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur le point matériel dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ liée au point M.
b) Exprimer :
$\overrightarrow{OM}$, le vecteur position de M dans la même base de vecteurs ;
$\vec{V}(M)$, la vitesse du point M ;
$\vec{\gamma}(M)$ son accélération.
c) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement du point matériel).
d) En déduire l'équation scalaire du mouvement.
e) En déduire l'angle α en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

EXERCICE IV-12

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur l. L'autre extrémité O_1 du fil se déplace horizontalement le long de l'axe OX en effectuant des oscillations sinusoïdales d'amplitude A et de pulsation Ω constante. $OO_1 = A \sin\Omega t$



Initialement, le pendule est au repos : $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$.

a) Calculer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel M.
b) En déduire $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel M.
c) En déduire $\vec{\gamma}(M)$, le vecteur accélération du point matériel M.
d) Etablir un bilan des forces appliquées au point matériel M. (Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur M).
e) Etablir les deux équations scalaires en projetant cette équation vectorielle selon les deux axes.
f) Simplifier l'équation du mouvement en supposant que θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ sont infiniment petits et du premier ordre.
g) Calculer dans ce cas, T, la tension du fil.
h) En déduire l'équation du mouvement $\ddot{\theta}(t)$ en fonction de A, Ω, l et g.

La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\theta(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$$

où $\theta_1(t)$ est la solution générale sans second membre

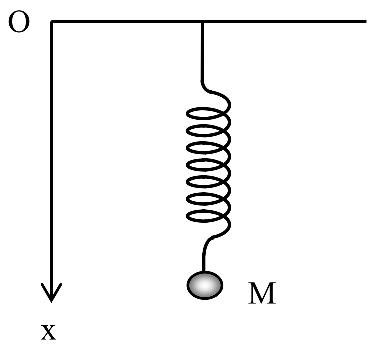
$$\theta_1(t) = A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ ;$$

et $\theta_2(t)$ est une solution particulière $\theta_2(t) = B \sin\Omega t$

i) En tenant compte des conditions initiales, exprimer la solution $\theta(t)$ en fonction de A, Ω et l.

EXERCICE IV-13

Soit un ressort parfaitement élastique de masse négligeable, de raideur k et d'axe vertical comme indiqué sur la figure. Le référentiel qui lui est lié est considéré comme galiléen. M est un point matériel de masse m attaché à ce ressort. On abandonne le point M sans vitesse initiale avec une élongation $x = x_0$.



a) Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur le point matériel.

b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement du point matériel).

c) Que devient cette équation en la projetant sur l'axe du mouvement Ox.

d) Le mouvement du point matériel est rectiligne sinusoïdal. Donner sa pulsation ω_0 ainsi que sa période T.

e) La solution générale de l'équation du mouvement est de la forme :

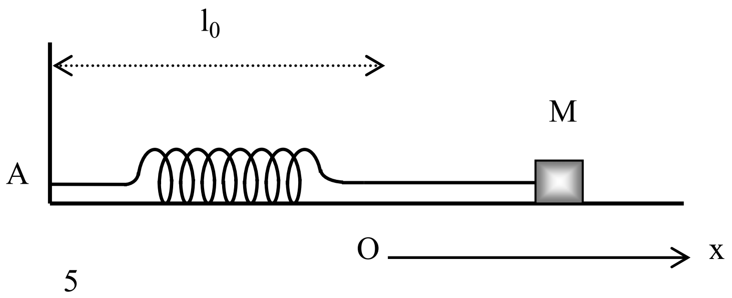
$$x(t) = A \cos\omega_0 t + B \sin\omega_0 t$$

déterminer les constantes du mouvement A et B.

f) En déduire la solution x(t).

EXERCICE IV-14

Un point matériel M de masse m est relié à un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixe en A. Le point M glisse sans frottement sur un plan le long de l'axe Ox.



a) Etablir un bilan des forces appliquées au point matériel M dans la base vectorielle $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{i}$ est suivant Ox.

b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.

c) Etablir les équations scalaires en projetant cette équation vectorielle selon les axes de la base vectorielle $(\vec{i}, \vec{j})$.

d) Parmi ces équations, identifier l'équation du mouvement.

e) De quel type d'équation s'agit-il ?

f) Déterminer ω_0, la pulsation propre du mouvement.

g) En déduire T, la période du mouvement.

La solution d'une telle équation a la forme :

$$x(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t$$

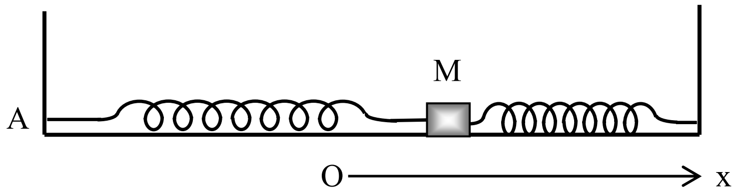
où A_1 et A_2 sont des constantes à trouver à partir des conditions initiales du mouvement du point matériel.

A l'instant $t = 0$, le point matériel est abandonné sans vitesse initiale d'un point d'abscisse x_0.

h) Déterminer x(t), l'équation horaire du mouvement du point matériel en fonction de x_0 et ω_0.
i) En déduire la force de rappel du ressort en fonction de x_0, ω_0 et k.

EXERCICE IV-15

Un point matériel M de masse m est attaché à deux ressorts horizontaux de raideurs k_1 et k_2 et de longueurs à vide l_{01} et l_{02} reliés à deux points fixes distants de $(l_{01}+l_{02})$. Le point M glisse sans frottement le long de l'axe Ox à partir de sa position d'équilibre. A l'instant t = 0, le point matériel est abandonné sans vitesse initiale d'un point d'abscisse x_0.



a) Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le point M.
b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
c) Etablir les deux équations scalaires en projetant cette équation vectorielle selon les axes d'une base vectorielle.
d) Identifier l'équation du mouvement.
e) De quel type d'équation s'agit-il ?
f) Déterminer ω_0, la pulsation propre du mouvement.
g) Déterminer T, la période du mouvement.
h) Que peut-on conclure sur l'association de deux ressorts ?

La solution d'une telle équation a la forme :

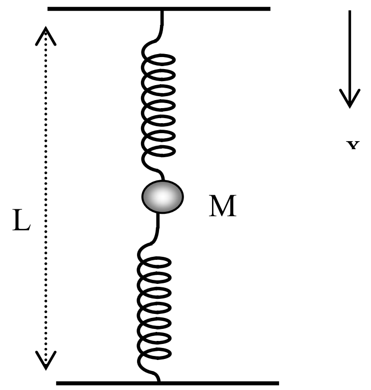
$$x(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t$$

où A_1 et A_2 sont des constantes à définir à partir des conditions initiales du mouvement du point matériel.

i) Déterminer x(t), l'équation horaire du mouvement du point matériel en fonction de x_0 et ω_0 .

EXERCICE IV-16

Un point matériel M de masse m est fixé à deux ressorts verticaux identiques de raideur k et de longueur l_0 au repos. La distance entre les deux extrémités fixes des ressorts est notée L.



a) Etablir à l'équilibre le principe fondamental de la dynamique.
b) Etablir l'équation scalaire en projetant cette équation vectorielle selon l'axe vertical.
c) En déduire à l'équilibre les longueurs l_1 et l_2 des ressorts en fonction de m, k, g et L.

A l'instant t = 0, le point matériel est déplacé horizontalement de x_0 et relâché sans vitesse initiale.

d) En supposant que le poids est négligeable devant les forces élastiques des ressorts ($mg \ll kL$), que deviennent les longueurs l_1 et l_2.
e) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
f) Etablir l'équation scalaire $\ddot{x}$, en projetant cette équation vectorielle selon l'axe du mouvement de M, l'axe horizontal.
g) Réécrire l'équation précédente en supposant les petits déplacements horizontaux $x \ll L$.
h) Calculer ω, la pulsation du mouvement de M.
i) Calculer T, la période du mouvement de M.

La solution générale de l'équation du mouvement est de la forme :

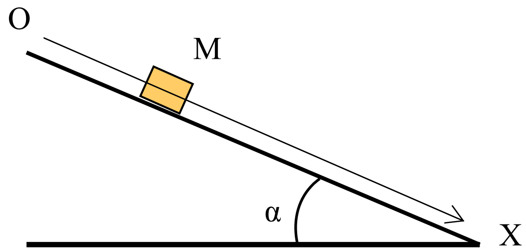
$$x(t) = A \cos\omega t + B \sin\omega t$$

j) Déterminer les constantes du mouvement A et B à partir des conditions initiales du mouvement.
k) En déduire la solution x(t).

EXERCICE IV-17

Un mobile M, de masse m, glisse sans frottements sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale.

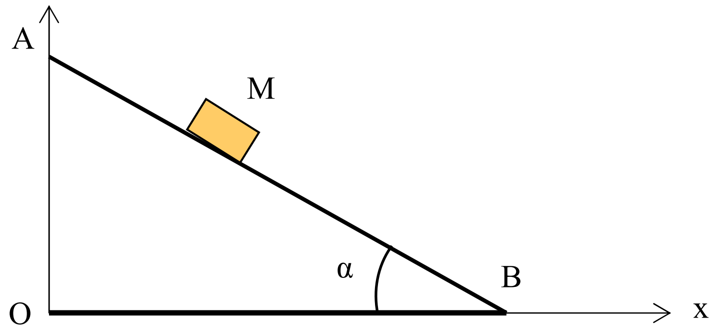
a) La réaction du plan incliné existe-elle ?
Si oui, représenter-la, et donner sa valeur en fonction de la masse m du mobile.



b) En étudiant le bilan des forces agissant sur le mobile, déterminer la nature du mouvement du mobile.
c) Ecrire le principe fondamental de la dynamique à l'équilibre (l'équation du mouvement).
d) Projeter cette équation selon l'axe du mouvement pour trouver l'équation scalaire du mouvement.
e) Calculer l'accélération du mouvement.

EXERCICE IV-18

Un paquet de masse m = 10 kg supposé point matériel glisse sans vitesse initiale à partir du point A sur un plan incliné de hauteur OA = h = 4 m et de base OB = d = h.



Le plan exerce sur le paquet une réaction normale $\vec{R}_N$ ainsi qu'une réaction tangentielle $\vec{R}_T$ (frottement solide) telle que : $\|\vec{R}_T\| = f\,\|\vec{R}_N\|$ avec f = 0,5 appelé coefficient dynamique.

a) Représenter et écrire les différentes forces agissant sur le paquet.

b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement du paquet).

c) Projeter cette équation vectorielle selon les deux axes, l'un Ax suivant le mouvement du paquet et l'autre lui est perpendiculaire, pour trouver les deux équations scalaires qui régissent le mouvement du paquet.

d) En déduire R_N et R_T en fonction de m, g, f et α.

e) Ecrire l'expression de l'accélération du paquet.

f) En déduire sa vitesse.

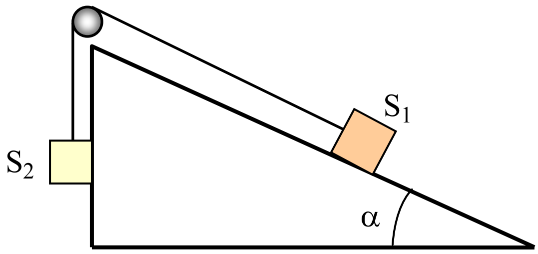
g) Donner x(t), l'expression de la position du paquet en fonction du temps.

h) Quel est le temps nécessaire au paquet pour qu'il atteigne le point B.

EXERCICE IV-19

Deux corps S_1 et S_2 assimilés à des points matériels de masses m_1 et m_2 sont liés par un fil idéal (souple, inextensible et d'inertie négligeable) passant par une poulie idéale (inertie négligeable).

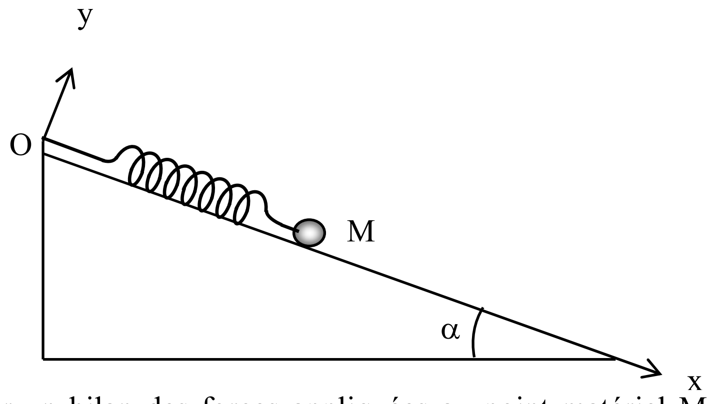
S_1 glisse sans frottement sur un plan incliné d'angle α et S_2 se déplace verticalement.



a) Représenter les différentes forces s'exerçant sur S_1.
b) Représenter les différentes forces s'exerçant sur S_2.
c) Etablir l'équation du mouvement de S_1 à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique selon l'axe du mouvement.
d) Etablir l'équation du mouvement de S_2 à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique selon l'axe du mouvement.
e) Déterminer l'accélération des deux solides en fonction de m_1, m_2, g et α.

EXERCICE IV-20

Un point matériel M de masse m est relié à un ressort de raideur k et de longueur l_0 au repos. L'autre extrémité du ressort est liée au point fixe O d'un plan incliné d'un angle α. On néglige les frottements.



a) Etablir un bilan des forces appliquées au point matériel M, à l'équilibre.
b) A l'état d'équilibre (en absence de mouvement), la position de M est x_e. Etablir, à l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique.
c) Déterminer x_e en fonction de m, k, g, l_0 et α.

A partir de la position d'équilibre, M est déplacé d'une distance d puis relâché sans vitesse initiale.

d) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
e) En projetant cette équation vectorielle selon les deux axes, écrire l'équation du mouvement en fonction de x_e.
f) En posant $x_1 = x - x_e$, résoudre l'équation du mouvement.
g) En déduire x(t).

EXERCICE IV-21

Un individu de masse M assimilé à un point matériel, fait un bond (il saute depuis le sol vers l'avant) à partir d'un point O avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec le sol. On considère qu'il n'y aucune force de frottement dans l'air.

a) Ecrire $\vec{v}_0$, l'expression du vecteur vitesse de l'individu dans une base vectorielle $(\vec{i}, \vec{j})$ adéquate.

b) Ecrire l'expression des différentes forces agissant sur l'individu.
c) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement de l'individu).
d) Projeter cette équation vectorielle sur les deux axes pour obtenir $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ les deux équations scalaires du mouvement.
e) Déterminer $\dot{x}$ et $\dot{y}$ les deux équations de la vitesse en fonction du temps.
f) En déduire x et y les deux équations du mouvement de l'individu.
g) En déduire $y(x)$, l'équation de la trajectoire de l'individu.
h) L'individu retombe sur le sol pour $y = 0$, trouver la distance d parcourue lors de ce saut en fonction de v_0 et α.

EXERCICE IV-22

Un joueur de basket-ball est à une distance D du panneau. Il tire son ballon (supposé point matériel) d'une hauteur h au dessus du sol en imposant une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec l'horizontal.

Le cercle du panneau est situé à une hauteur H. On néglige les frottements de l'air.

a) Quelles sont les différentes forces agissant sur le ballon.
b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement du ballon lors du tir).
c) A partir de la projection de cette équation, donner $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ les deux équations scalaires du mouvement du ballon.
d) En prenant compte des conditions initiales, déduire $\dot{x}$ et $\dot{y}$ les deux équations de la vitesse du ballon.
e) En prenant l'origine au sol sous le panneau, déduire x et y les équations de la position du ballon.
f) Déterminer $y(x)$, l'équation de la trajectoire du ballon.

EXERCICE IV-23

Une bille est lancée depuis le sol avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. Le vecteur vitesse forme avec l'horizontal un angle α. On néglige tout frottement.

L'origine O du repère adéquat Oxz correspond à la position initiale de la bille.

a) Quelles sont les forces s'exerçant sur la bille.
b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement).
c) En projetant l'équation du mouvement selon les deux axes Ox et Oz, déterminer $\ddot{x}$ et $\ddot{z}$ les deux équations scalaires du mouvement de la bille.
d) Déduire $\dot{x}$ et $\dot{z}$ les deux composantes de la vitesse de la bille selon les deux axes Ox et Oz.
e) En introduisant les conditions initiales, déduire x(t) et z(t) les équations horaires du mouvement de la bille en fonction de l'angle α.
f) Déterminer z(x), l'équation de la trajectoire.
g) Quelle est la nature de cette trajectoire.
h) Exprimer z_{max} l'altitude maximale en fonction de α.
i) Quelle est la valeur de l'angle α qui rend cette altitude maximale.
j) La portée du tir correspond à l'abscisse x_{max} de la bille lorsqu'elle retombe sur le sol. Exprimer cette portée en fonction de α.
k) Quelle est la valeur de l'angle α qui rend cette portée maximale.
l) Soit un point $M_0(x_0, y_0)$ de l'espace. Etablir l'équation donnant les valeurs de α permettant à la bille d'atteindre ce point. C'est une équation trigonométrique de second degré.
m) La résolution de cette équation dépend du signe du discriminent Δ. Que signifie les cas $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$.

EXERCICE IV-24

Un point matériel de masse m est lancé depuis O avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle θ avec l'horizontal Ox. Le point subit une force de frottement fluide dont la norme est proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{F}_{fr} = -k\,\vec{v} \quad \text{avec} \quad k > 0.$$

Quelles sont les forces s'exerçant sur le point matériel.

a) Ecrire le principe fondamental de la dynamique. C'est l'équation du mouvement, une équation vectorielle.
b) Déduire les deux équations scalaires du mouvement de la bille $\ddot{x}$ et $\ddot{z}$ en projetant l'équation du mouvement selon les deux axes Ox et Oz.
c) Déduire $\dot{x}(t)$ et $\dot{z}(t)$ les deux composantes de la vitesse du point selon les deux axes Ox et Oz.
d) En introduisant les conditions initiales, déduire x(t) et z(t) les équations horaires du mouvement du point.
e) Déterminer $t_{apogée}$, le temps pour lequel le point atteint son altitude maximale z_{max}.
f) Déterminer $x_{apogée}$, l'abscisse pour laquelle le point atteint son altitude maximale.

EXERCICE IV-25

Un point matériel de masse m est lancé depuis O avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle θ avec l'horizontal Ox. Le point subit une force de frottement opposée à la vitesse et de norme : $F_{fr} = \alpha_{fr}\, v$ avec $\alpha_{fr} > 0$.

a) Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le point matériel.
b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique. Faire apparaitre le vecteur vitesse $\vec{v}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt}$ dans cette équation.

c) En prenant compte des conditions initiales, écrire le vecteur vitesse $\vec{v}$, solution de cette équation différentielle.
d) En déduire les deux composantes x(t) et z(t) du vecteur position.
e) Ecrire z(x), l'équation de la trajectoire du mouvement du point matériel.

EXERCICE IV-26

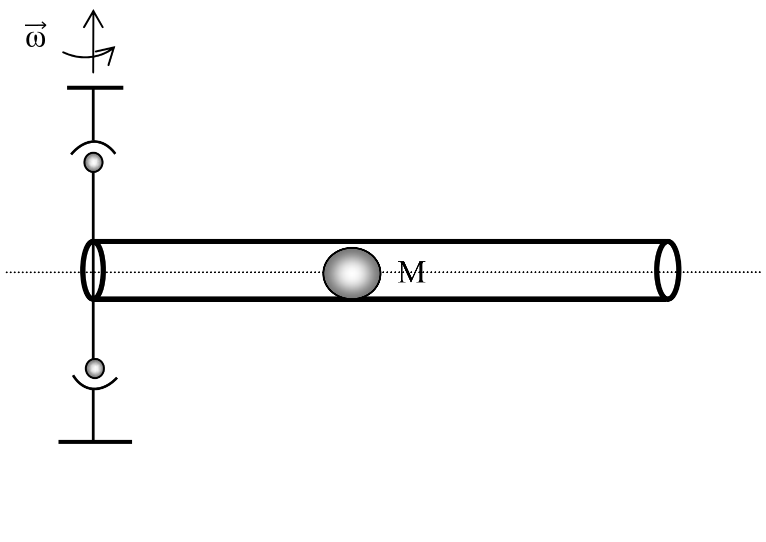
Soit un point matériel animé d'un mouvement circulaire uniforme.

a) A-t-il une accélération ?
b) Si oui, elle est dans quelle direction, son accélération ?
c) Ce point, est-il-isolé ?

EXERCICE IV-27

Un tube creux tourne dans le plan horizontal à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante autour de l'une de ses extrémités.

L'axe de rotation Oz étant vertical. Une bille de masse m assimilée à un point matériel M se déplace sans frottement à l'intérieur de ce tube. A l'instant initial, la bille est lâchée sans vitesse initiale à partir d'une distance r_0 de l'axe vertical.



Etude cinématique :

a) Dans un repère lié à la tige de vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, exprimer le vecteur positon $\overrightarrow{OM}$ de la bille. $\vec{u}_r$ est supposé suivant la tige.
b) En déduire $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse de la bille dans la même base vectorielle.
c) En déduire $\vec{\gamma}(M)$, le vecteur accélération de la bille dans la même base vectorielle.

Etude dynamique :

d) Représenter et écrire dans la base vectorielle $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ les différentes forces s'exerçant sur la bille.
e) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
f) Etablir les trois équations scalaires du mouvement en projetant cette équation vectorielle selon les trois axes de la base vectorielle.
g) Parmi ces trois équations, identifier l'équation du mouvement.
h) Résoudre cette équation, sachant que la solution d'une équation différentielle linéaire est une fonction du temps construite à partir de la fonction exponentielle :

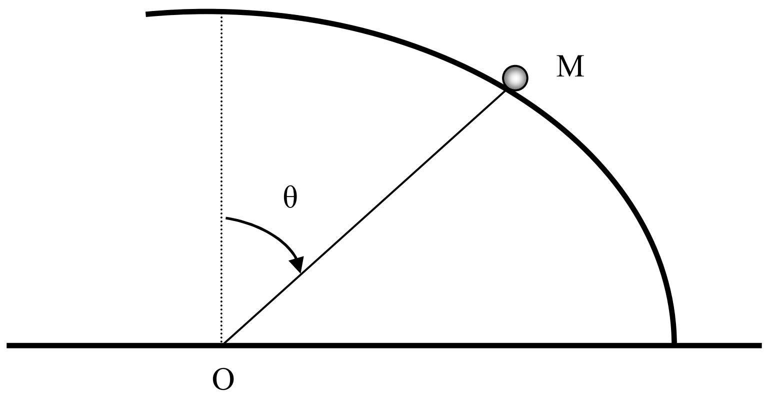
$$r(t) = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t}$$

i) Quelle est l'allure de la trajectoire de la bille ?

EXERCICE IV-28

Un point matériel M de masse m est initialement au sommet d'un demi cercle de rayon R. A l'instant $t = 0$, le point matériel est lâché sans vitesse initiale.

Lors de son déplacement, un angle θ est mesuré entre la verticale et la direction $\overrightarrow{OM}$ où O est le centre du cercle. On néglige les forces de frottement.



On distinguera : *i)* le mouvement de point M au contact du cercle ;

ii) le mouvement qui suit le décollement.

Etude cinématique :

a) Au contact du cercle, exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction de R et θ, dans la base vectorielle $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ liée au point matériel.
b) En déduire $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel, toujours au contact avec le cercle.
c) En déduire $\vec{\gamma}(M)$, le vecteur accélération du point matériel, toujours au contact avec le cercle.

Etude dynamique :

d) Représenter et écrire dans la base vectorielle $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, les différentes forces s'exerçant sur le point matériel.
e) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
f) Etablir les deux équations scalaires en projetant cette équation vectorielle selon les axes de la base vectorielle.
g) Parmi ces deux équations, identifier l'équation du mouvement.
h) Déduire le module de la réaction de la surface du cercle en fonction de $\dot{\theta}$ et θ.

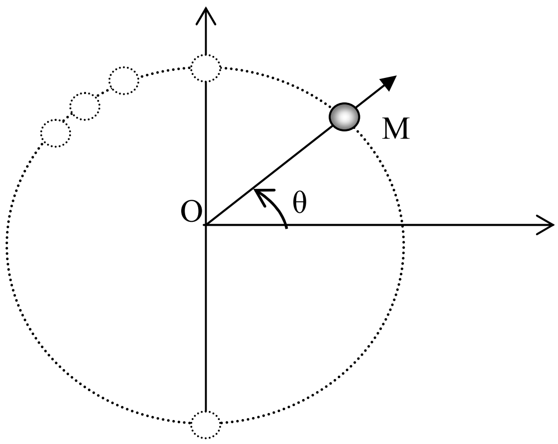
i) Afin de trouver l'équation connue sous le nom d' ''intégrale première du mouvement'', multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, puis intégrer-la.
j) En déduire l'expression de la réaction du cercle en fonction de m, g et θ.
k) Quelle est l'angle θ_{decol} pour lequel le point M quitte le cercle.
l) Quelle est la nature du mouvement du point matériel après décollage ?

EXERCICE IV-29

Un homme fait tourner une balle de masse m assimilée à un point matériel M attachée à un fil de masse négligeable et de longueur R = OM.

La trajectoire de la balle est un cercle de centre O qui se fait dans le plan vertical.

On néglige les frottements ainsi que le mouvement de la main de l'homme.



a) Etablir un bilan des forces appliquées au point matériel M dans la base vectorielle ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$) liée au point matériel.
b) Ecrire l'expression de $\vec{\gamma}$(M), le vecteur accélération du point matériel dans la même base.
c) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
d) Etablir les deux équations scalaires en projetant cette équation vectorielle selon les axes de la base vectorielle.
e) Parmi ces deux équations, identifier l'équation du mouvement.
f) Déterminer T, l'expression de la tension du fil.

Pour que la balle reste sur le cercle, il faut que le fil ne se détende pas, c'est-à-dire qu'il faut que T $\geq$ 0.

g) Déterminer la vitesse minimum v_{min} que doit avoir la balle dans la plus haute position ($\theta = \frac{\pi}{2}$) sans que le fil ne se détende.

EXERCICE IV-30

Un footballeur tire un penalty à l'aide d'un ballon de masse m = 0,45 kg avec une force d'impact de 560 N. la durée de frappe est de 20 ms.

a) Ecrire l'expression de la quantité de mouvement du ballon.
b) Ecrire le théorème de la variation de la quantité de mouvement.
c) En déduire la vitesse du ballon juste après la frappe.
d) En supposant que le mouvement du ballon est uniforme, trouver le temps nécessaire pour que le ballon arrive à la ligne de buts distancée de 11 m du point du tir.
e) Pensez-vous que le gardien aura le temps d'intercepter le ballon ?

EXERCICE IV-31

Une balle A de masse m est tirée dans la direction d'une boite en bois de masse M sur un plan horizontal.

Juste avant le choc, la balle a une vitesse v_A. Le choc est supposé mou, la balle pénètre le bois et l'ensemble se déplace à la vitesse v_B.

a) Ecrire la quantité de mouvement de l'ensemble (balle + boite) avant le choc.
b) Ecrire la quantité de mouvement de l'ensemble après le choc.
c) Etablir le principe de la conservation de la quantité de mouvement.
d) En déduire la vitesse v_B de l'ensemble après le choc.

EXERCICE IV-32

Un astronaute de 80 kg dans l'espace tient dans ses mains un objet de 4 kg. Ils sont initialement immobiles dans l'espace. L'astronaute lance l'objet de sorte que celle-ci se déplace avec une vitesse de $5\ ms^{-1}$.

Quelle est la vitesse de l'astronaute après le lancement de l'objet ?

EXERCICE IV-33

Une personne de 60 kg au repos sur une planche à roulette attrape une balle de baseball de masse 0,14 kg allant à $44\ ms^{-1}$. Quelle sera la vitesse de la personne (avec la balle dans les mains) après l'attrapée ?

EXERCICE IV-34

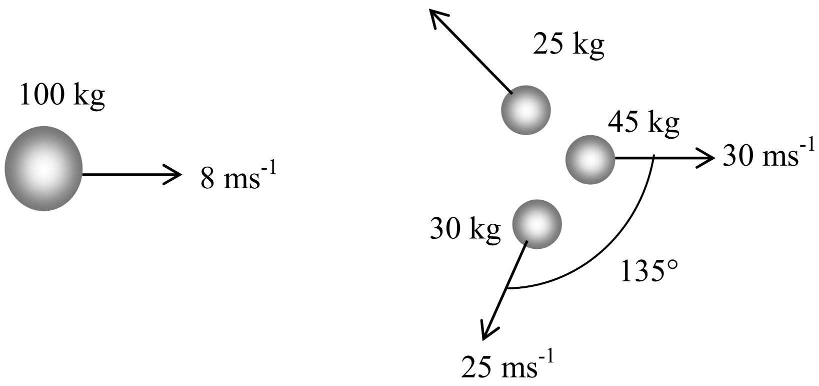
Un canon de 500 kg, initialement au repos, lance un obus de 5 kg avec une vitesse de $350\ ms^{-1}$. Quelle est la vitesse du recul du canon après le départ de l'obus ?

EXERCICE IV-35

Un chien de 10 kg est sur un radeau de 30 kg. Initialement, le radeau et le chien sont immobiles. Puis le chien commence à marcher dans une direction avec une vitesse de 8 ms^{-1}. Quelle est la vitesse du radeau ?

EXERCICE IV-36

Une bombe de 100 kg se déplaçant à 8 ms^{-1} explose en trois fragments. Si la vitesse et la direction des fragments de 30 kg et 45 kg sont celles indiquées sur la figure, quelle est la vitesse du fragment de 25 kg ?



EXERCICE IV-37

Une voiture de 1200 kg et de vitesse 50 kmh^{-1} entre en collision avec un camion de 5400 kg et de vitesse 50 kmh^{-1}. Quelle sera la vitesse des véhicules après la collision s'ils restent collés ensemble ?

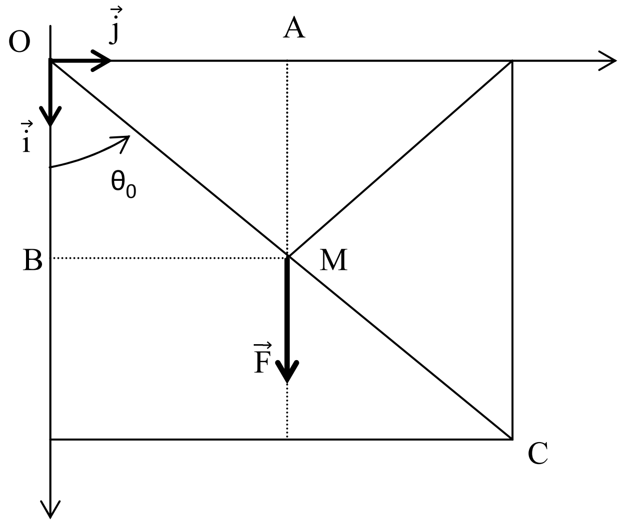
EXERCICE IV-38

Une balle de 1 kg allant à 5 ms^{-1} vers la droite entre en collision parfaitement élastique avec une balle de 2 kg allant vers la gauche à 2 ms^{-1}. Quelle est la vitesse de chaque balle après la collision ?

EXERCICE IV-39

Soit un point matériel soumis à une force $\vec{F} = F\,\vec{i}$.

Avec : $F = 10^3$ N; $l = 1$ m et $\theta_0 = 45°$



a) Exprimer $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$, le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O. Calculer sa norme.

b) Exprimer $\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{F})$, le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point B. Calculer sa norme.

c) Exprimer $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$, le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A. Calculer sa norme.

d) Exprimer $\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{F})$, le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point C. Calculer sa norme.

EXERCICE IV-40

Un pendule simple est constitué d'un point matériel M de masse m relié au point fixe O par un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. A $t = 0$, on abandonne l'ensemble sans vitesse initiale, le fil faisant un angle θ_0 avec la verticale. On néglige tous les frottements.

a) Ecrire $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel, dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ liée à ce point.

b) Ecrire $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel.

c) Ecrire $\vec{L}_O$, le moment cinétique du point matériel par rapport au point O.

d) Calculer $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$, la variation de ce moment cinétique.

e) Représenter et écrire les différentes forces agissant sur le point matériel.

f) Calculer $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$, le moment du poids de M par rapport au point O.

g) Calculer $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$, le moment de la tension du fil par rapport au point O.

h) En déduire $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$, le moment total des différentes forces par rapport au point O.

i) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O, déterminer l'équation du mouvement du point matériel.

j) Que devient cette équation dans le cas des petites élongations angulaires.

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme

$$\theta(t) = A \cos\omega t + B \sin\omega t$$

k) Déterminer les constantes du mouvement A et B.

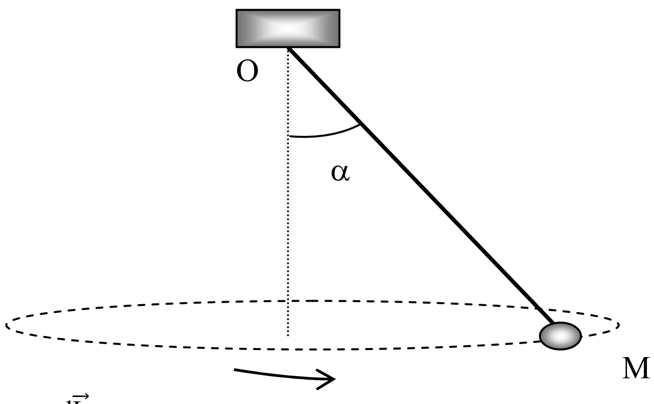
l) En déduire la solution $\theta(t)$.

m) En déduire la période du mouvement.

EXERCICE IV-41

L’ensemble du fil de longueur l et du point matériel M de masse m qui lui est attaché, décrit un cône d’axe vertical et de demi-angle α à la vitesse angulaire Ω constante. Voir la figure. On néglige tous les frottements.

a) Ecrire $\vec{L}_O$, le moment cinétique du point matériel par rapport au point O.



b) Calculer $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$, la variation de ce moment cinétique.

c) Représenter et écrire les différentes forces agissant sur le point matériel.

d) Calculer $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$, le moment du poids de M par rapport au point O.

e) Calculer $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$, le moment de la tension du fil par rapport au point O.

f) En déduire $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$, le moment total des différentes forces par rapport au point O.

g) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O, trouver Ω en fonction de g, l et α.

EXERCICE IV-42

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottements de haut en bas d'une colline. La trajectoire est assimilée à un cercle vertical de centre O et de rayon R. L'angle que fait OM avec la verticale est noté θ. Le point matériel démarre de la position la plus haute ($\theta = 0$) avec une vitesse initiale v_0. On choisit une base de vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ liée au point M.

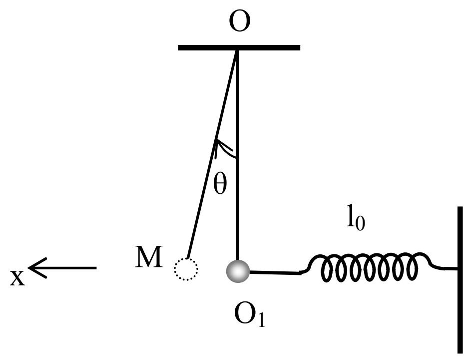
a) Représenter les forces s'exerçant sur le point matériel.
b) Ecrire $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel, dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.
c) Ecrire $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel.
d) Ecrire $\vec{L}_O$, le moment cinétique du point matériel par rapport au point O.
e) Calculer $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$, la variation de ce moment cinétique.
f) Ecrire le moment de chaque force agissant sur le point matériel ainsi que le moment total de ces forces, par rapport au point O.
g) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O, déterminer l'équation du mouvement du point matériel.

EXERCICE IV-43

Un point matériel M de masse m est relié à un fil inextensible (de longueur l et de masse négligeable) et à un ressort horizontal (de raideur k et de longueur au repos l_0).

Lorsque le point matériel se trouve au repos, en O_1, le fil est vertical. Les petits déplacements (oscillations) de M sont quasi-horizontaux tels que $O_1M = x << l$.

La déviation du fil par rapport à la verticale est notée θ.



a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point M dans la base vectorielle $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ liée au point M.
b) Exprimer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point M dans la même base vectorielle.
c) Exprimer $\vec{L}_O$, le moment cinétique du point matériel M, par rapport à O.
d) Calculer $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$, la variation de ce moment cinétique.
e) Quelles sont les forces s'exerçant sur le point matériel.
f) Calculer le moment de chacune de ces forces par rapport à O.
g) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O, écrire l'équation du mouvement du point matériel M.
h) En déduire la pulsation du mouvement en fonction de l, k et m.
i) En déduire la période du mouvement.

EXERCICE IV-44

Un point matériel M de masse m est soumis à une force centrale vers un point fixe O. A $t = 0$, le point M se trouve en M_0 avec une vitesse v_0.

a) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O, montrer que le moment cinétique d'une force centrale est constant.

On se place en coordonnées polaires de base vectorielle $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et d'origine O.

b) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point M dans cette base vectorielle.

c) Exprimer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse de M.

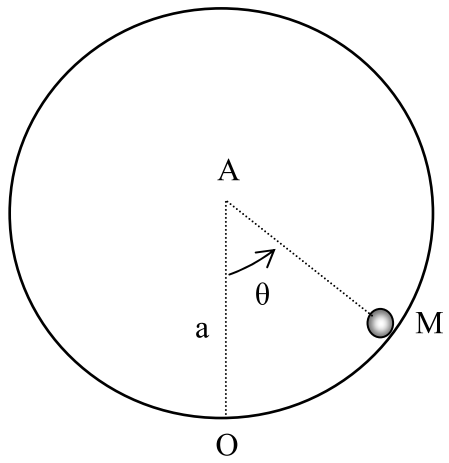
d) Exprimer $\vec{L}_O$, le moment cinétique du point M par rapport à O.

e) Montrer que le terme $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

Cette constante est appelée *constante des aires*.

EXERCICE IV-45

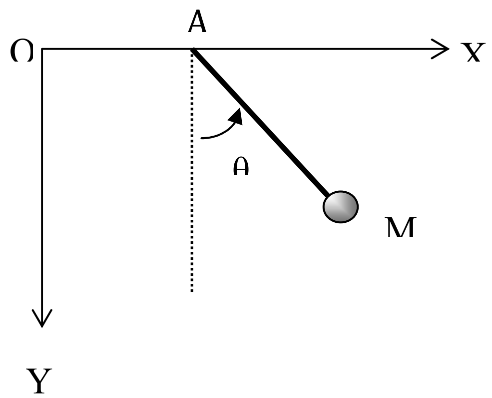
Un point matériel M de masse m glisse sans frottements sous l'action de son poids sur un guide circulaire de rayon a et de centre A.



a) Ecrire et représenter les forces agissant sur le point matériel.
b) Ecrire le moment de chaque force agissant sur le point matériel, par rapport au point A.
c) En déduire le moment total de ces forces, par rapport au point A.
d) Ecrire $\overrightarrow{AM}$ le vecteur position du point matériel M.
e) Ecrire $\vec{V}(M)$ le vecteur vitesse du point matériel M.
f) Déterminer $\vec{L}_A(M)$, le moment cinétique du point matériel par rapport au point A.
g) En déduire $\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt}$.
h) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à A, déterminer l'équation du mouvement du point matériel.
i) En déduire ω_0, la pulsation des petits mouvements de M autour de sa position d'équilibre.
j) En déduire T_0, la période de ce mouvement.

EXERCICE IV-46

Un pendule simple de masse m et de longueur l. Son extrémité A suit des oscillations horizontales de type : $x_A = x_0 \sin\omega t$.



a) Pour utiliser le théorème du moment cinétique, vaut-il mieux l'appliquer au point mobile A ou au point fixe O.
b) Calculer $\vec{v}_A$, le vecteur vitesse de l'extrémité A.
c) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel M.
d) Calculer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel M.
e) Calculer $\vec{L}_A(M)$, le moment cinétique du point matériel M par rapport au point A.
f) Calculer $\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt}$.
g) Calculer le moment du poids de M par rapport au point A.
h) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à A, déterminer l'équation du mouvement du point matériel.
i) En déduire la pulsation du mouvement.

EXERCICE IV-47

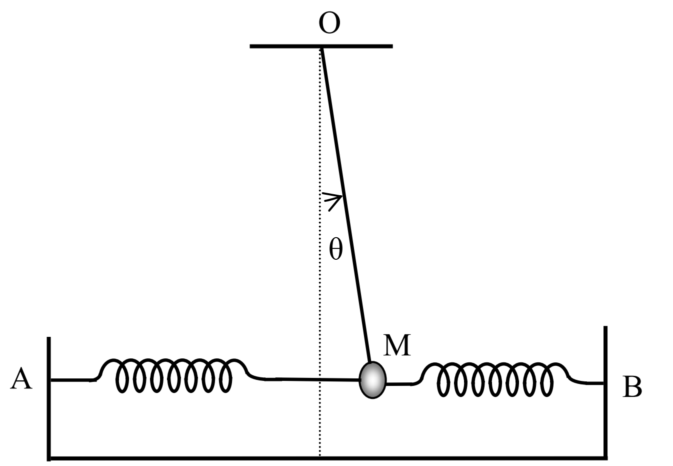
Les oscillations d'un pendule simple de masse m et de longueur l sont amorties par la présence de frottements de type fluide proportionnelle à la vitesse et de coefficient de frottement k: $\vec{F}_f = -k\vec{v}$.

a) Calculer $\vec{L}_O(M)$, le moment cinétique du point M par rapport à O.
b) Calculer le moment total de toutes les forces agissant sur le pont matériel par rapport au point O.
c) En appliquant le théorème du moment cinétique en O, établir l'équation vectorielle du mouvement de M.
d) En déduire l'équation du mouvement dans le cas des petites oscillations.
e) De quel type d'équation s'agit-il ?
f) En déduire ω_0, la pulsation du mouvement.
g) En déduire T, la période du mouvement.

EXERCICE IV-48

Soit un pendule simple de fil de masse négligeable et de longueur l. Le point matériel M de masse m, fixé à l'extrémité de ce pendule est attaché à deux ressorts horizontaux identiques de raideur k et de longueur à vide l_0 reliés à deux points fixes A et B distants de $2l_0$. Les ressorts sont au repos quand le pendule est vertical.

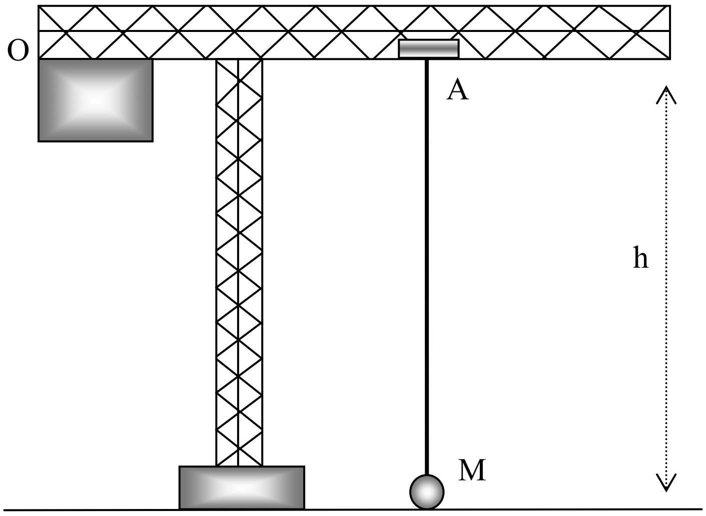
On déplace légèrement le point M puis on le laisse osciller sans frottement avec une faible amplitude (mouvement quasi-horizontal).



a) Etablir un bilan de toutes les forces s'exerçant sur le point M.
b) Calculer le moment de chacune de ces forces par rapport à O.
c) Calculer $\vec{L}_O(M)$, le moment cinétique du point M par rapport à O.
d) En appliquant le théorème du moment cinétique en O, établir l'équation vectorielle du mouvement de M.
e) En déduire l'équation du mouvement dans le cas des petites oscillations.
f) De quel type d'équation s'agit-il ?
g) En déduire ω_0, la pulsation du mouvement.
h) En déduire T, la période du mouvement.

EXERCICE IV-49

Une grue doit déplacer d'un point à un autre du chantier une charge M de masse m supposée ponctuelle.



a) Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur la charge M lorsqu'elle est posée sur le sol.
b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique à l'équilibre (lorsque la charge M est en contact avec le sol).
c) Quelle est la condition pour que la masse se soulève du sol.
d) En déduire $\vec{T}$, la tension du câble lorsque la masse décolle.

L'enrouleur remonte le câble avec une accélération γ_v constante.

e) Ecrire l'équation du mouvement de la charge en appliquant le principe fondamental de la dynamique.
f) Projeter cette équation sur l'axe du mouvement et déduire la tension du câble en fonction de m, g et γ_v.

La montée de M est stoppée à mi-hauteur. Le chariot se met en mouvement horizontal avec une accélération γ_h constante.

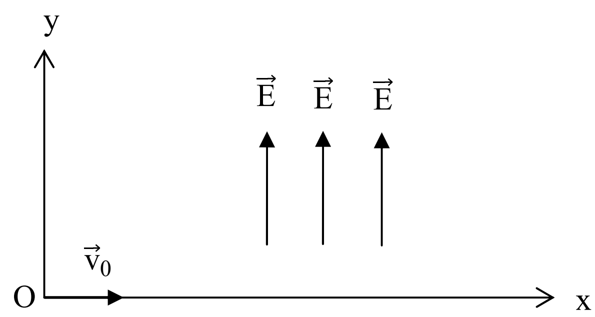
g) Ecrire l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ en passant par le point A.
h) Sachant que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est constant, déterminer $\vec{\gamma}_M$, l'accélération du point M.
i) Représenter toutes les forces agissant sur M et déduire à partir de la représentation vectorielle:

- l'angle α que fait la câble avec la verticale en fonction de m, g et γ_h.

- la tension du câble en fonction de m, g et γ_h.

EXERCICE IV-50

Un électron de masse m et de charge –e pénètre avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans une région de l'espace où règne un champ uniforme $\vec{E}$. On néglige le poids de l'électron. A $t = 0$, $x = y = 0$ et $\dot{x} = v_0$ et $\dot{y} = 0$. Voir la figure.



a) Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur l'électron dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement de l'électron). C'est une équation vectorielle.
c) En projetant cette équation, déduire $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$, les deux équations scalaires du mouvement de l'électron.
d) Déterminer les composantes de la vitesse : $\dot{x}$ et $\dot{y}$.
e) Déterminer les composantes de la position : x et y.
f) En déduire la trajectoire de l'électron dans cette zone où règne le champ électrique.

EXERCICE IV-51

Un véhicule de masse m, assimilé à point matériel, roule à vitesse constante v_0= 24 ms^{-1} sur une route rectiligne horizontale. Afin d'éviter un choc contre un obstacle, le véhicule s'engage dans un processus de freinage.

La force de frottement constante des roues sur la chaussée est donnée par $F_f = - f\,mg$ où f = 0,6 est le coefficient de frottement pneu-chaussée.

Au début du freinage (à t = 0), la distance de freinage était nulle (x = 0).

a) Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le véhicule.
b) Ecrire l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique et établir $\ddot{x}$, l'accélération du mouvement.
c) Déduire $\dot{x}$, l'expression de la vitesse du véhicule en fonction du temps.
d) Déduire t_d, l'expression du temps d'arrêt du véhicule.
e) Calculer la valeur de t_d.
f) En tenant compte des conditions initiales du freinage, établir x(t), l'expression de position du véhicule.
g) En déduire $x(t_d)$, l'expression de la distance d'arrêt.
h) Calculer la valeur de $x(t_d)$.

EXERCICE IV-52

Une voiture de masse m = 1300 kg assimilée à un point matériel M roule sur une route horizontale. Pendant que sa vitesse est v_1=100 kmh^{-1} elle freine. Le temps nécessaire à l'arrêt complet de la voiture est t_f =7 s. on suppose que la décélération est constante.

a) Etablir un bilan des forces appliquées au point matériel M dans une base vectorielle adéquate. (Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le point M).
b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
c) Etablir l'équation scalaire du mouvement ($\ddot{x}$) en projetant cette équation vectorielle selon l'axe du mouvement.
d) Etablir l'équation que vérifie la vitesse ($\dot{x}$).
e) En tenant compte des conditions initiales et finales du freinage, déterminer F la force de freinage.
f) Etablir l'équation que vérifie la position (x).
g) En tenant compte des conditions initiales et finales du freinage, déterminer d la distance d'arrêt de la voiture.
h) Tracer la courbe $d(v_1)$, la distance d'arrêt en fonction de la vitesse de la voiture pour des valeurs de vitesse allant de 20 jusqu'à 160 kmh^{-1}.
i) Que peut-on conclure ?

EXERCICE IV-53

Lors d'un choc frontal, on assimile une voiture de masse $m = 1300$ kg à un point matériel. L'avant de la voiture (qui va se déformer) est modélisé par un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur à vide $l_0 = 2$ m (longueur au début du choc).

La voiture arrive avec une vitesse $v_0 = 36\ kmh^{-1}$ (vitesse initiale). Sa vitesse s'annule lorsque le ressort s'est comprimé de $\frac{l_0}{2}$ (vitesse finale nulle).

On néglige tout frottement.

a) Etablir un bilan des forces appliquées au point matériel M dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur le point M).

b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.
c) Etablir les deux équations scalaires en projetant cette équation vectorielle selon les axes de la base vectorielle.
d) Parmi ces deux équations, identifier l'équation du mouvement.
e) Déterminer ω_0 la pulsation propre du mouvement.
f) Déterminer T la période du mouvement.

La solution d'une telle équation a la forme :

$$x(t) = A \cos\omega_0 t + B \sin\omega_0 t$$

Où A et B sont des constantes à définir à partir des conditions initiales du choc.

g) Donner l'expression et la valeur numérique de k.
h) Donner l'expression et la valeur numérique de la durée du choc.

EXERCICE IV-54

Un point matériel M de masse m glisse le long de l'axe Ox sous l'action d'une force motrice constante : $\vec{f}_0 = f_0 \, \vec{i}$, ($f_0 > 0$). La résistance de l'air à l'avancement du point matériel se traduit par une force de frottement fluide $\vec{f} = - k \, v^2 \, \vec{i}$ où v est la vitesse du point M et k un coefficient positif de frottement.

A l'instant initial, le point M est au point O sans vitesse initiale.

a) Etablir un bilan des forces appliquées au point matériel M. (Représenter et écrire les différentes forces s'exerçant sur M).
b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement en appliquant le principe fondamental de la dynamique.
c) Etablir l'équation scalaire (en v) en projetant cette équation vectorielle selon l'axe du mouvement de M, l'axe horizontal.
d) D'après cette équation, la vitesse de M croit. Elle atteint une valeur limite v_{lim}. Déterminer cette valeur limite de la vitesse du point matériel en fonction de f_0 et k.

CHAPITRE V

TRAVAIL D'UNE FORCE

RAPPEL DE COURS

Travail d'une force :

Le travail élémentaire d'une force appliquée à un point matériel dans son déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ est :

$$dW = \vec{F} \,.\, \overrightarrow{dl}$$

Le travail total d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel pour un déplacement entre deux points A et B est :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \,.\, \overrightarrow{dl}$$

Force conservative :

Une force est dite conservative si son travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi.

Toute force conservative dérive d'une **énergie potentielle** E_P :

$$\vec{F} = - \overrightarrow{grad}\, E_P$$

Si une force dérive d'une énergie potentielle, son travail est égal et opposé à la **variation de l'énergie potentielle** pendant le trajet :

$$W_{AB} = - \Delta\, E_P$$

Pour l'opérateur $\overrightarrow{grad}$, voir l'appendice.

EXERCICE V-1

Dans la base vectorielle $(\vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy, un point matériel est soumis à une force: $\vec{F} = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$

a) En faisant un raisonnement à l'aide des dérivées partielles croisées, la force $\vec{F}$ est-elle conservative ?

b) Sous l'action de cette force $\vec{F}$, le point matériel se déplace du point O(0,0) au point A(2,0). Calculer le travail reçu par ce point matériel (le travail de la force $\vec{F}$) lors de ce déplacement.
c) Calculer le travail de la force $\vec{F}$ quand le point est déplacé du point A(2,0) au point B(2,4).
d) Calculer le travail total lors de ces deux déplacements successifs.
e) Calculer le travail de la force $\vec{F}$ quand le point matériel se déplace suivant la courbe $y = x^2$ comprise entre les deux points O et B directement sans passer par le point A.
f) La force $\vec{F}$ dérive-elle d'une énergie potentielle ? (Est-elle une force conservative ?) Pourquoi ?

EXERCICE V-2

Une particule de masse m est soumise à une force :

$$\vec{F} = (3x^2 + 6y)\,\vec{i} - 14yz\,\vec{j} + 20xz^2\,\vec{k}$$

se déplace de l'origine au point A(1,1,0) puis au point B(1,1,4).

a) En faisant un raisonnement à l'aide des dérivées partielles croisées, cette force dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

b) Calculer le travail de cette force lors du premier déplacement de la particule de l'origine au point A.

c) Calculer le travail de cette force lors du deuxième déplacement de la particule du point A au point B.

d) Calculer le travail de cette force lors du déplacement de la particule de l'origine au point B sans passer par A.

e) La force $\vec{F}$ dérive-elle d'une énergie potentielle ? (Est-elle une force conservative ?) Pourquoi ?

EXERCICE V-3

Soit une force définie par $\vec{F} = y\,\vec{i} + \lambda x\,\vec{j}$ agissant sur un point matériel.

a) En utilisant les dérivées partielles croisées des composantes de la force, pour quelle valeur de λ ce champ est-il un gradient d'une fonction scalaire ?

b) Exprimer dans ce cas l'énergie potentielle E_P.

c) Calculer le travail de cette force de l'origine O(0,0) au point A(1,1):

- en suivant les deux segments de droite OC et CA. Le point C est défini par ces coordonnées (1,0).
- en suivant la courbe $y = x^3$ reliant le point O au point A.

d) Que peut-on conclure sur le travail effectué suivant ces deux chemins.

EXERCICE V-4

Soit une force $\vec{F} = (3x + y)\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j}$ agissant sur un point matériel M.

a) Calculer le travail W de cette force entre les points O(0,0) et A(1,2) dans les déplacements selon le segment OH puis le segment HA, H(1,0).

b) Déterminer l'équation de l'arc de la parabole reliant O à A.

c) Calculer le travail W de la force dans le déplacement suivant cet arc de la parabole reliant O à A.

d) Le travail de cette force dépend-il du chemin suivi ? La force $\vec{F}$ dérive-elle d'une énergie potentielle ? (Est-elle une force conservative ?)

EXERCICE V-5

Un point matériel est soumis à une force écrite dans la base des vecteurs unitaires polaires $\vec{F} = \frac{k}{r^3}\,(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta\,)$ où k est une constante.

Le point matériel se déplace suivant un mouvement circulaire de rayon $r = R$ et de centre O sur un demi-tour.

a) Ecrire $\vec{r}$, le vecteur position du point matériel dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
b) En déduire $d\vec{r}$, le vecteur position élémentaire.
c) Calculer dW, le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ lors de ce déplacement.
d) Calculer W, le travail de cette force.

EXERCICE V-6

Un point matériel est soumis à l'action d'une force:

$$\vec{F} = (y^2 - x^2)\,\vec{i} + 3xy\,\vec{j}$$

a) Calculer le travail de cette force lorsque le point matériel se déplace de l'origine à un point $C(x_0, y_0)$ directement.

b) Calculer le travail de cette force lorsque le point matériel se déplace de l'origine au même point C en passant par le point $A(x_0, 0)$.

c) Calculer le travail de cette force lorsque le point matériel se déplace de l'origine au même point C en passant par le point $B(0, y_0)$.

d) Le travail de cette force dépend-il du chemin suivi.

e) La force $\vec{F}$ dérive-elle d'une énergie potentielle ? (Est-elle une force conservative).

EXERCICE V-7

Un point matériel M est soumis à l'action d'une force de type :

$$\vec{F} = k\,(x^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j}\,) \text{ où k est une constante.}$$

Le point M se déplace entre O et A(1,1).

a) En raisonnant à l'aide des dérivées partielles croisées, la force $\vec{F}$ est–elle conservative ? Dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?
b) Déterminer W_1, le travail de cette force suivant le chemin direct allant de O vers A.
c) Déterminer W_2, le travail de cette force entre 0 et A lorsque le point matériel suit une trajectoire d'équations paramétriques:
$$x = t \quad \text{et} \quad y = -\,t^2 + 2t$$
d) Les travaux W_1 et W_2 sont-ils moteurs ou résistants.
e) La force $\vec{F}$ est–elle conservative ? dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

EXERCICE V-8

Un point matériel est soumis à l'action de deux forces de nature différente et qui dépendent de la position du point:

$$\vec{F}_1 = a\,(y^2\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j}\,) \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = a\,(xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}\,)$$

où a est une constante.

a) En utilisant la méthode des dérivées partielles croisées, la force $\vec{F}_1$ est-elle conservative ?
b) En utilisant la méthode des dérivées partielles croisées, la force $\vec{F}_2$ est-elle conservative ?
c) Calculer le travail de la force $\vec{F}_1$ sur une trajectoire T_1, menant en ligne droite de l'origine du repère à un point A(1,1).
d) Calculer le travail de la force $\vec{F}_1$ sur une trajectoire T_2, menant de l'origine du repère au point A, mais dont l'équation est celle d'une parabole $y = x^2$.

e) La force $\vec{F}_1$ est-elle une force conservative ? peut-on lui associer une énergie potentielle ?
f) Calculer le travail de la force $\vec{F}_2$ sur la même trajectoire T_1.
g) Calculer le travail de la force $\vec{F}_2$ sur la même trajectoire T_2.
h) La force $\vec{F}_2$ est-elle une force conservative ? peut-on lui associer une énergie potentielle ?

EXERCICE V-9

Un point matériel M de masse m se déplace dans l'espace d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ à un point $B(x_B, y_B, z_B)$.

a) Exprimer le poids du point matériel dans une base adéquate.
b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
c) Donner l'expression du travail du poids entre les points A et B.

EXERCICE V-10

Un point matériel M de masse m se déplace horizontalement sans frottement le long de l'axe Ox. Il est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est fixe.

a) Exprimer la force de rappel élastique exercée par le ressort sur le point matériel.
b) Exprimer le travail de cette force de rappel lors d'un déplacement allant du point $A(x_A)$ vers le point $B(x_B)$.

EXERCICE V-11

Un point matériel M se déplace en ligne droite du point O au point A(2, 4) sous l'action d'une force de type :

$$\vec{F} = (x - ay)\,\vec{i} + (3y - 2x)\,\vec{j}\ .$$

a) Déterminer W_{OA}, le travail de cette force suivant la droite allant de O vers A, en fonction de a.

b) Calculer W_{OA}, le travail de cette force suivant le trajet O vers A en passant par B où B est la projection de A sur Ox.

c) Calculer W_{OA}, le travail de cette force suivant le trajet 0 vers A en passant par C où C est la projection de A sur Oy.

d) Le travail dépend-il du chemin suivi ?

e) Pour qu'elle valeur de a, cette force dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

On suppose maintenant que sous l'action de la force $\vec{F}$, ce point matériel M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon R = 2.

f) Trouver l'équation de ce cercle.

g) Déduire x(t) et y(t), les deux équations paramétriques de ce cercle.

h) En déduire l'expression de la force $\vec{F}$ en fonction du temps.

i) Calculer dx et dy, les déplacements élémentaires du point matériel.

j) Calculer W_{tour}, le travail reçu par le point M s'il effectue un tour complet sur ce cercle (de 0 à 2π).

L'énergie potentielle :

k) Calculer les dérivées partielles croisées de la force $\vec{F}$.

l) Pour quelle valeur de a la force $\vec{F}$ dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

m) Déterminer dans ce cas $E_p(x, y)$, l'énergie potentielle associée.

EXERCICE V-12

On veut amener un point matériel de la position $x = 0$ à $x = 2$ sous l'action d'une force d'expression $F(x) = A\,x^{\frac{3}{2}}$. Trouver le travail fourni lors de ce trajet.

EXERCICE V-13

a) Trouver le travail fourni par la force $\vec{F} = x^2y^3\,\vec{i} + x^3y^2\,\vec{j}$ le long de trois différents trajets menant du point (0,0) au point (1,1).
b) Montrer que cette force est conservative.
c) Trouver la fonction potentielle $U(x, y)$ de laquelle la force dérive.

EXERCICE V-14

a) Trouver le travail fourni par la force $\vec{F} = xy^3\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$ le long de trois différents trajets menant du point (0,0) au point (1,1).
b) Cette force est- elle conservative ?
c) Si oui, trouver la fonction potentielle $U(x, y)$ de laquelle la force dérive.

CHAPITRE VI
ASPECT ENERGETIQUE

RAPPEL DE COURS

Energie cinétique :

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

Théorème de l'énergie cinétique :

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux positions A et B est égal au travail de la force qui lui est appliquée entre ces deux positions.

$$W_{AB} = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)$$

Energie potentielle :

Elle existe sous forme de gravitation, d'interaction ou élastique.

Energie mécanique (totale):

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme des énergies cinétique et potentielle.

$$E_m = E_C + E_P$$

Théorème de l'énergie potentielle :

Si une force dérive d'une énergie potentielle (force conservative), son travail entre deux positions A et B est égal et opposé à la variation de l'énergie potentielle entre ces deux positions.

$$W_{AB} = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B)$$

Principe de conservation de l'énergie mécanique:

L'énergie mécanique (totale) d'un point matériel soumis à une force dérivant d'une énergie potentielle, est conservée.

$$(E_C + E_P)_{\text{au point A}} = (E_C + E_P)_{\text{au point B}} = \text{cte}$$

$$\text{ou} \qquad \Delta E_m = 0$$

Cette équation est appelée *intégrale première de l'énergie*.

Cas d'une force non conservative :

Si un système comporte au moins une force ne dérivant pas d'une énergie potentielle (une force non conservative), l'énergie mécanique n'est pas conservée. Dans ce cas :

$$\Delta E_m = W_{(\text{forces non conservatives})}$$

EXERCICE VI-1

Un point matériel M de masse m est soumis à une force conservative $\vec{F}$.

a) Ecrire la relation entre $W_{\vec{F}}$, le travail de cette force et E_C, l'énergie cinétique de M entre deux positions A et B de sa trajectoire.
b) Ecrire la relation entre $W_{\vec{F}}$, le travail de cette force et E_P, l'énergie potentielle de M entre deux positions A et B de sa trajectoire.
c) Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique durant le mouvement de M entre les deux points A et B.
d) On suppose maintenant qu'en plus de la force conservative $\vec{F}$, le point matériel est soumis à une force de frottement $\vec{f}$. Comment varie alors l'énergie mécanique ?

EXERCICE VI-2

Considérons un point matériel M de masse m situé à une altitude z.

a) Exprimer $\vec{P}$, son poids selon un vecteur adéquat.
b) Exprimer dW, le travail élémentaire du poids.
c) Déduire dE_P, l'énergie potentielle élémentaire du point matériel.
d) En prenant compte des conditions ($E_P = 0$ au niveau du sol), déduire E_P, l'expression de l'énergie potentielle en fonction de z.

EXERCICE VI-3

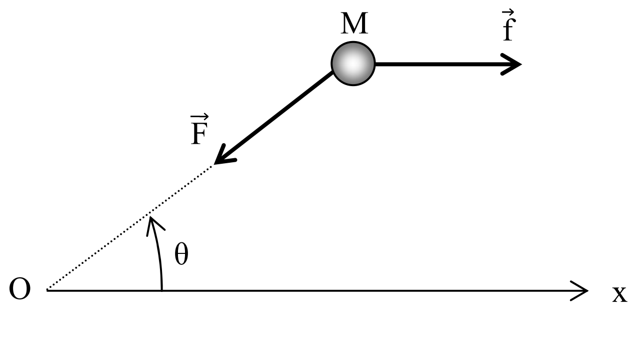
Soit une force $\vec{F} = \alpha y\,\vec{i} + \beta x\,\vec{j}$ agissant sur un point matériel.

a) Calculer les dérivées partielles croisées de cette force.
b) Quelle est la relation entre α et β pour que cette force soit conservative.
c) En déduire dans ce cas, à une constante près, l'énergie potentielle de cette force.

EXERCICE VI-4

Un point matériel M est soumis à deux forces :

- une force centrale $\vec{F} = -k\,\vec{r}$
- une force uniforme $\vec{f} = f\,\vec{i}$



a) Exprimer $dE_P(r, \theta)$, l'énergie potentielle élémentaire dont dérive la force résultante.

b) par intégration, en déduire à une constante près, $E_P(r, \theta)$, l'énergie potentielle totale du point matériel M.

EXERCICE VI-5

Un point matériel M de masse m est relié à un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixe en A. le point M glisse sans frottement le long de l'axe Ox de vecteur unitaire $\vec{i}$.

a) Exprimer $\vec{T}$, la tension du ressort en fonction du déplacement x.

b) Exprimer dW, le travail élémentaire de la tension du ressort.

c) Déduire dE_P, l'énergie potentielle élémentaire du ressort.

d) En prenant compte des conditions initiales ($E_P = 0$ pour $x = 0$), déduire E_P, l'expression de l'énergie potentielle en fonction de x.

EXERCICE VI-6

On laisse tomber un objet de masse $m = 1$ kg du haut d'une tour de hauteur $h = 50$ m avec une vitesse initiale $v_0 = 10\ ms^{-1}$. Désignons par v_S la vitesse de l'objet au niveau du sol.

a) Calculer l'énergie cinétique de l'objet à l'instant initial.
b) Ecrire l'expression de l'énergie cinétique de l'objet lorsqu'il arrive au niveau du sol en fonction de v_S.
c) Quelle sont les forces agissant sur l'objet pendant sa chute en l'absence de frottement.
d) Exprimer le travail de chacune de ces forces.
e) Ecrire le théorème de l'énergie cinétique.
f) En déduire v_S la vitesse de l'objet au niveau du sol.
g) En déduire la valeur de son énergie cinétique lorsqu'il arrive au niveau du sol.

On suppose maintenant que la force de frottement de l'air existe et a comme valeur 1 N.

h) Exprimer le travail de la force de frottement de l'air.
i) Ecrire le théorème de l'énergie cinétique en présence de la force de frottement de l'air.
j) En déduire v_S la vitesse de l'objet au niveau du sol dans ces conditions.
k) En déduire la valeur de son énergie cinétique lorsqu'il arrive au niveau du sol en présence de la force de frottement de l'air.

EXERCICE VI-7

Un point matériel M de masse m se déplace dans un champ de forces dérivant d'une énergie potentielle $E_p = - K \frac{m}{r}$ où K est une constante positive et $r = OM$ (O centre du repère).

On utilise les coordonnées polaires et la base des vecteurs associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ liée au point M.

Dans le cas d'un potentiel central, la force est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

a) Calculer $\vec{V}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.
b) Déterminer l'énergie cinétique du point matériel.
c) En déduire l'expression de l'énergie mécanique du point matériel.

EXERCICE VI-8

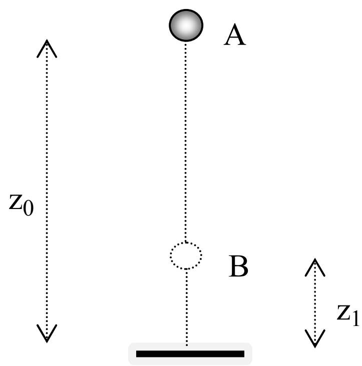
Une particule de masse m est lâchée sans vitesse initiale du point A d'altitude z_0.

A l'instant $t = t_1$, la particule se trouve au point B d'altitude z_1.

Cette particule est soumise à deux forces :

- Son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$

- Une force de frottement de l'air $\vec{f} = -km\vec{v}$ où k est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse de la particule.



La vitesse de la particule en fonction du temps est donnée par :

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$

a) Donner $E_C(A)$, l'énergie cinétique de la particule au point A.
b) Donner $E_C(B)$, l'énergie cinétique de la particule au point B.
c) Calculer la variation de l'énergie cinétique entre les points A et B.
d) Vérifier que le travail de la force du poids est donné par :

$$W_P = \frac{mg^2}{k}\left[t_1 + \frac{1}{k}(e^{-kt_1} - 1)\right]$$

e) Vérifier que le travail de la force de frottement de l'air est donné par

$$W_f = -\frac{mg^2}{k}\left[t_1 - \frac{1}{2k}(e^{-2kt_1} - 1) + \frac{2}{k}(e^{-kt_1} - 1)\right]$$

f) Calculer W_{total}, le travail total des deux forces (poids et frottement).
g) Vérifier le théorème de l'énergie cinétique.

EXERCICE VI-9

Le conducteur d'une voiture de masse m freine en urgence afin d'éviter la collision avec un autobus à l'arrêt.

Le choc ne peut être évité mais heureusement il ne fait aucune victime.

Les marques sur la route indiquent que la voiture a eu besoin d'une distance d égale 25 m pour s'arrêter. Le conducteur affirme qu'il roulait à une vitesse inférieure à 50 kmh^{-1} mais un témoin de l'accident affirme le contraire.

Des tests effectués par des experts scientifiques ont montré que le coefficient de frottement entre les pneus de la voiture et la route est de $C_f = 0{,}6$.

On veut déterminer qui du conducteur ou du témoin avait raison.

Supposant les forces agissant sur la voiture: $\vec{P}$ (le poids), $\vec{N}$ (la réaction normale au sol) et ($F_f = C_f N$) opposée au déplacement.

a) Ecrire l'équation vectorielle du mouvement à partir de la loi fondamentale de la dynamique.

b) A partir de cette équation (et suivant un axe), trouver N en fonction de la masse m.

c) En déduire la force de frottement $\vec{F}_f$ en fonction de la masse m.

d) Trouver le travail total effectué par les différentes forces sur une distance d (d'un point A, début du freinage, au point d'arrêt B) : $W(\vec{P})$, $W(\vec{N})$ et $W(\vec{F}_f)$.

e) Ecrire le théorème de la variation de l'énergie cinétique sur la distance d.

f) En déduire la valeur de la vitesse de la voiture au moment de la collision.

g) Qui avait raison, le conducteur ou le témoin ?

EXERCICE VI-10

Un pendule simple de masse $m = 10$ g et de longueur $l = 1$ m, est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha = 8°$, puis lâché sans vitesse initiale. Les forces de frottements sont supposées négligeables.

Le plan horizontal contenant la position d'équilibre du pendule est choisi comme plan de référence de l'énergie potentielle.

a) Le système est conservatif, quelle est la relation entre son énergie mécanique E_m à tout instant, et son énergie mécanique initiale E_{m0}.
b) Calculer son énergie cinétique initiale E_{C0}.
c) Calculer son énergie potentielle initiale E_{P0} en fonction de l et α.
d) Calculer E_{m0} son énergie mécanique initiale. En déduire son énergie mécanique E_m à tout instant.
e) La vitesse maximale du pendule sera atteinte lorsque l'énergie cinétique est elle-même maximale. Calculer v_m, la vitesse maximale atteinte par le pendule.

EXERCICE VI-11

L'énergie potentielle d'un point matériel est donnée par $E_P = k\,(x^2+ y^2+ z^2)$ où k est une constante.

Quelle est la force agissant sur ce point ?

EXERCICE VI-12

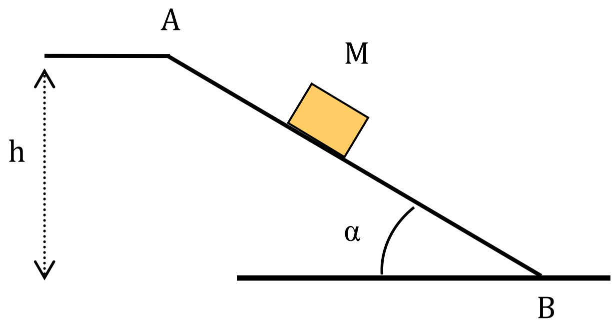
a) Désigner parmi les forces suivantes celles qui sont des forces conservatives :

$$\vec{F} = a\,(y\,\vec{i} + x\,\vec{j})$$
$$\vec{F} = a\,(-y\,\vec{i} + x\,\vec{j})$$
$$\vec{F} = a\,(x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k})$$ où a est une constante.

b) Trouver dans le cas de force conservative l'énergie potentielle correspondante E_P.

EXERCICE VI-13

Un coli assimilé à un point matériel M de masse m arrive au point A (de hauteur h = 2 m) avec une vitesse v_a= 0,5 ms^{-1}. A partir du point A, il glisse sur un plan incliné de coefficient de frottement f = 0,4 et d'angle α par rapport à l'horizontale, jusqu'au point B. Au point B, le point matériel M aura une vitesse v_B = 0,2 ms^{-1} et continue son chemin horizontal avec cette vitesse.



a) Etablir un bilan des forces appliquées au point matériel M, lorsqu'il est sur le plan incliné.

b) Etablir le principe fondamental de la dynamique.

c) En projetant ce principe sur l'axe normale au mouvement, déduire N, la composante verticale de la réaction du plan en fonction de m, g et α.

d) Exprimer le travail de toutes les forces agissant sur ce point matériel entre A et B.

e) Etablir le théorème de l'énergie cinétique entre A et B.

f) En déduire l'expression puis la valeur de l'angle α.

EXERCICE VI-14

Une balle assimilée à un point matériel M de masse m est lancée du point A avec une vitesse horizontale v_a. Elle se déplace sans frottement.

Le but est de permettre à la balle de rester en contact avec le support jusqu'au point C et qu'après sa chute (au-delàs de C), cette balle retombe exactement à son point de départ (en A). On cherche la vitesse v_a requise au départ pour effectuer ce mouvement.

On suppose AB = d = 3R.

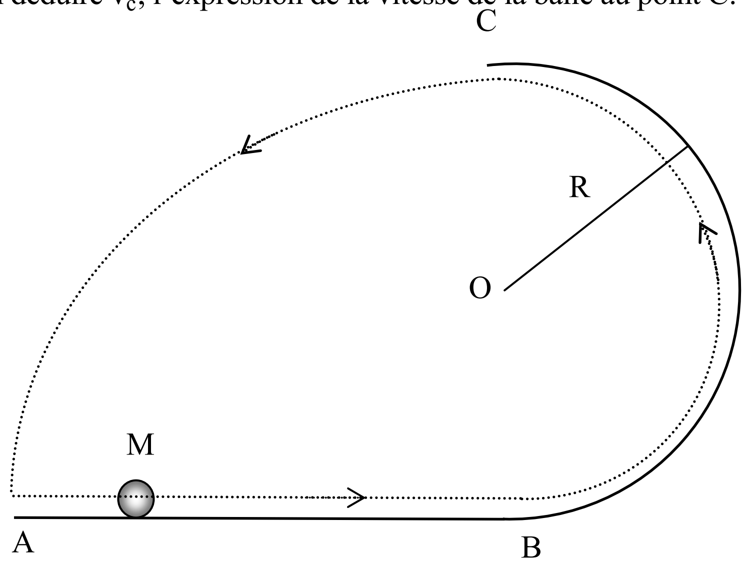
<u>Trajet</u> <u>A-C :</u>

a) Etablir un bilan des forces appliquées à la balle M.

b) Calculer le travail de chacune de ces forces.

c) Ecrire le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et C.

d) En déduire v_c, l'expression de la vitesse de la balle au point C.



Une fois le point C franchi, la balle décolle du support et retombe sur le sol horizontal.

<u>Trajet</u> <u>A-*sol :*</u>

le point matériel M est repéré par $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

e) Etablir un bilan des forces appliquées à la balle.

f) Trouver $\vec{v}(M)$, le vecteur vitesse de la balle.

g) Trouver $\vec{\gamma}(M)$, le vecteur accélération de la balle.

h) Etablir le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement de la balle).

i) En projetant cette équation suivant les deux axes, déduire $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ les équations du mouvement de la balle.

j) En injectant les conditions initiales $(t = 0, y = 2R, \dot{y} = 0)$ au point C, donner $\dot{y}(t)$ puis $y(t)$ l'expression de la position de la balle selon Oy.

k) En déduire la durée de chute jusqu'au sol.

l) En injectant les conditions initiales $(t = 0, x = d, \dot{x} = - v_c)$ au point C, donner $\dot{x}(t)$ puis $x(t)$ l'expression de la position de la balle selon Ox.

m) Déterminer la longueur l correspondant à la distance horizontale parcourue à l'instant où la balle touche le sol.

n) En déduire v_{AO}, la vitesse requise pour que la balle retombe en A.

EXERCICE VI-15

On rappelle qu'une charge Q (placée en O) exerce sur une autre charge q (placée en M) une force de type :

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{x^2} \qquad \text{où x est la distance OM.}$$

Un noyau de charge +Ze est placé à l'origine de l'axe Ox. Une particule M de masse m et de charge +2e est lancée de l'infini à une vitesse v_0 dans la direction de ce noyau.

a) Exprimer la force qui agit sur la particule pour la freiner, en fonction de x.

b) En posant qu'à l'infini E_P est nulle, trouver E_P (x(t), l'énergie potentielle dont dérive cette force.

c) Exprimer E_m, l'énergie mécanique de la particule M.

d) Ecrire le principe de conservation de l'énergie mécanique.

Lorsque la particule s'approche du noyau, sa vitesse décroit jusqu'à s'annuler et la particule rebrousse chemin puis s'éloigne indéfiniment sur l'axe Ox.

e) Calculer x_{min}, la distance minimale (la distance d'approche) de la particule par rapport au noyau.

Données : $Z = 56$; $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C ; $m = 6{,}63\ 10^{-27}$ kg

$v_0 = 1{,}92\ 10^7\ ms^{-1}$; $\varepsilon_0 = \frac{1}{36}\ \pi\ 10^{-9}$

EXERCICE VI-16

Un point matériel M de masse m est abandonné sans vitesse initiale en un point de côte $z = h$ sur un fil métallique de forme d'une hélice circulaire d'axe vertical Oz. Son mouvement, sans frottement, est donné par :

$$x = R\cos\theta\ ;\quad y = R\sin\theta \quad \text{et} \quad z = p\,\theta$$

où $p > 0$ est le pas réduit de l'hélice.

a) Calculer $\vec{v}$, le vecteur vitesse du point matériel, en fonction de R, θ, p et $\dot{\theta}$.

b) Exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\dot{z}$.

c) Exprimer E_C, l'énergie cinétique du point M en fonction de m, R, p et $\dot{z}$.

d) Exprimer E_P, son énergie potentielle, en fonction de z.

e) En déduire E_m, l'énergie mécanique du point M, en fonction de m et h.

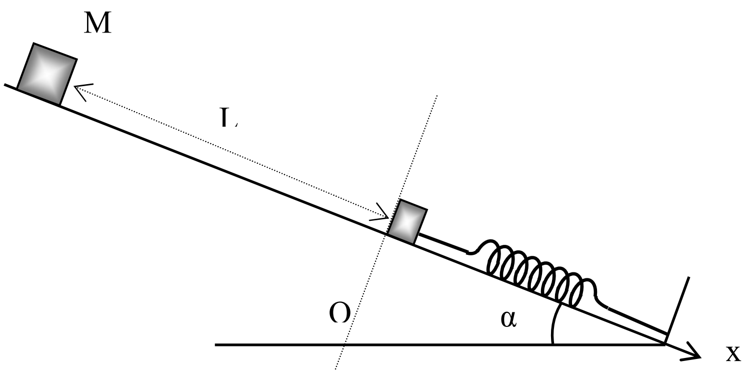
f) Etablir le principe de la conservation de l'énergie mécanique du point M.

g) Par dérivation de ce principe par rapport au temps, déduire $\ddot{z}$, l'équation du mouvement de M.

h) Déterminer z(t), la position du point matériel M en fonction du temps.

EXERCICE VI-17

Un objet assimilé à un point matériel M de masse m est abandonné sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale où les frottements sont nulles.



Après une distance L, l'objet rencontre un butoir solidaire d'un ressort idéal de masse négligeable et de raideur k.

a) Etablir un bilan des forces qui travaillent lors du mouvement de l'objet.

b) Ces forces dérivent-elles d'une énergie potentielle ?

c) En prenant l'origine des énergies potentielles au point de contact O, exprimer chacune des énergies potentielles.

d) Ecrire l'énergie mécanique à l'instant initial.

e) Ecrire l'énergie mécanique quand l'objet atteint le butoir ($x = 0$, $v = v_0$).

f) Ecrire l'énergie mécanique quand le ressort est comprimé ($x > 0$).

g) Quelle est la relation entre les énergies mécaniques trouvées à divers instants.

h) En déduire x_{max}, la compression maximale du ressort.

EXERCICE VI-18

Un point matériel M de masse m est suspendu à un ressort idéal, de masse négligeable, de raideur k, lui-même suspendu à un plafond.

On lâche le point matériel sans vitesse initiale.

a) Exprimer l'énergie cinétique du système.

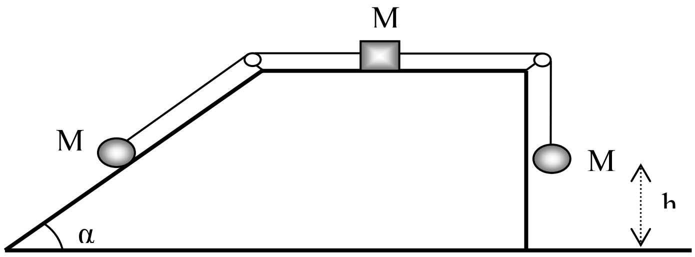
b) En prenant l'origine des énergies potentielles le point où le système est à l'équilibre, exprimer l'énergie potentielle du système.

c) En déduire l'énergie mécanique du système.

d) En tenant compte des conditions initiales, trouver les allongements maximal x_{max} et minimal x_{min} du ressort, à partir de l'expression de l'énergie mécanique.

EXERCICE VI-19

Trois points matériels M_1 (de masse m_1), M_2 (de masse m_2) et M_3 (de masse m_1) sont reliées par des fils et des poulies comme le montre le schéma.



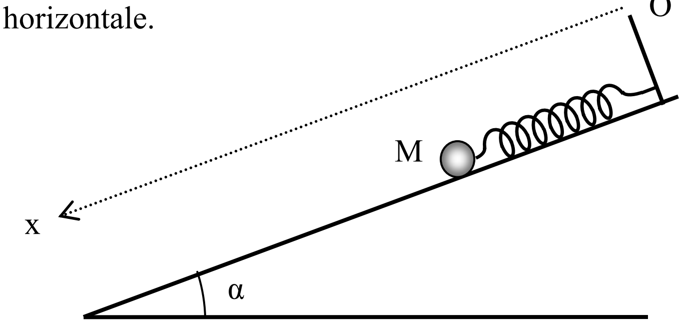
Les deux points matériels de masse m_1 sont initialement au repos à l'altitude h.

On lâche le système sans frottement. Lorsque le point matériel M_1 chute d'une hauteur x, M_3 est remonté d'une hauteur $x\sin\alpha$ et les trois points possèdent la même vitesse $\dot{x}$.

a) Exprimer l'énergie cinétique du système.
b) Exprimer l'énergie potentielle du système.
c) En déduire E_m, l'énergie mécanique du système.
d) Déduire l'équation du mouvement du système.
e) Trouver $\ddot{x}$, l'accélération du point M_1 en fonction des masses et de α.
f) Quelle est la nature du mouvement de la masse M_1.

EXERCICE VI-20

Un point matériel M de masse m = 200 g est accroché au bout d'un ressort de raideur $k = 10\ Nm^{-1}$ et de longueur à l'équilibre l_0 situé sur un plan incliné sans frottement faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale.



a) En prenant le point $x = 0$ comme origine, exprimer l'énergie potentielle du système.
b) Sachant que $l_0 = 30$ cm, tracer $E_P(x)$, la courbe de l'énergie potentielle totale en prenant x entre 10 et 70 cm.

En $x = 20$ cm, on lâche le point matériel M avec une vitesse vers le bas de 1 ms^{-1}.

c) Calculer $E_m(20)$, l'énergie mécanique totale à 20 cm.
d) A partir du graphe précédent, quelle est la nature du mouvement de M.
e) En déduire x_{min} et x_{max}, les positions minimale et maximale du mouvement de M.

EXERCICE VI-21

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur l au bout duquel est accrochée une masse ponctuelle m.

mouvement sans frottement :

a) En prenant l'origine de l'énergie potentielle de gravitation au niveau du point de fixation du pendule, calculer E_P, l'énergie potentielle du pendule en fonction de m, l et θ.

b) Calculer E_C, son énergie cinétique en fonction de m, l et $\dot{\theta}$.

c) Calculer E_m, son énergie mécanique.

d) L'énergie mécanique est-elle constante ? pourquoi ?

e) En déduire l'équation différentielle du mouvement en $\ddot{\theta}$.

mouvement avec frottement :

On suppose maintenant que le pendule est soumis à une force de frottement fluide du type : $\vec{F} = -\lambda\,\vec{v}$ où λ est une constante positive.

f) Calculer $W_{\vec{F}}$, le travail de la force de frottement, en fonction de la vitesse.
g) Trouver l'équation différentielle du mouvement.

EXERCICE VI-22

Un point matériel M de masse m est lâché sans vitesse initiale du point A d'altitude z_0. A l'instant t_1, le point M se trouve au point B d'altitude z_1.

En plus de son poids, le point matériel est soumis à la force de frottement de l'air $\vec{F} = - km\,\vec{v}$ où k est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse de M donnée par : $\vec{v} = \frac{g}{k}(1- e^{-kt})\,\vec{u}$

<u>Calcul direct de $E_C(B)$:</u>

a) Calculer E_C (B), l'énergie cinétique du point matériel en B.

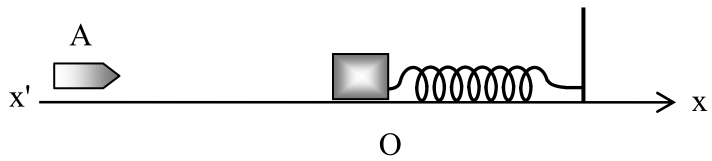
<u>Calcul indirect de $E_C(B)$:</u>

b) Calculer $W_{\vec{P}}$, le travail du poids entre A et B, en fonction du temps.
c) Calculer $W_{\vec{F}}$, le travail de la force de frottement entre A et B.
d) Calculer W_t, la somme des travaux des forces entre A et B.
e) Ecrire le théorème de l'énergie cinétique sur le trajet AB et en déduire E_C (B), l'énergie cinétique du point matériel au point B.

EXERCICE VI-23

Une balle A de masse m est tirée dans la direction d'une boite en bois de masse M posée sur un plan horizontal.

Juste avant le choc, la balle avait une vitesse $\vec{v}_a$. Le choc est supposé mou, la balle pénètre le bois et l'ensemble se déplace à la vitesse $\vec{v}_b$. Un ressort de raideur k attaché à la boite limite le déplacement de l'ensemble.



a) Etablir le principe de la conservation de la quantité de mouvement.
b) En déduire $\vec{v}_b$, la vitesse de l'ensemble après le choc en fonction de $\vec{v}_a$ et des masses.

Après le choc, le glissement de l'ensemble se fait sans frottement en comprimant le ressort d'une distance d.

c) Exprimer E_m, l'énergie mécanique de l'ensemble juste après le choc.
d) Exprimer E_m, l'énergie mécanique de l'ensemble lorsque le ressort est comprimé au maximum.
e) Etablir le principe de la conservation de l'énergie mécanique de l'ensemble.
f) En déduire d, la distance maximale de compression du ressort.

__Mouvement avec frottement :__

On suppose que le plan horizontal exerce sur l'ensemble une force de frottement proportionnelle à la masse totale et à la distance parcourue et opposée au mouvement :

$$\vec{f} = -\alpha\,(M + m)\,x\,\vec{i}.$$

g) Etablir un bilan des forces exerçant sur l'ensemble.
h) Calculer le travail de chacune de ces forces entre l'instant où la balle entre dans la boite et l'instant où le ressort est comprimé au maximum (distance d). En déduire le travail total de ces forces.
i) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant où la balle entre dans le boite et l'instant où le ressort est comprimé au maximum.
j) En déduire d, la distance maximale de compression du ressort.

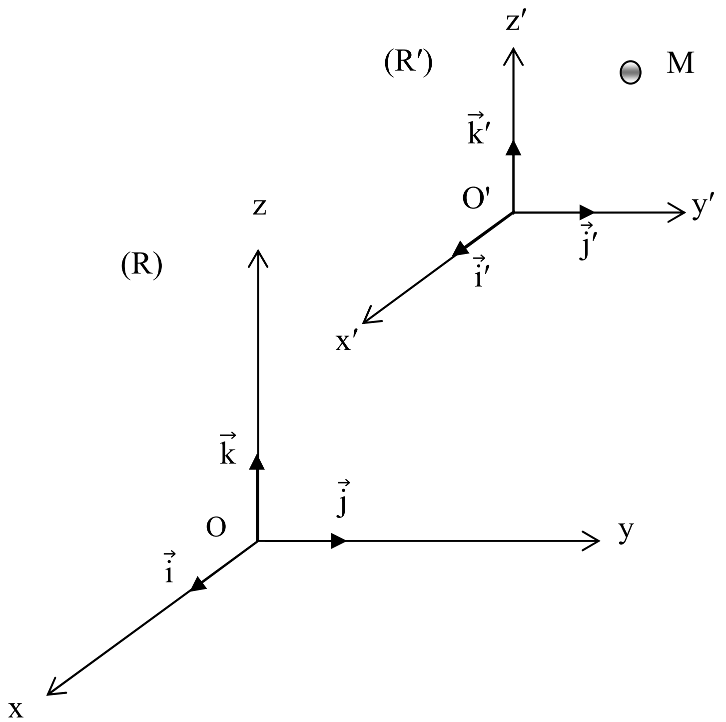
CHAPITRE VII

CHANGEMENT DE REFERENTIEL

RAPPEL DE COURS

Soient $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un référentiel absolu (fixe) et $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ un référentiel relatif (mobile) en mouvement par rapport à R. Un point matériel M en mouvement dans l'espace.

Supposant que le référentiel R est galiléen et R′ est non galiléen.



Lois de composition :

Connaissant la position d'un point matériel, sa vitesse et son accélération dans un référentiel R, ces lois permettent de déterminer ces mêmes grandeurs dans un autre référentiel R′.

Loi de composition des positions :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_{ent}$$

$\vec{V}_a$ est la vitesse absolue du point matériel M, notée aussi $\vec{V}(M)_R$

$\vec{V}_r$ est sa vitesse relative du point matériel M, notée aussi $\vec{V}(M)_{R'}$

$\vec{V}_{ent}$ est la vitesse d'entrainement ou la vitesse du référentiel R′ par rapport à R:

$$\vec{V}_{ent} = \vec{V}(O')_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

avec $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de R′ par rapport à R.

Loi de composition des accélérations :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_{ent} + \vec{\gamma}_C$$

$\vec{\gamma}_a$ est l'accélération absolue du point matériel M, notée aussi $\vec{\gamma}(M)_R$

$\vec{\gamma}_r$ est l'accélération relative du point matériel M, notée aussi $\vec{\gamma}(M)_{R'}$

$\vec{\gamma}_{ent}$ est l'accélération d'entrainement ou l'accélération du référentiel R′ par rapport à R:

$$\vec{\gamma}_{ent} = \vec{\gamma}(O')_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

$\vec{\gamma}_C$ est l'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_C = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$

Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen (dans R′):

Dans un référentiel non galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'applique en tenant compte des forces d'inertie.

$$m\vec{\gamma}_a = \vec{F} + \vec{F}_{ient} + \vec{F}_{iC}$$

$\vec{F}$ est la force appliquée au point matériel M.

$\vec{F}_{ient}$ est la force d'inertie d'entrainement : $\vec{F}_{ient} = - m\,\vec{\gamma}_{ent}$

$\vec{F}_{iC}$ est la force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{iC} = - m\,\vec{\gamma}_C$

Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen (dans R′):

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}\right)_{R'} = \vec{M}_{O'}(\vec{F}) + \vec{M}_{O'}(\vec{F}_{ient}) + \vec{M}_{O'}(\vec{F}_{iC})$$

Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen (dans R′):

$$W(\vec{F}) + W(\vec{F}_{ient}) = \Delta\, E_C$$

EXERCICE VII-1

La trajectoire d'un point matériel en mouvement dépend-elle du référentiel d'étude ?

EXERCICE VII-2

Soit un référentiel R' en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen R.

a) R' est-il galiléen ?
b) Y-t-il des forces d'inertie (force d'entrainement et de Coriolis) ?

EXERCICE VII-3

Soit un référentiel R' en rotation par rapport à un référentiel galiléen R.

a) Donner l'expression de $\vec{F}_{iC}$, la force d'inertie de Coriolis.
b) Dans quelles conditions la force d'inertie de Coriolis s'annule ?

EXERCICE VII-4

Un point M (ou une mouche) se déplace avec une vitesse constante sur une aiguille d'une montre. Comme l'indique la figure, $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le repère fixe lié à la montre. $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est le repère mobile lié à l'aiguille. R' tourne avec une vitesse constante $\frac{d\theta}{dt}$ (ou $\dot{\theta}$).

A l'instant t, $\|OM\| = r(t)$.

a) Ecrire les vecteurs unitaires du repère R' : $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ en fonction des vecteurs unitaires du repère R : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
b) Ecrire $\overrightarrow{OM}$ dans le repère R'.
c) Ecrire $\overrightarrow{OM}$ dans le repère R.
d) Ecrire la vitesse relative de M (la vitesse dans le repère R').

e) Ecrire la vitesse absolue de M (la vitesse dans le repère R).
f) Ecrire la vitesse d'entrainement.
g) Ecrire l'accélération relative de M (l'accélération dans le repère R').
h) Ecrire l'accélération absolue de M (l'accélération dans le repère R).

EXERCICE VII-5

On repère la position d'un point matériel M dans un référentiel fixe par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (6t^2 + 3)\,\vec{i} - 3t^3\,\vec{j} + 3\vec{k}$$

La position du même point M dans un repère mobile est :

$$\overrightarrow{O'M} = \vec{r}' = (6t^2 + 3t)\,\vec{i}' - 3t^3\,\vec{j}' + 3\vec{k}'$$

a) Déterminer la vitesse absolue du point matériel M.
b) Déterminer la vitesse relative du même point M.
c) Déterminer la vitesse d'entraînement du référentiel relatif mobile par rapport au référentiel fixe, sachant que $\vec{i} \,/\!/\, \vec{i}'$, $\vec{j} \,/\!/\, \vec{j}'$ et $\vec{k} \,/\!/\, \vec{k}'$.
d) Montrer que l'accélération du point M est la même dans les deux référentiels.
e) Qu'appelle-t-on ces deux référentiels ?

EXERCICE VII-6

Soient $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère absolu (fixe) et $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ un repère relatif (mobile) en mouvement de translation uniforme par rapport à R.

On veut étudier le mouvement d'un point matériel M dans l'espace, dans les deux repères : R et R′.

Les coordonnées du point M dans le repère R sont x, y, z et dans le repère R′ sont x′, y′, z′.

a) Quelle est la relation entre les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{O'M}$

b) Que représentent les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{O'M}$

c) Ecrire le vecteur position relative $\overrightarrow{O'M}$ en fonction des vecteurs de base $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$.

d) Ecrire le vecteur vitesse relative du point M en fonction des vecteurs de base $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$.

e) Ecrire le vecteur accélération relative du point M en fonction des vecteurs de base $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$.

f) Ecrire le vecteur position absolue $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées x', y', z', des vecteurs de base $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ et de $\overrightarrow{OO'}$.

g) Déduire le vecteur vitesse absolue du point M en fonction des vecteurs de base $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$.

h) Déduire le vecteur accélération absolue du point M en fonction des vecteurs de base $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$.

EXERCICE VII-7

Un repère $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est en translation rectiligne accélérée par rapport à $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le vecteur position de O′ est $\overrightarrow{OO'} = \alpha t^2 \vec{k}$ ou α est une constante positive. La vitesse relative d'un point matériel M est donnée par $\vec{V}_{R'}(M) = at\,\vec{i}$ avec a une constante.

a) Déterminer $\vec{V}_{ent}(M)$, le vecteur vitesse d'entrainement.
b) Déterminer $\vec{V}_{R}(M)$, le vecteur vitesse absolue de M.
c) En déduire la norme de la vitesse absolue de M.
d) Déterminer $\vec{\gamma}_{R'}(M)$, le vecteur accélération relative de M.
e) Déterminer $\vec{\gamma}_{ent}(M)$, le vecteur accélération d'entrainement.
f) Déterminer $\vec{\gamma}_{C}(M)$, le vecteur accélération de Coriolis.
g) Déduire $\vec{\gamma}_{R}(M)$, le vecteur accélération absolue de M.
h) En déduire la norme de l'accélération absolue.

EXERCICE VII-8

Un cercle de centre C et de rayon R se translate le long d'un axe Oz à la vitesse $\vec{V}_1 = \alpha t\,\vec{k}$ où α est une constante.

Le plan du cercle reste parallèle au plan Oxy. Un point matériel M se déplace dans le sens trigonométrique sur ce cercle à la vitesse constante $\vec{V}_0$ par rapport au cercle.

On notera la base vectorielle liée au point matériel $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ où $\vec{u}_r$ est suivant $\overrightarrow{CM}$.

Loi de composition des vitesses :

a) Calculer $\vec{V}_{ent}(M)$, le vecteur vitesse d'entrainement.
b) Calculer $\vec{V}_{R'}(M)$, le vecteur vitesse relative du point matériel M.
c) En déduire $\vec{V}_R(M)$, le vecteur vitesse absolue du point matériel M.
d) En déduire $\|\vec{V}_R(M)\|$, la norme de la vitesse absolue du point M.

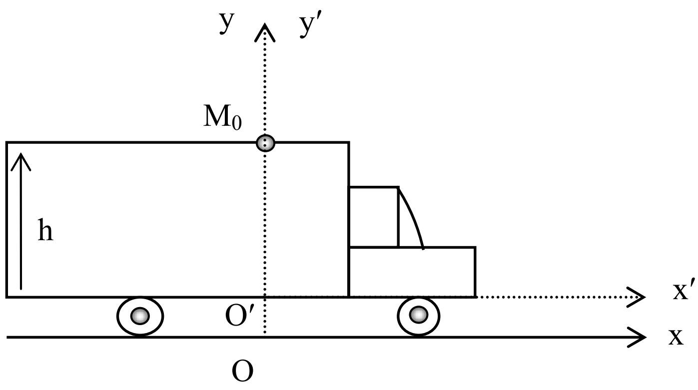
Loi de composition des accélérations :

e) Calculer $\vec{\gamma}_{ent}(M)$, le vecteur accélération d'entrainement.
f) Calculer $\vec{\gamma}_{R'}(M)$, le vecteur accélération relative du point matériel M.
g) Calculer $\vec{\gamma}_C(M)$, le vecteur accélération de Coriolis.
h) En déduire $\vec{\gamma}_R(M)$, le vecteur accélération absolue du point matériel M.
i) En déduire $\|\vec{\gamma}_R(M)\|$, la norme de l'accélération absolue du point M.

EXERCICE VII-9

Un camion se déplace en mouvement rectiligne horizontal à une vitesse $V_C = 36\ \text{kmh}^{-1}$. A l'intérieur du camion, une bille assimilée à un point matériel de masse $m = 10$ g est lâchée sans vitesse initiale du point M_0 d'une hauteur $h = 2\ m$ au-dessus du plancher du camion.

Soient $R(Ox, Oy, Oz)$ un référentiel galiléen lié au sol et $R'(O'x', O'y', O'z')$ un référentiel lié au camion.



<u>I) Le camion est animé d'un mouvement rectiligne uniforme</u>

<u>Etude du mouvement de la bille dans le référentiel</u> R'

a) Le référentiel R' est-il galiléen ?
b) Etablir un bilan des forces agissant sur la bille.
c) Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans R'.
d) En déduire γ_1, l'accélération de M dans R'.
e) En tenant compte des conditions initiales, écrire $V_{R'}(t)$, la vitesse de la bille dans le référentiel R'.
f) En déduire $\overrightarrow{O'M}$, le vecteur position de M dans le référentiel R'.
g) En déduire la trajectoire de M dans R' ainsi que la nature de son mouvement.
h) Calculer t_1, l'instant où la bille heurte le plancher du camion au point O'.
i) En déduire $\overrightarrow{V}_{R'}(M)_{O'}$ la vitesse de la bille en O', dans le référentiel R'. On la note aussi $\overrightarrow{V}_r(O')$, la vitesse relative de M en O'.

Etude du mouvement de la bille dans le référentiel R

j) Etablir la loi de composition des vitesses pour trouver $V_R(M)$, la vitesse de la bille dans le référentiel R.

k) Déduire $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position de M dans le référentiel R.

l) Déduire x(t) et y(t), les deux composantes de $\overrightarrow{OM}$.

m) En déduire y(x), la trajectoire de la bille dans le référentiel R.

n) En déduire $V_R(M)_{O'}$, la vitesse de la bille au point O′, dans le référentiel R. On la note aussi $\vec{V}_a(O')$, la vitesse absolue de M au point O′.

II) Le camion est animé d'un mouvement non uniforme

On suppose maintenant que le camion est animé d'un mouvement de translation uniformément accéléré, d'accélération $\vec{\gamma}_e = \gamma_e \vec{i}$ avec $\gamma_e = 3 \ \text{ms}^{-2}$. Il démarre à t = 0 avec une vitesse nulle.

Reprendre toutes les questions précédentes de a) jusqu'à n).

EXERCICE VII-10

Un ascenseur est animé d'un mouvement de translation uniformément accéléré : $\vec{\gamma} = \gamma_z \vec{k}$

Un pendule simple de longueur l et de masse m est accroché au point A, au plafond de l'ascenseur et oscille dans un plan. L'étude se fait dans le référentiel de l'ascenseur.

I) Méthode du théorème du moment cinétique :

a) Le référentiel R′, lié à l'ascenseur, est-il galiléen ?

b) Dans le cas où R′ n'est pas galiléen, écrire $\vec{F}_{ient}$, la force d'inertie d'entrainement.

c) Exprimer $\vec{F}_{iC}$, la force d'inertie de Coriolis.

d) Effectuer un bilan des forces agissant sur le point matériel M.

e) Exprimer $\vec{L}_A(M)_{R'}$, le moment cinétique en A du point M en mouvement dans R′.

f) En déduire $\frac{d\vec{L}_A(M)_{R'}}{dt}$.

g) Exprimer le moment en A de chaque force agissant sur le point matériel.
h) Ecrire le théorème du moment cinétique en A.
i) En déduire, de la projection de ce théorème suivant un axe, l'équation différentielle vérifiée par θ.

II) Méthode du principe fondamental de la dynamique :

j) Retrouver cette équation différentielle en appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel dans le référentiel de l'ascenseur.

EXERCICE VII-11

Une tige rectiligne horizontale OX tourne autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω constante, en restant dans le plan Oxy. Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur cette tige. La rotation de la tige est repérée par l'angle $\theta(t)$ et la position de M sur la tige par $\|\overrightarrow{OM}\| = r(t)$.

$$\text{A } t = 0, \ \theta = 0 \text{ et } r = 0.$$

Le référentiel terrestre $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est supposé galiléen. Le mouvement de M est étudié dans le référentiel $R'(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ lié à la tige. R′ est en rotation par rapport à R.

Etude cinématique :

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position de M dans le repère R′.
b) En déduire $\vec{V}_{R'}(M)$, la vitesse relative du point M.
c) Exprimer $\vec{V}_{ent}(M)$, la vitesse d'entrainement du point M.
d) En appliquant la loi de la composition des vitesses, déduire $\vec{V}_R(M)$, la vitesse de M dans R.
e) Exprimer $\vec{\gamma}_{R'}(M)$, l'accélération relative du point M.
f) Exprimer $\vec{\gamma}_{ent}(M)$, l'accélération d'entrainement du point M.

g) Exprimer $\vec{\gamma}_C(M)$, l'accélération de Coriolis du point M.
h) En appliquant la loi de la composition des accélérations, déduire $\vec{\gamma}_R(M)$, l'accélération de M dans le référentiel R.

Etude dynamique :

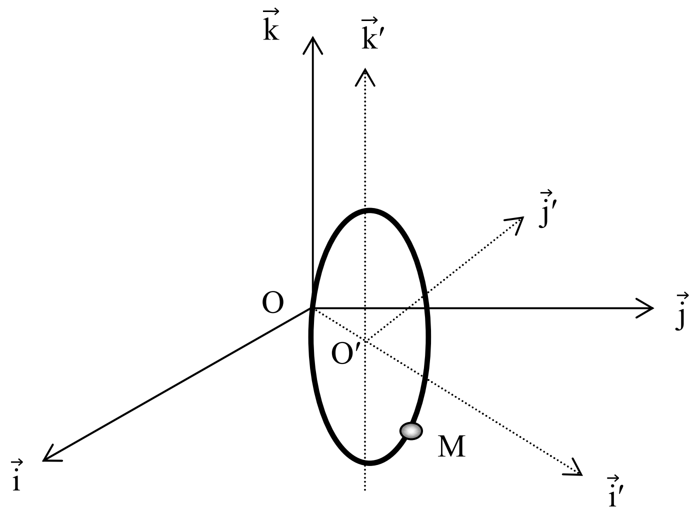
i) Etablir un bilan des forces agissant sur le point matériel M.
j) Représenter toutes ces forces sur un schéma.
k) Etablir le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R′.
l) En projetant le principe fondamental de la dynamique, déduire les trois équations régissant le mouvement de M.
m) Sachant que la résolution de l'équation différentielle donne la solution générale : $r(t) = A\text{ch}(\omega t) + B\text{sh}(\omega t)$ et en injectant les conditions initiales, trouver l'équation de la trajectoire de M dans le référentiel R.

EXERCICE VII-12

Une circonférence (C) de centre O′ et de rayon b, située dans le plan vertical, tourne autour de l'axe Oz d'un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\omega}$.

Un point matériel M de masse m est mobile sans frottement sur cette circonférence. Le référentiel $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est lié à la terre et le référentiel $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ lié à la circonférence est non galiléen.

a) Ecrire $\vec{\gamma}_{ent}(M)$, l'expression générale de l'accélération d'entrainement.
b) Ecrire $\vec{\gamma}_C(M)$, l'expression générale de l'accélération de Coriolis.
c) Calculer la force d'inertie d'entrainement.
d) Calculer la force d'inertie de Coriolis.



$\vec{j}$

EXERCICE VII-13

Un ressort (k, l_0) est attaché horizontalement à un point O fixe. Un point M de masse m est attaché à l'extrémité libre du ressort. Le système (ressort + point) est en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Oz vertical.

a) Calculer $\vec{\gamma}_{ent}(M)$, le vecteur accélération d'entrainement.
b) En déduire $\vec{F}_{ient}$, la force d'inertie d'entrainement.
c) Calculer $\vec{\gamma}_C(M)$, le vecteur accélération de Coriolis.
d) En déduire $\vec{F}_{iC}$, la force d'inertie de Coriolis.
e) Etablir un bilan des forces s'exerçant sur le point matériel M selon l'axe Ox.
f) Etablir le principe fondamental de la dynamique selon l'axe Ox.
g) En déduire x_e, la position d'équilibre de la masse M.
h) Etablir l'équation du mouvement pour la masse dans le référentiel R′.

EXERCICE VII-14

Un pendule simple de masse m et de longueur l est suspendu au toit d'un wagon de train qui se déplace en ligne droite.

On considère le repère $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ lié au wagon.

Etude dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *fixe lié au sol :*

a) Ecrire $\overrightarrow{OO'}$, le vecteur position du point O′.
b) Ecrire $\overrightarrow{O'M}$, le vecteur position du point M dans R′.
c) En déduire $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point M dans R.
d) Calculer $\vec{V}_{R'}(M)$, le vecteur vitesse relative du point M.
e) Calculer $\vec{V}_R(M)$, le vecteur vitesse absolue du point M.
f) En déduire $\vec{\gamma}_R(M)$, le vecteur accélération absolue du point M.
g) Etablir le bilan des forces agissant sur le point M.
h) Etablir le principe fondamental de la dynamique.
i) Projeter ce principe sur les deux axes pour en déduire les deux équations scalaires du mouvement de M.

Etude dans le repère $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ *lié au wagon :*

j) Etablir le bilan des forces agissant sur le point M.
k) Etablir le principe fondamental de la dynamique.
l) Projeter ce principe sur les deux axes pour en déduire les deux équations scalaires du mouvement de M.

Etude de l'équilibre relatif :

m) Réécrire l'équation du du mouvement du pendule dans le cas de l'équilibre relatif (θ = cte).
n) En déduire l'expression de θ.
o) Examiner l'équilibre relatif dans les 3 cas suivants :

Accélération constante ; Décélération constante ; Vitesse constante.

EXERCICE VII-15

Un anneau circulaire de centre O et de rayon r est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$ autour de son diamètre vertical. Un point matériel M de masse m coulisse sans frottement sur la circonférence. Le mouvement du point matériel est repéré par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est lié à l'anneau est en rotation d'angle φ autour de $\vec{k}$. Le repère $R'(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est lié au point matériel M et l'accompagne dans son mouvement.

Méthode du principe fondamental de la dynamique :

a) Ecrire $\vec{F}_{ient}$, la force d'inertie d'entrainement.
b) Exprimer $\vec{F}_{iC}$, la force d'inertie de Coriolis.
c) Etablir un bilan des forces agissant sur la bille.
d) Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans R.
e) En déduire, de la projection de ce principe suivant un axe, l'équation différentielle vérifiée par θ.

Méthode du théorème du moment cinétique :

f) Exprimer $\vec{L}_O(M)_R$, le moment cinétique en O du point matériel M en mouvement dans R.
g) Exprimer le moment en O de chaque force agissant sur le point matériel.
h) Ecrire le théorème du moment cinétique en O.
i) En déduire, de la projection de ce théorème suivant un axe, l'équation différentielle vérifiée par θ. (Vérifier avec la question e).

EXERCICE VII-16

Un plateau horizontal de centre O tourne autour de son axe Oz à la vitesse angulaire ω constante. Soient deux repères, $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixe lié au sol et $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ lié au plateau. A l'instant initial les deux repères coïncident.

Un point matériel M est lancé dans ce plateau suivant l'axe Oy′ à la vitesse constante v_0. La trajectoire du point matériel est contenue dans le plan horizontal $z = 0$.

Etude du mouvement de M par rapport au repère lié au plateau :

f) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position relative du point M dans le repère $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ en fonction du temps.

g) Quelle est la nature du mouvement du point M dans le repère R′ lié au plateau.

h) Déduire $\vec{V}_{R'}(M)$, le vecteur vitesse relative de M dans le repère $R'(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

i) Déduire $\vec{\gamma}_{R'}(M)$, le vecteur accélération relative de M dans le repère $R'(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

Etude du mouvement de M par rapport au repère lié au sol :

j) Exprimer $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position absolue du point M en fonction des vecteurs unitaires du repère $R'(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ en fonction du temps.

k) Déduire $\vec{V}_R(M)$, le vecteur vitesse absolue de M.

l) Déduire $\vec{\gamma}_R(M)$, le vecteur accélération absolue de M.

Lois de compositions des vitesses et des accélérations :

Retrouvez les résultats des questions f) et g) à partir des lois de composition des vitesses et des accélérations.

APPENDICES

Opérateur $\overrightarrow{\mathbf{grad}}$

l'opérateur $\overrightarrow{\mathbf{grad}}$ (noté aussi $\vec{\nabla}$) associe à la fonction scalaire f un vecteur.

- en coordonnées cartésiennes : f(x, y, z)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

- en coordonnées polaires: f(r,θ)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$$

- en coordonnées cylindriques: f(r, θ, z)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

- en coordonnées sphériques: f(r, θ, φ)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU PREMIER ORDRE

C'est une équation de la forme : $a\dot{y} + by = f(x)$ (1)

avec a et b deux constantes réelles.

La solution de cette équation différentielle est la somme de deux solutions :

$$y(x) = y_{gssm}(x) + y_{part}(x)$$

$\mathbf{y_{gssm}(x)}$ est la solution générale de l'équation (1) sans second membre, c'est-à-dire la solution de l'équation $a\dot{y} + by = 0$ (2)

Cette solution a la forme : $y_{gssm}(x) = A\,e^{-\frac{b}{a}x}$

$\mathbf{y_{part}(x)}$ est une solution particulière de l'équation (1). Sa forme dépend de la forme de f(x) :

- Si f(x) = C (cte) ; la solution particulière est $y_{part}(x) = \frac{C}{b}$
- Si f(x) est une fonction sinusoïdale de pulsation ω_1 , la solution particulière est : $y_{part}(x) = A\cos(\omega_1 t + B)$
- Si f(x) est une fonction exponentielle, $y_{part}(x)$ est aussi une fonction exponentielle.

Dans chaque cas, les coefficients A, B et C sont déterminés en injectant les conditions initiales (à t = 0) dans la solution générale **y(x)** de l'équation différentielle.

RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU SECOND ORDRE

C'est une équation de la forme : $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(x)$ (3)

avec a, b et c des constantes réelles.

La solution de cette équation différentielle est la somme de deux solutions :

$$\mathbf{y(x) = y_{gssm}(x) + y_{part}(x)}$$

$\mathbf{y_{gssm}(x)}$: est la solution générale de l'équation (1) sans second membre, c'est-à-dire la solution de l'équation $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ (4)

Pour chercher $\mathbf{y_{gssm}(x)}$, on associe à l'équation (4) une équation caractéristique de la forme : $a\ddot{r} + b\dot{r} + cr = f(x)$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

<u>si $\Delta > 0$</u>, $\mathbf{y_{gssm}(x)} = A\, e^{r_1 x} + B\, e^{r_2 x}$

où r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique.

<u>si $\Delta = 0$</u>, $\mathbf{y_{gssm}(x)} = (Ax + B)\, e^{r_1 x}$

<u>si $\Delta < 0$</u>, $\mathbf{y_{gssm}(x)} = Ae^{\alpha x} \cos\,(\beta x + \varphi)$

avec $r_1 = \alpha + j\beta$ et $r_2 = \alpha - j\beta$

$\mathbf{y_{part}(x)}$: est une solution particulière de l'équation (3). Sa forme dépend de le forme de f(x)

- Si f(x) = C (cte) ; la solution particulière est aussi une constate.
- Si f(x) est une fonction sinusoïdale de pulsation ω_1, la solution particulière est : $y_{part}(x) = A\cos(\omega_1 t + B)$

- Si f(x) est une fonction exponentielle, la solution particulière est aussi une fonction exponentielle.

Dans chaque cas, tous les coefficients sont déterminés en injectant les conditions initiales (à $t = 0$) dans la solution générale **y(x)** de l'équation différentielle.

Table des matières