République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des sciences et de la technologie d'Oran Mohammed Boudiaf

USTO-MB

MECANIQUE DU POINT MATERIEL.
COURS et EXERCICES

Dr ZIANI NOSSAIR

Pr BOUTAOUS AHMED

Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algerie

2015/2016

Introduction

Ce polycopie regroupe une série de cours sur la mécanique du point matériel, il est destiné aux étudiants de la première année sciences et technologie ST du système LMD, il peut servir comme support à un cours dispensé aux étudiants. C'est les cours qu'on assurait pendant une dizaine d'années à l'université des sciences et technologie d'Oran USTO.

Ce présent travail est structuré en deux grandes parties. La première partie sera consacrée à la cinématique, précédée par la définition des outils mathématiques qui permettent de comprendre cette partie ainsi que le reste. La deuxième partie fera l'objet de l'étude de la dynamique suivi d'un chapitre sur travail et énergie, qui consiste à faire la lumière sur les relations entre les mouvements et leurs causes.

A la fin de chaque chapitre, on propose des exercices avec leurs solutions. Ces exercices ont été proposés aux examens et aux travaux dirigés.

Par ce présent travail, on vise à donner aux étudiants un support, afin qu'ils puissent comprendre la mécanique du point. Cette contribution peut paraitre maigre, mais on compte sur les lecteurs afin qu'ils nous aident à l'améliorer, avec leurs critiques, s'il y en a.

On souhaite à tous nos étudiants un très bon cursus universitaire et un parcourt plein de réussite.

Au nom des auteurs

Docteur Nossair ZIANI

Ziani_nossair@yahoo.fr

Sommaire

Outils mathématiques

Calcul vectoriel

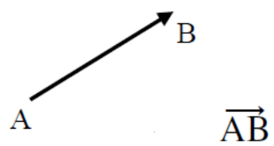
I- Notion de vecteur

1- Définition

Un scalaire est un nombre positif, négatif ou nul, utilisé pour représenter des quantités diverses : temps, température, masse, énergie, etc…

Un vecteur est caractérisé par quatre caractéristiques à savoir

L'origine A, le support la droite (AB), le sens de A vers B et le module. On le représente par un segment orienté. Il est défini par une direction, un sens sur cette direction et une longueur. Cette longueur n'est autre que la norme du vecteur.



Deux vecteurs liés d'origine différentes, sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, même sens et même module : ils représentent le même vecteurs glissant. Deux vecteurs liés, d'origines quelconques, sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, même grandeur et des sens opposés : ils sont dits directement opposés lorsqu'ils sont portés par la même droite.

2- Vecteur unitaire

Chaque vecteur peut être exprimé en fonction d'un vecteur unitaire qui se différencier du vecteur porteur par son module qui est l'unité

$$\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \overrightarrow{U}$$

$$\left|\vec{U}\right| = 1$$

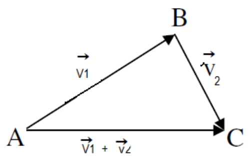
Avec $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$

II -Opérations sur les vecteurs

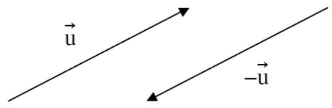
1- Addition de deux vecteurs

Des vecteurs peuvent être additionnés pour former un autre vecteur appelé vecteur somme ou résultante.

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$

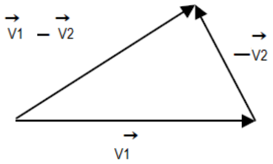


2- Soustraction de deux vecteurs



On ne sait pas faire la soustraction mais plutôt l'addition pour cela on fait la somme d'un vecteur avec l'inverse du vecteur qu'on veut soustraire de ce dernier.

$$\vec{V} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + (-\vec{V_2})$$



III -Représentation d’un point

Pour pouvoir déterminer les coordonnées de n'importe quel vecteur, il faut choisir au préalable un repère qui est un couple de vecteurs non colinéaires appelé base. On peut alors décomposer tous les autres vecteurs du plan en fonction de ces deux vecteurs et cette décomposition est unique. Comme on a défini qu’un vecteur est formé par deux points, cela veut dire que sa représentation nécessite de repérer ces points.

Pour repérer une position il faut choisir un repère. Les repères sont des trièdres orientés.

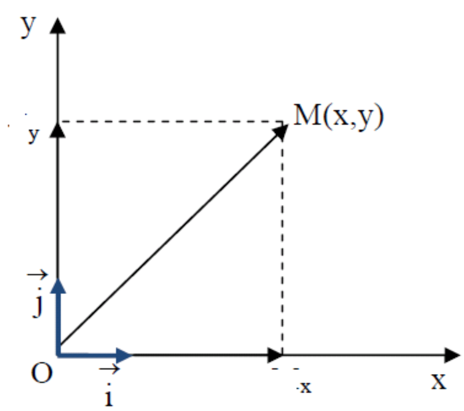
Système de coordonnées cartésiennes

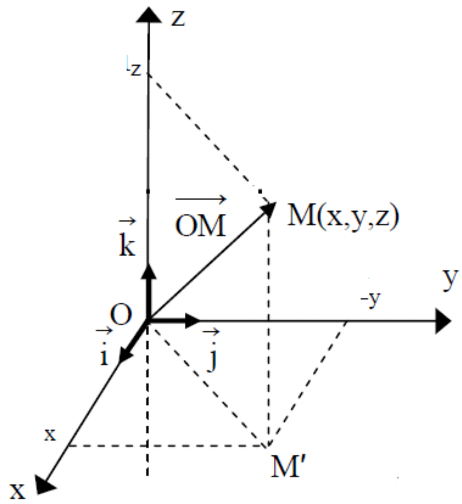
Chaque position est repérée par ses coordonnées. S’il s’agit d’un repère linéaire par une seule coordonnée (x), d’un repère plan par deux coordonnées (x,y) et dans l’espace par trois coordonnées (x,y,z). ces coordonnées sont les projection de la position sur chaque axe doté d’un vecteur unitaire.

La position peut être exprimée par un vecteur position qui lie l’origine du repère choisi à la position.

Le repère est orthonormé, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires sont normés à l’unité et orthogonaux entre eux.

Cas à deux dimensions



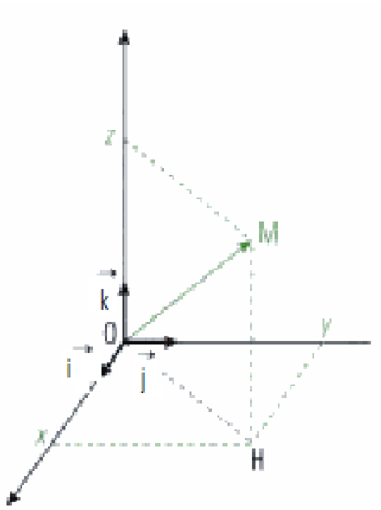


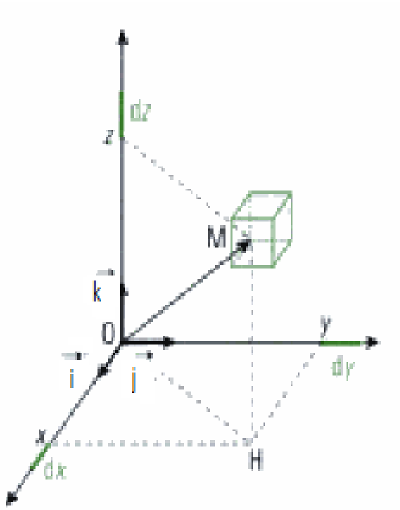
Dans ce repère orthonormé direct un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y) . le vecteur position M s'écris alors

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OY} = \left|\overrightarrow{OY}\right|.j = y\vec{j}$$

Dans l'espace le repère est :





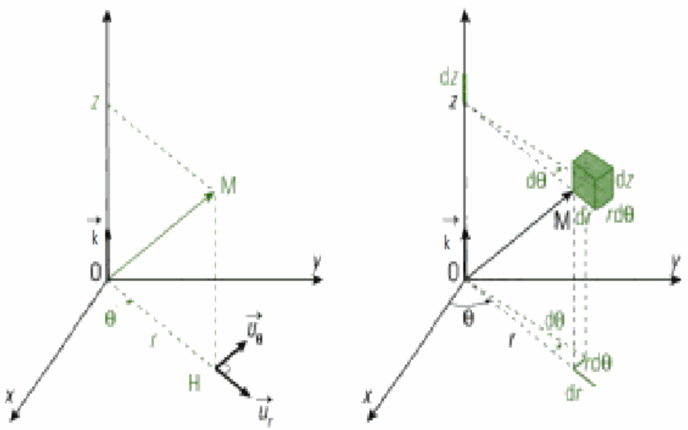
Le vecteur position s'écrit alors

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Lorsque les coordonnées x, y ou z de M subissent une variation élémentaire dx, dy ou dz, le point M se déplace respectivement de dx suivant (ox) , dy suivant (oy) ou dz suivant (oz). Ainsi, le volume élémentaire dV est petit parallélépipède rectangle d'arêtes dx, dy et dz

$$dV = dx\,.\,dy\,.dz$$

Coordonnées cylindrique



si le mouvement du point M est circulaire dans le plan (XOY) et translate suivant l'axe (OZ) on repère la position M par les coordonnées cylindriques (r,θ, z).

- r : représente la distance du point M à l'axe Oz ;
- θ : Définit la position du point M autour de Oz (θ angle compris entre 0 et 2π) ;
- z : représente la cote du point M.

On définit la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ en posant :

$$\vec{u_r} = \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$$

(H projection orthogonale du point M sur le plan (xOy). Le vecteur position du point M s'écrit alors :

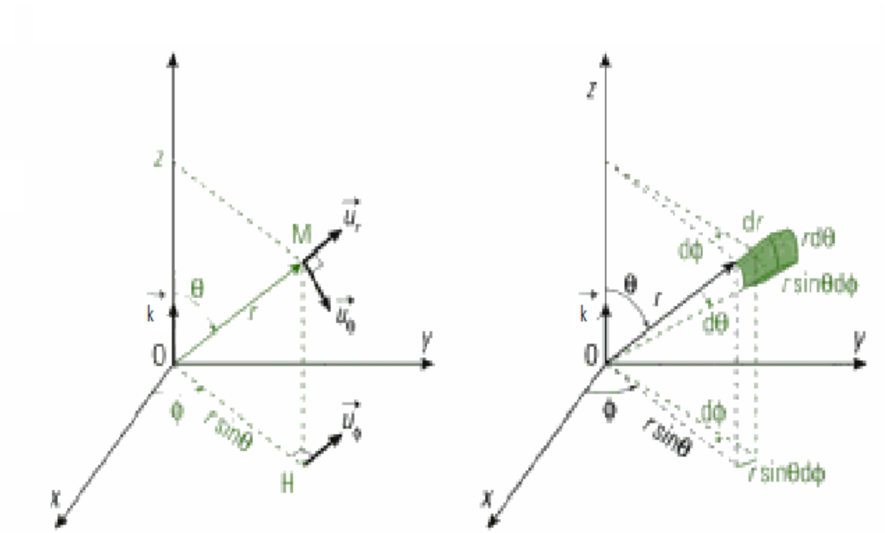
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{k}$$

Lorsque les coordonnées r, θ ou z de M subissent une variation élémentaire dr, d θ ou dz. Le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes dr, dθ et dz

dV= dr . d θ . dz

Coordonnées sphériques

Si le mouvement de M est circulaire suivant tout les axes on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ)



- r : représente la distance du point M à l'origine O ;
- θ et φ : définissent la direction dans laquelle, depuis le point O, on voit le point M (θ angle compris entre O et π, φ angle compris entre 0 et 2π).

On définit la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ en posant :

$$\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

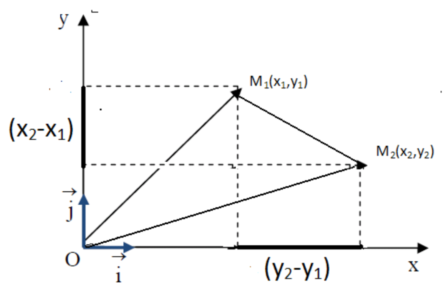
Le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

$$\mathbf{dV=dr\ .\ r\ d\theta\ .\ r\ sin\theta\ d\varphi}$$

Expression d'un vecteur dans une base cartésienne à deux dimensions

Soient deux positions $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$, le vecteur formé par les deux points s'exprime par l'expression suivante



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

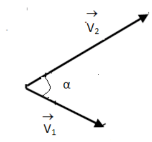
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

Son module est :

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

IV- Produit scalaire entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$,leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire



$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \left|\vec{V_1}\right|.\left|\vec{V_2}\right|.\cos\alpha$$

Tel que α est l'angle entre les deux vecteurs

Ce produit admet quelque propriétés tel que

$\vec{i}.\vec{i} = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = 0$

Calcul du module d'un vecteur

Soient Les coordonnées du vecteur $\vec{V_1}$ (x_1,y_1,z_1) et celle du vecteur $\vec{V_2}$ (x_2,y_2,z_2)

Leur produit scalaire donne

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \left(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right)$$

Si on remplace $\vec{V_2}$ par $\vec{V_1}$

On aura

$$\vec{V_1}.\vec{V_1} = \left|\vec{V_1}\right|^2 = \left(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2\right)$$

D’où

$$\left|\overrightarrow{V_1}\right| = \sqrt{\left(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2\right)}$$

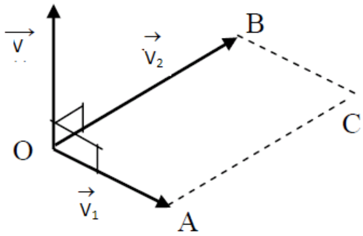
C’est la formule pour calculer le module d’un vecteur

V -Produit vectoriel

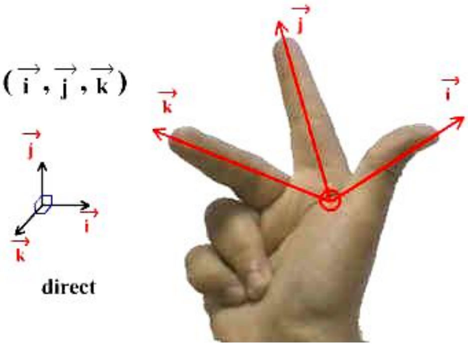
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$, leur produit vectoriel est un vecteur orienté

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V}$$

- la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$



- le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite



- sa norme vaut

$$\left|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right| = \left|\overrightarrow{V_1}\right| . \left|\overrightarrow{V_2}\right| . \sin\alpha$$

Tel que α est l'angle entre les deux vecteurs

Propriétés

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$

Le produit vectoriel peut être calculé par la méthode directe en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct :

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V}_2 = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \wedge \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

il peut être aussi déterminer par la méthode du déterminant

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

VI- Fonction à plusieurs variables

En Physique, nous avons souvent à étudier les fonctions de plusieurs variables indépendantes. Nous nous limiterons à trois notées x , y *et* z mais les résultats sont facilement généralisables. Soit une fonction $f\,(x, y,z)$, nous appellerons différentielle de f (notation df) la

Il existe des fonctions algébriques et des fonctions vectorielles à plusieurs variables

- Fonction algébrique à une seule variable, c'est une fonction qui ne dépend que d'une seule variable

$$y = f(x)$$

- Fonction à plusieurs variables qui dépendent de deux ou plusieurs variables

$$g = f(x, y) \quad \text{deux variables}$$

$$g = f(x, y, z) \quad \text{trois variables}$$

Sa différentielle totale s'écrit

$$dg = df(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz$$

Exemple

Soit la fonction suivante

$$f(x,y,z)=x^2-yz$$

sa différentielle totale est :

$$df=2xdx-zdy-ydz.$$

On vient de définir des fonctions algébriques à plusieurs variables. Il existe aussi des fonctions vectorielles à plusieurs variables :

$$\vec{V} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

Opérateurs

C'est des grandeurs mathématiques qui agissent sur ces fonctions.

L opérateur nabla qui est un vecteur qui agit sur les fonctions

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Lorsqu'il agit sur les fonctions algébriques, les transforme en fonctions vectorielles

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \overrightarrow{grad} f(x,y,z)$$

Et transforme les fonctions vectorielles en fonctions algébriques

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}).((f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}))$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z} = div\vec{V}$$

Exercices

Exercice 1 Dans un repère orthonormé R(o,x,y,z), soient les trois points suivants : A(-1,-2,1) B(-3,1,4) C(-1,2,-3) .

1- donner l'expression des vecteur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

2- Déterminer les expressions de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$, $|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}|$ et $\overrightarrow{OC}.(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$.

3- Déterminer l'angle entre les vecteur ($\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$) et $\overrightarrow{OC}$.

Solution

$\overrightarrow{OA} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ $\qquad \overrightarrow{OB} = -3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ $\qquad \overrightarrow{OC} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -9\vec{i} + 1\vec{j} - 7\vec{k}$ $\qquad \left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{131}$ $\qquad \overrightarrow{OC}\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right) = 32$

Exercice 2

On donne les vecteurs suivants :

$$\vec{r_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \ , \ \vec{r_2} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \ , \ \vec{r_3} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

1- Calculer leurs modules.

2- Calculer les composantes et les modules des vecteurs :

$$\vec{A}=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3 \qquad \vec{B}=\vec{r}_1+\vec{r}_2-\vec{r}_3$$

3- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{C}=\vec{r}_1+2\vec{r}_2$

4- Calculer les produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$

3- Calculer les produits $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ et $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$

Solution

1- $\left|\vec{r}_1\right|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$ $\left|\vec{r}_2\right|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$ $\left|\vec{r}_3\right|=\sqrt{16+9+9}=\sqrt{34}$

2- $\vec{A}=9\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\left|\vec{A}\right|=\sqrt{81+4+16}=\sqrt{101}$ $\vec{B}=\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

$\left|\vec{B}\right|=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{21}$

3- $\vec{c}=8\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{74}$ $\vec{U}=\dfrac{8\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{74}}$

4- $\vec{r}_1.\vec{r}_2=6-6-2=-2$.

5- $$\vec{B}\wedge\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -2\\ 8 & -1 & 3\end{vmatrix}=10\vec{i}-19\vec{j}-33\vec{k}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=90+38-132=-4$$

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 9 & -2 & 4\\ 10 & -19 & -33\end{vmatrix}=142\vec{i}+337\vec{j}-151\vec{k}$$

Exercice3

On considère les vecteurs suivants ;

$$\vec{V}_1=\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}+3t\vec{k} \qquad \vec{V}_2=5t^3\vec{i}+3t\vec{j}-2t^4\vec{k}$$

- Calculer le module de ces deux vecteurs

-Trouver les expressions des grandeurs :

$\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}.\vec{V_2}\right)$ et $\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\right)$

Solution

$\left|\vec{V_1}\right| = \sqrt{1+9t^2}$ $\left|\vec{V_2}\right| = \sqrt{25t^6+9t^2+4t^8}$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}.\vec{V_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(5t^3\sin t-3t\cos t-6t^4\right)=15t^2\sin t+5t^3\cos t-3\cos t+3t\sin t-24t^3$$

$$\left(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\right)=\left(2t^4\cos t-9t^2\right)\vec{i}+\left(2t^4\sin t+15t^4\right)\vec{j}+\left(3t\sin t+5t^3\cos t\right)\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\right)=\left(8t^3\cos t-2t^4\sin t-18t\right)\vec{i}+\left(8t^3\sin t+2t^4\cos t+60t^3\right)\vec{j}$$

$$+\left((3-5t^2)\sin t+(3t+15t^2)\cos t\right)\vec{k}$$

Analyse dimensionnelle

La nature d'une grandeur physique se reconnait par sa dimension. La dimension d'une grandeur physique G se note par l'expression [G]. Une équation aux dimensions exprime les relations entre les différentes grandeurs. Elle sert à vérifier l'homogénéité des expressions littérales, pouvant ainsi détecter un certain nombre d'erreurs dans les calculs. Cette homogénéité peut être vérifier si l'égalité dans une formule entre deux expressions de même dimension et aussi la somme des expressions de même dimension.

Toutes les dimensions s'expriment à partir des grandeurs fondamentales :

- La longueur L ;
- La masse M
- Le temps T
- L'intensité I
- La température θ

La dimension de toute grandeur physique s'écrit sous la forme suivante :

$$[G]= L^a M^b T^c I^d \ \theta^e$$

Ou a, b,c,d et e sont des exposants rationnels

Connaissant la dimension d'une grandeur on peut lui attribuer l'unité adapté.

Exemples

Dimension d'une vitesse qui est une distance par le temps

$[v]= LT^{-1}$

D'une force

$$[P] = [m].[\gamma] = [m].\frac{[v]}{[t]} = [m].\frac{[d]}{[t]^2}$$

$$[P] = M.\frac{L}{T^2} = MLT^{-2} = (Kg.m/s^{-2})$$

Travail

$[W]=L^2\, MT^{-2}$

Exercices

Quelle est la dimension :

(a) de la constante de rappel d'un ressort ?

(b) du travail ?

(c) d'un couple ?

(d) de la tension superficielle ?

(e) d'un coefficient de frottement ?

(f) d'un coefficient de viscosité ?

(g) du champ gravitationnel ?

(h) d'un champ électrique ?

(i) d'un champ magnétique ?

(j) de E/B ?

Note : On utilisera les symboles suivants : M pour une masse, T pour un temps, L pour une longueur, et Q pour une charge.

Exercice

La masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ d'un cylindre de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{l}$ est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2}$$

1- En utilisant les dimensions, trouver les deux constantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$

2- En déduire l'expression exacte de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

Solution

La masse volumique est par définition le rapport entre la masse et le volume c'est-à-dire elle admet comme dimension :

$$[\rho] = ML^{-3} \quad \text{avec} \quad [\rho] = \frac{[m]^x}{[l]^y [R]^2} = M^x L^{-y-2}$$

Donc x=1 et -y-2=-3 donc y=1

2- $\rho = \dfrac{m}{\pi l R^2}$

Calcul d'incertitudes

1. Définition

La mesure d'une grandeur est entachée d'une erreur. Une erreur est la différence entre une valeur mesurée et une vraie valeur. Le problème est de trouver la vraie valeur qui reste impossible à évaluer. La valeur numérique associée à la mesure n'est connu que si elle est évaluée de l'incertitude sur cette valeur.

Soit une mesure d'une grandeur A. le résultat est donné sous la forme suivante

$$\mathbf{A = (a \pm \Delta A)\ \text{unité de A}}$$

A le résultats de la mesure

a : la valeur numérique de la mesure

ΔA : l'incertitude de la mesure

Exemple

On désire mesurer une longueur L. Cette mesure est réalisée à l'aide d'une règle; la valeur numérique obtenue est 5.32 m et on suppose que l'incertitude de la mesure est évaluée à 0.02 m. donc le résultat de la mesure est donnée sous la forme

$$\mathbf{L = (5.32 \pm 0.02)\ m.}$$

2. Détermination d'une incertitude

S'il s'agit d'une série de mesure ou d'une seule les résultats ne sont pas forcement les mêmes.

Dans le cas d'une série de mesure, l'incertitude est évaluée de la façon suivante :

On procède à n mesures indépendantes d'une même grandeur physique A avec les mêmes conditions expérimentales. On désigne par a_i les valeurs numériques obtenues avec i variant de 1 à n. la valeur numérique de la mesure a est alors égale à la moyenne arithmétique de l'ensemble des valeurs obtenues :

$$a = \bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

l'incertitude de la mesure ΔA est le rapport de l'écart type expérimentale S_{exp} par la racine carré du nombre de mesure n.

$$S_{\exp} = \sqrt{\frac{1}{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})}$$

$$\Delta A = \frac{S_{\exp}}{\sqrt{n}}$$

3. Propagation des incertitudes

La vitesse se déduit après la mesure de deux grandeur qui sont la distance et un temps. Il y a des grandeurs de mesure qui s'exprime en fonction de plusieurs grandeurs mesurables. On dit alors que les incertitudes sur ces grandeurs se propage sur la mesure de la grandeur qu'on cherche a déterminer, cas de la vitesse.

Cas d'une somme **A=B+C-D**

L'incertitude sur A est alors

$$\Delta A = \sqrt{\Delta B^2 + \Delta C^2 + \Delta D^2}$$

Cas d'un produit ou d'un quotient

$$F = k\frac{x^a . y^b}{(z+t)^c}$$

On applique la fonction logarithme à cette équation

$$\ln F = \ln(k\frac{x^a . y^b}{(z+t)^c})$$

$$\ln F = \ln k + \ln x^a . y^b - \ln(z+t)^c$$

$$\ln F = \ln k + a \ln x + b \ln .y - c \ln(z+t)$$

On passe au dérivé de cette équation, avec k constant,

$$\frac{dF}{F} = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} - c\frac{dz+dt}{z+t}$$

Enfin, on remplace les éléments différentiels par les incertitudes sur les grandeurs associées et on transforme tous les signes négatifs en signes positifs.

On obtient

$$\frac{\Delta F}{F} = a\frac{\Delta x}{x} + b\frac{\Delta y}{y} + c\frac{\Delta z + \Delta t}{z+t}$$

Exemple

On cherche à déterminer l'incertitude sur la mesure de l'indice n qui est donnée par la formule suivante :

$$n = \frac{\sin(\frac{A+D_m}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}$$

On utilise le logarithme de cette dernière expression, on aura alors :

$$\ln n = \ln \sin(\frac{A+D_m}{2}) - \ln \sin(\frac{A}{2})$$

On passe à la différentielle logarithmique repérée par la lettre d, on a donc :

$$\frac{dn}{n} = \frac{d\left(\sin(\frac{A+D_m)}{2}\right)}{\sin(\frac{A+D_m)}{2}} - \frac{d\left(\sin(\frac{A}{2})\right)}{\sin(\frac{A}{2})}$$

Finalement l'incertitude de l'indice de réfraction est donnée par la formule analytique suivante

$$\Delta n = n\left[\frac{\Delta A}{2}\left(\cot g \sin(\frac{A+D_m}{2}) - 0.5 \cot g \sin(\frac{A}{2})\right) + \frac{\Delta D_m}{2}\left(\sin \cot g(\frac{A+D_m}{2})\right)\right]$$

Cinématique

I- Définition

La cinématique est l'étude des mouvements des masses, quantité de la matière, indépendamment des causes qui les engendrent

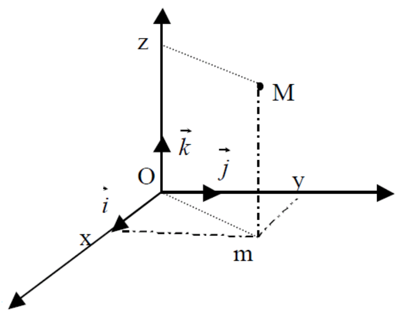
1- Le point matériel

On entend par un point matériel, la matière qui est concentré en son centre de gravité, sans dimension géométrique dont on néglige le mouvement de rotation autour de soi-même.

Référentiel

Le mouvement d'un point est un concept relatif. En d'autres termes, on ne peut pas dire qu'un corps est "en mouvement" (ou "au repos") sans préciser par rapport à quoi. D'où la nécessité de définir un repère doté d'un chronomètre, pour connaitre la position du point par rapport à ce repère et l'instant correspondant à cette position (mesure du temps). Il s'agit d'un repère d'inertie qu'on nomme référentiel.
Selon la nature du mouvement du point, sa position sera localisée par l'un des systèmes a savoir : cartésien, polaire, cylindrique ou sphérique.

2- Vecteur position



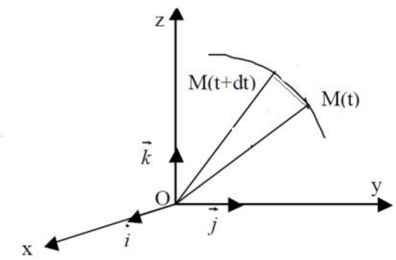
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

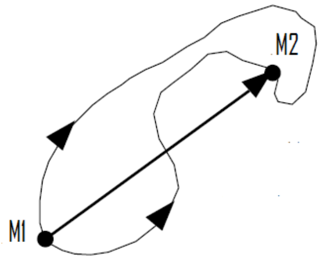
x est la projection de M sur l'axe (ox), y sur l'axe (oy) et z sur l'axe (oz), on les nomme les coordonnées de M, comme le point M est en mouvement donc sa position varie dans le temps ces coordonnées sont fonction du temps.

x=f(t) y=g(t) z=h(t)

Qu'on appelle les équations horaires.

3- Vecteur déplacement





Soient deux points M_1 à l'instant t et un autre M_2 à l'instant (t+dt), on peut définir trois chemin différents entre ces deux points, qui correspondent au même vecteur

C'est le vecteur déplacement formé par l'origine M_1 et l'extrémité M_2, qui défini un mouvement qui se fait du point M_1 au point M_2.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\vec{U}$$

$\vec{U}$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$

4- Trajectoire

C'est l'ensemble des points occupés par un mobil à tous les instants. Mathématiquement c'est une relation liant les coordonnés *x*, *y* et *z* *entre eux* indépendamment du temps. Cette équation est obtenue en éliminant le temps entre les différentes coordonnées ou équations horaires.
y=f(x,z) ou x=g(y,z) sinon z=h(x,y)

5- Vecteur vitesse

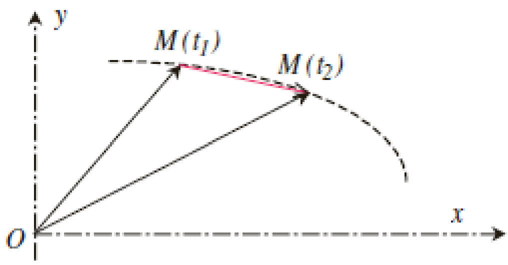
La vitesse est une grandeur qui caractérise un mouvement, c'est la variation de la position par rapport au temps. Par ailleurs, cette grandeur est vectorielle car le mouvement d'un point se caractérise par une direction et un sens.

On distingue deux vitesses, une vitesse moyenne et une vitesse instantanée.

a- Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est la variation de la distance globale par rapport au temps écoulé. Un mobile qui se déplace d'Oran vers Alger par autoroute, il parcoure 400km pendant 4heures. On définit une vitesse moyenne de 100km/h en module, d'Oran vers Alger en sens. Cette vitesse moyenne ne prend en considération que le point de départ et d'arrivé. En résumer le vecteur vitesse moyenne dans ce cas est définie par un module de 100Km/h, un support qui est l'autoroute et un sens d'Oran vers Alger.

Soit le point M_1 à l'instant t_1 et le point M_2 à l'instant t_2



$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

Avec $$\Delta t = t_2 - t_1$$

b- Vitesse instantanée

En réalité ce mouvement ne se fait pas à une vitesse constante, à chaque instant on aura une situation de la vitesse, on parlera de vitesse instantanée. C'est la limite de la vitesse moyenne lorsque la différence du temps est très petite cela veut dire qu'elle tend vers zéro.

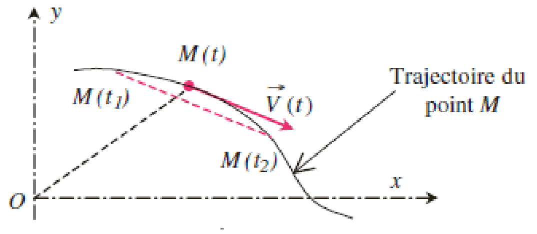
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_2}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Soit une fonction y=f(x) ; on appelle sa dérivée la quantité égale à

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ce n’est autre que la définition de la dérivée d’une fonction.

Le vecteur vitesse est donc la dérivée du vecteur position par rapport au temps. Il en résulte que le *vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.*



Expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le vecteur vitesse du point M s’obtient en dérivant son vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Sa norme est

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

6- Vecteur accélération

Le vecteur accélération est une grandeur d'évolution qui mesure la variation du vecteur vitesse, en norme et en direction.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

La norme du vecteur accélération, appelée accélération et notée γ, a la dimension d'un rapport entre une distance par le carré du temps LT^{-2}

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

II- Exemple de mouvement

Un mouvement peut se faire suivant des trajectoires rectilignes ou curvilignes ou suivant la combinaison des deux..

1- Mouvement rectiligne

Dans le référentiel d'étude, la trajectoire est une portion de droite. Il est évident alors de repérer le point *M* sur cette droite confondue, par exemple, avec l'axe *Ox* des coordonnées cartésiennes. Il n'y a alors qu'une équation horaire $x(t)$ et une seule composante pour les vecteurs vitesses

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$$

Ou le module de la vitesse s'exprime

$$v = \frac{dx}{dt}$$

C'est une équation différentielle qui permet de donner l'information sur le mouvement et sa nature.

Si la vitesse est constante donc

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = v\int_{t_0}^{t} dt$$

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

$$\Rightarrow x = v(t - t_0) + x_0$$

Il s'agit de l'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme.

- Dans le cas où la vitesse varie en fonction du temps, elle s'exprime de la façon suivante :

Si γ est constante alors :

$$\gamma = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} \gamma dt = \gamma\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\Rightarrow v = \gamma(t - t_0) + v_0$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{t_0}^{t} (\gamma(t - t_0) + v_0)dt$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\gamma(t^2 - t_0^2) - \gamma t_0(t - t_0) + v_0(t - t_0)$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\gamma(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0}$$

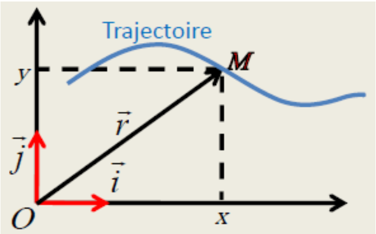
C'est le mouvement uniformément varié. Ce mouvement peut être accéléré ou retardé. Dans le premier cas le produit de la vitesse et l'accélération doit être positif, dans le deuxième cas le même produit doit être négatif

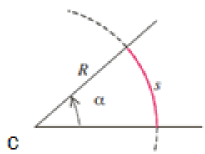
2- Mouvement curviligne

a) Base de Frenet (intrinsèque)

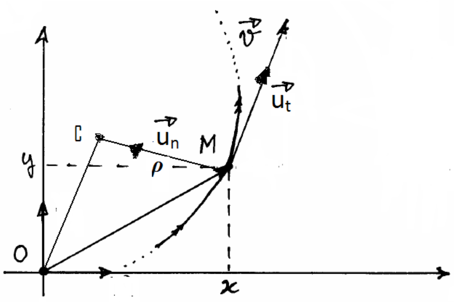
Il s'agit d'un mouvement qui admet comme trajectoire une trajectoire curviligne. La courbure de la trajectoire nécessite la connaissance du rayon de courbure et le centre de courbure.

Ce mouvement peut être modélisé comme un cercle de rayon R, qui dépend du temps (variable), de centre *C* et un angle α exprimé en radian. La mesure *s* de la longueur de l'arc de cercle intercepté par cet angle est donnée par : $s = \boldsymbol{R}\,\alpha$. L'angle α apparaît comme le rapport de deux longueurs et est sans dimension. Cette grandeur s s'appelle la coordonnée curviligne.





Par la suite on utilisera ***ρ comme*** rayon R



Soit un mobile M qui suit une trajectoire curviligne, il parcourt un arc $\widehat{s} = \overset{\frown}{M_t M}_{t+\Delta t}$

La vitesse instantanée est définie par

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Cette vitesse peut être écrite en fonction d'un vecteur unitaire

$$\vec{v} = v\overrightarrow{U}_t$$

Tel que

$$\overrightarrow{U}_t = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$$

Il est tangent à la trajectoire au point M

En dérivant cette vitesse on retrouve l'expression de l'accélération. La vitesse est le produit de deux termes qui dépendent du temps :

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U}_t + v\frac{d\overrightarrow{U}_t}{dt}$$

Comme le vecteur unitaire est fonction d'un paramètre qui lui-même dépend du temps, pour cela on procèdera de la façon suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{U}_t}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U}_t}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

Avec

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{1}{\rho} = v\frac{1}{\rho}$$

D'où

$$\frac{d\overrightarrow{U_t}}{dt} = (-\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})\frac{1}{\rho}v = \frac{v}{\rho}\overrightarrow{U_n}$$

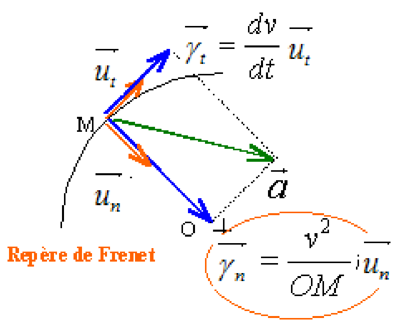
Tel que $$\overrightarrow{U_n} = -\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$$

$$(\vec{U}_N \perp \vec{U}_t)$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{U_n}}$$

L'accélération a deux composantes, une suivant un axe tangentiel au mouvement et une composante suivant un axe normale au mouvement et orienté vers le centre de courbure. c'est la résultante de deux accélération.

On remarque que la vitesse et l'accélération s'écrivent dans une nouvelle base $(\overrightarrow{U_t}, \overrightarrow{U_n})$ qu'on nomme base de Frenet ou base intrinsèque.



Propriétés

- Dans le cas d'un mouvement curviligne uniforme

$$|\vec{V}| = cte \Rightarrow |\vec{\gamma}_t| = 0$$

L'accélération se réduit à un seul terme, contrairement au mouvement rectiligne uniforme ou on a aucune accélération.

$$\vec{\gamma}_N = \frac{V^2}{\rho}\vec{U}_N$$

- Dans le cas d'un mouvement rectiligne le rayon de courbure tend vers l'infini , l'accélération se réduit à une composante tangentielle.

Détermination du rayon de courbure

on va faire le produit vectoriel entre l'accélération et la vitesse

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{V} = (\frac{dV}{dt}\vec{U}_t + \frac{V^2}{\rho}\vec{U}_N) \wedge V\vec{U}_t$$

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{V} = \frac{V^3}{\rho}\left(\overrightarrow{U_N} \wedge \vec{U}_t\right)$$

Comme le produit vectoriel est un vecteur on prendra son module, ainsi on peut déduire le rayon de courbure

$$\boxed{|\vec{\gamma} \wedge \vec{V}| = \frac{V^3}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^3}{|\vec{\gamma} \wedge \vec{V}|}}$$

On remarque que le rayon de courbure est une grandeur algébrique, il peut etre calculer dans n'importe quelle base.

- Centre de courbure $C\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OC} = x_c\vec{i} + y_c\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OM} + \rho\overrightarrow{U_n}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_t}}{dt} = \frac{v}{\rho}\overrightarrow{U_n} \Rightarrow \overrightarrow{U_n} = \frac{\rho}{v}\frac{d\overrightarrow{U_t}}{dt}$$

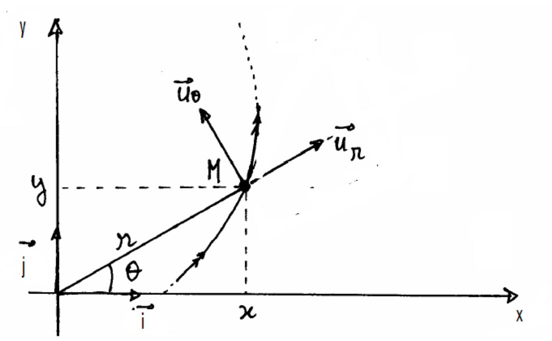
Avec

$$\frac{d\overrightarrow{U_t}}{dt} = \frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)}{dt}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)}{dt}$$

Le centre de courbure est un point qu'on cherche à repérer dans une base, pour cela il est judicieux de trouver l'expression du vecteur position de ce point.

b) La base polaire



Une position se repère en coordonnées cartésiennes par

$$M\binom{x}{y}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On peut aussi exprimer ce vecteur par un vecteur unitaire

$$\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right|\overrightarrow{U_r}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U_r}$$

Tel que

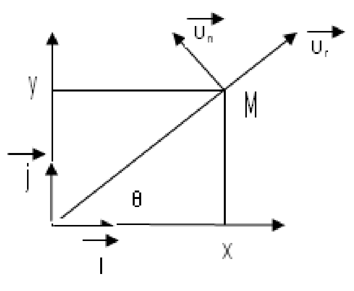
$$\overrightarrow{U_r} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$$

On peut repérer la position M par une coordonnée r (distance entre l'origine du repère choisi et la position M) et θ angle orienté que fait le rayon r avec l'axe des abscisses (ox)

Il existe une relation entre ces coordonnées qu'on nomme coordonnées polaires et les coordonnées cartésienne

$x = r\cos\theta$ $\quad$ $y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad$ $tg\theta = \frac{y}{x}$



Expression de la vitesse

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = (-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta}$$

$\vec{U}_\theta \perp \overrightarrow{\vec{U}_r}$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta}}$$

posons

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}}$$

On remarque que la vitesse s'exprime dans une autre base, même chose pour l'accélération

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{r}\overrightarrow{U_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{U_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U}_{\theta}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{U}_{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\dot{\theta}\overrightarrow{U}_{r}$$

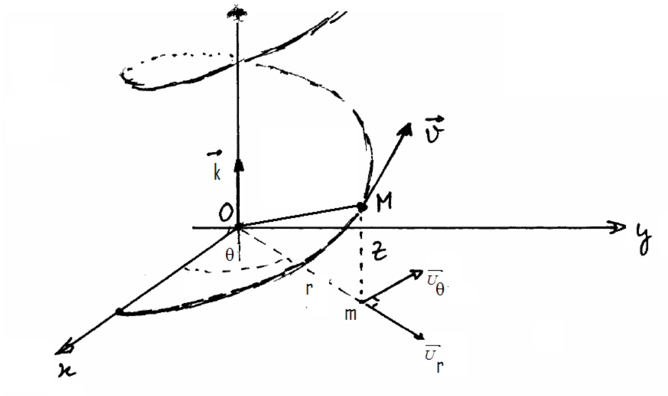
$$\boxed{\vec{\gamma}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^{2})\overrightarrow{U}_{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\overrightarrow{U}_{\theta}}$$

On défini une base qu'on appelle base polaire qui est $(O,\overrightarrow{U_r},\overrightarrow{U_\theta})$

L'utilité de cette base est de faciliter l'étude des mouvements. On remarque qu'on a un mouvement qui se sépare en deux mouvement, un suivant le vecteur $\overrightarrow{U_r}$ qu'on nomme mouvement radiale et l'autre suivant le vecteur $\overrightarrow{U_\theta}$ qu'on appelle mouvement angulaire ou orthoradiale

c) Base cylindrique

De la même manière, pour caractériser un mouvement dans un plan, il es plus facile d'utiliser les coordonnées polaire, par contre si le mouvement se fait dans l'espace, le mouvement suivant la troisième dimension peut se faire rectilignement ou circulairement. Dans le premier cas on utilise les coordonnées cylindriques dans le deuxième cas on utilise des coordonnées sphériques.



On peut repérer le point M par le vecteur

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \overrightarrow{Om} + z\vec{k}$$

M c'est la projection de M sur le plan (xoy)

De la même on calcule la vitesse et l'accélération

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{U}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta + \dot{z}\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{U}_r (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{U}_\theta + \ddot{z}\vec{k}}$$

Un mouvement qui se fait suivant les trois vecteurs, on introduit la base cylindrique $(O, \overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \vec{k})$

Exercices

Exercice 1 :

un point matériel se déplace dans le plan (xOy) suivant les équations horaires suivantes :

$x(t)= t$ et $y(t)=t^2$

-donner l'équation de mouvement du mobile

- calculer la vitesse ainsi que l'accélération du pt M.

Solution

- $y=x^2$ équation de la trajectoire
- $\vec{v} = \vec{i} + 2t\vec{j}$
- $\vec{a} = 2\vec{j}$

Exercice2

Soit un point M dans un repère orthonormé, on le représente par son vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = at\vec{i} - bt^2 2\vec{j}$ tel que a et b deux constantes positives.

1) quelle est la dimension de a et b

2) calculer l'incertitude relative sur les coordonnées de M sachant que l'incertitude relative sur a et b est de 10^{-2} ?

Exercice3

Un joueur de base ball frappe une balle qui atteint une vitesse de 14m/s et fait un angle α=30° avec l'horizontale. Un autre joueur distant de x=30.5m du premier et dans le même plan de la trajectoire, commence à courir quand le premier frappe la balle.

1- Calculer la vitesse maximale pour que le deuxième joueur puisse attraper la balle, quand elle est à une hauteur de 2.44m, sachant que cette balle était à 0.6m au moment de sa frappe.

2- Quelle est la distance que doit parcourir.

Solution

1- Les équations horaires de la balle sont :

$$x_1 = v_0 \cos(\alpha)t.$$
$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + 0.9$$

Celles du deuxième joueur sont :

$$x_2 = -vt + 30.5 \quad \text{et} \quad y_2 = 2.44$$

Pour que le deuxième joueur puisse attraper la balle il faut que $x_1=x_2$ et $y_1=y_2$

$$-vt + 30.5 = v_0 \cos(\alpha)t$$
$$2.44 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + 0.9$$

De ces deux dernières équations on déduit que le temps a deux valeurs t=1.17s et t=0.25s donc on aura deux vitesses v=13.4m/s et v=109.36m/s. et la vitesse minimale est 13.4m/s.

2- la distance minimale parcourue est d=15.7m

Exercice4

L'accélération d'un point matériel M est donnée par la relation suivante :

$$\vec{\gamma} = e^t \vec{i} + \cos wt\,\vec{j} + t^2\vec{k}$$

A t=0s la position et la vitesse du mobile sont (1 ; ($-1/w^2$) ;0) et (1 ;0 ;-1) respectivement. Donner les expressions des vecteurs vitesses et position du mobile à l'instant t.

Solution

Pour trouver la vitesse il suffit d'intégrer l'accélération même chose pour la position c'est d'intégrer la vitesse :

$$\frac{dv_x}{dt} = e^t \Rightarrow v_x = \int e^t dt = e^t + c_x$$

A t=0 v_x=1 donc c_x=0 d'où $v_x = e^t$

$$\frac{dv_y}{dt} = \cos wt \Rightarrow v_y = \int \cos wt dt = \frac{1}{w}\sin wt + c_y$$

A t=0 v_y=0 donc c_y=0 d'où $v_y = \frac{1}{w}\sin wt$

$$\frac{dv_z}{dt} = t^2 \Rightarrow v_z = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c_z$$

A t=0 v_y=-1 donc c_z=-1 d'où $v_z = \frac{1}{3}t^3 - 1$ donc

La vitesse s'écrit $\vec{v} = e^t\vec{i} + \frac{1}{w}\sin wt\,\vec{j} + \left(\frac{1}{3}t^3 - 1\right)\vec{k}$

Pour trouver le vecteur position il suffit d'intégrer la vitesse.

$$\frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow x = \int e^t dt = e^t + c'_x$$

A t=0 x=1 donc c'_x=0 d'où $x = e^t$

$$\frac{dy}{dt} = \cos wt \Rightarrow y = \int \frac{1}{w}\sin wt dt = -\frac{1}{w^2}\cos wt + c'_y$$

A t=0 y=-1/w² donc c'_y=0 d'où $y = -\frac{1}{w^2}\cos wt$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{1}{3}t^3 - 1\right) \Rightarrow z = \int\left(\frac{1}{3}t^3 - 1\right)dt = \left(\frac{1}{12}t^4 - t\right) + c'_z$$

A t=0 z=0 donc c'_z=0 d'où $z = \frac{1}{12}t^4 - t$ donc

$$\overrightarrow{OM} = e^t\vec{i} - \frac{1}{w^2}\cos wt\,\vec{j} + \left(\frac{1}{12}t^4 - t\right)\vec{k}$$

Exercice 5

un point matériel se déplace sur une ligne droite suivant l'équation horaire suivante :

X(t)=-6t²+16t (t en seconde)

- Quelle est la position de ce corps à t=1s
- A quelle instant t, il passe par la position O(origine)
- Quelle est la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris entre 0s et 2 s
- Quelle est l'expression de la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris $t_0 < t < \Delta t + t_0$
- Donner l'expression de la vitesse instantanée, déduire sa valeur a t=0s
- Quelle est l'expression de l'accélération moyenne durant le temps $t_0 < t < \Delta t + t_0$
- Donner l'expression de l'accélération instantanée.

Solution

- X(1)=10
- X=0 ⇨ 6t²+16t=0 il passe par l'origine à t=0s et t=8/3=2.7s
- $$v_{moy} = \frac{x(t=2) - x(t=0)}{2-0} = 4\,m/s$$
- $$v_{moy} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = 16 - 12t_0 - 6\Delta t$$
- $$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} = 16 - 12t$$ v(0)=16m/s
- $$\gamma_{moy} = \frac{v(t=2) - v(t=0)}{2-0} = -12\,m/s^2$$
- $$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \gamma_{moy} = -12$$

Exercice 6

La position d'un mobile en fonction du temps est indiquée sur la figure ci-dessous. Indiquer :

1/ en quel endroit le mouvement se fait dans la direction des *X* positifs ou négatifs ?

2/ à quel instant le mouvement est retardé ou accéléré ?

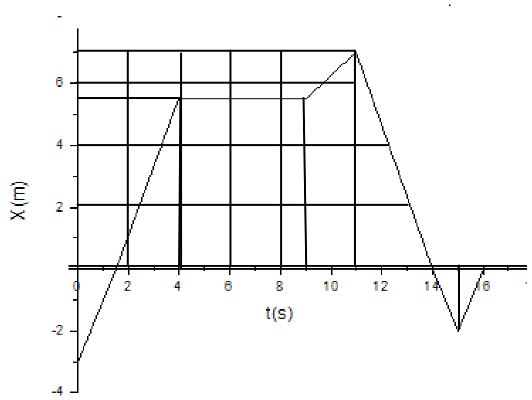
3/ à quel instant le corps passe par l'origine ?

4/ à quel instant la vitesse est nulle ?

5/ faire un graphique de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps,

6/ estimer d'après le graphique, la vitesse moyenne pour les intervalles de temps :

$1s < t < 1,8s$, $1s < t < 2, 2s$, $1s < t < 3s$



Exercice 7

On se propose d'étudier le mouvement d'un point matériel dans le système des coordonnées polaires, il décrit une trajectoire suivant une loi suivante : **r=2acosθ avec θ=wt** (a et w étant des constantes) .

1- Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes, dans le système des coordonnées polaires

2- Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leur normes, dans le système des coordonnes intrinsèques (Frenet).

3- Déterminer le rayon de courbure

4- Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes, dans le système des coordonnées cartésiennes.

Solution

$$\vec{v} = 2aw\left(-\sin(wt)\vec{U}_r + \cos(wt)\vec{U}_\theta\right) \qquad \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = 2aw$$

$$\vec{\gamma} = -4aw\left(\cos wt\vec{U}_r + \sin(wt)\vec{U}_\theta\right)$$

- $$\vec{\gamma} = \left(\frac{dv}{dt}\vec{U}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{U}_n\right) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$$

$$\vec{\gamma}_t = \vec{0} \qquad \gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_n^2 \Rightarrow \gamma^2 - \gamma_t^2 = \gamma_n^2 \Rightarrow \gamma_n^2 = 4aw^2$$

- Détermination du rayon de courbure

$$\rho = \frac{v^3}{\left|\vec{\gamma} \wedge \vec{v}\right|} \qquad \text{avec} \quad \left|\vec{\gamma} \wedge \vec{v}\right| = 8a^2w^3 \quad \text{d'où} \quad \rho = a$$

Cercle de rayon a

$r = 2a\cos\theta$ avec $x = r\cos\theta$ d'où $r^2 = 2ax$

comme $r^2 = x^2 + y^2$ si on remplace l'expression de r dans cette dernière équation on aura $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ c'est l'équation d'un cercle de rayon a et de centre (a,0).

- $$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = 2a\cos^2\theta\vec{i} + 2a\cos\theta\sin\theta\vec{j}$$

<u>Exercice 8</u>

Un point P se déplace dans un plan Oxy, ses coordonnées à l'instant t sont données par : $x = 20\alpha\,(t-\tau)$; $y = 10\beta\,(t-\tau)^2$ avec : $\alpha = 1$ USI, $\beta = 1$ USI et $\tau = 1$USI

a) quelle est la dimension de τ, α et β

b) Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire, représenter la courbe correspondante entre 0 et 4s;

c) Calculer les composantes cartésiennes de la vitesse et de l'accélération ainsi que leurs modules

c) Donner les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base de Frenet.

d) donner les vecteurs vitesses et accélérations à t = 3s.

e) Calculer le rayon de courbure lorsque t = 3s.

Solution

$[\tau]=T \quad [\alpha]=LT^{-1}$ et $[\beta]=LT^{-2}$

Equation de la trajectoire $y=\dfrac{x^2}{40}$

$$\vec{v}=20\vec{i}+20(t-1)\vec{j} \qquad \Rightarrow v=20\sqrt{1+(t-1)^2}$$

$$\vec{\gamma}=20\vec{j} \Rightarrow \gamma=20\, m/s^2$$

$$\gamma_t=\frac{20(t-1)}{\sqrt{1+(t-1)^2}} \qquad \gamma_n=\sqrt{\gamma^2-\gamma_t^2}=\frac{20}{\sqrt{1+(t-1)^2}}$$

$$\vec{v}=20\vec{i}+40\vec{j} \;\Rightarrow v=44.72\, m/s$$

$$\gamma_t=17.88\, m/s^2 \quad \gamma_n=8.94\, m/s^2$$

$$\rho=\frac{v^2}{\gamma_n}=223.6m$$

Exercice 9

Le mouvement d'une particule M se déplaçant dans le plan (xoy) est décrit par les équations suivantes : x(t) = t cost et y(t) = t sint

1- Déterminer les composantes du vecteur vitesse et son module.

2- Déterminer les composantes du vecteur accélération et son module.

3- Déterminer les expressions des composantes intrinsèques de l'accélération en fonction du temps t

5- Déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice 10

Un point matériel M décrit la courbe d'équation polaire **r cos^2(θ/2)=a** ou a est une constante

1- Montrer que la trajectoire de M est une parabole.
2- On suppose de plus que le module du vecteur vitesse est toujours proportionnel à r : v=kr, ou k est une constante positive.
3- Calculer, en fonction de θ, les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse de M
4- Déterminer la loi du mouvement θ(t) en supposant que θ est nul à l'instant t=0

Solution

1- Sachant que $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$

D'où l'équation polaire s'écrit $r = 2a - r\cos\theta$ avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

On aura l'équation $x = \dfrac{-y^2 + 4a^2}{4a}$ c'est l'équation d'une parabole

2- $\overset{*}{r} = a\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}\overset{*}{\theta}$ $\quad r\overset{*}{\theta} = a\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\overset{*}{\theta}$ donc $v = \sqrt{\overset{*}{r} + r\overset{*}{\theta}} = \dfrac{a\overset{*}{\theta}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}$

Exercice 11

Un point matériel A décrit une courbe plane de coordonnées polaires :

$$\theta = t^3 \qquad\qquad r = R$$ Tel que R constant

1) Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération. Déduire leurs normes.
2) Exprimer la vitesse et l'accélération dans la base intrinsèque (Frenet).
3) Quel est le rayon de courbure ρ de la trajectoire ?

4) Sachant que le centre de courbure est donné par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)$ déterminer les coordonnées de ce centre C.

5) Montrer que $\overrightarrow{U_t} = \overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{U_n} = -\overrightarrow{U_r}$

solution

1- L'expression de la vitesse $\vec{v} = 6Rt^2\left(\overrightarrow{U}_\theta\right)$ $\Rightarrow \left|\vec{v}\right| = 6Rt^2$

et celle de l'accélération $\vec{\gamma} = 12Rt\left(-3t^3\overrightarrow{U}_r + \overrightarrow{U}_\theta\right)$

$\gamma = 12Rt\sqrt{9t^6 + 1}$

2- $\vec{v} = 6Rt^2\left(\overrightarrow{U}_t\right)$

- $$\vec{\gamma} = \left(\frac{dv}{dt}\overrightarrow{U}_t + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{U}_n\right) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$$

$$\gamma_t = 12Rt$$

Et
$$\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_n^2 \Rightarrow \gamma^2 - \gamma_t^2 = \gamma_n^2$$
$$\Rightarrow \gamma_n = 36Rt^4$$

3- Détermination du rayon de courbure

$$\rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = R$$

4- Pour calculer le centre de courbure, on détermine le vecteur

$$\overrightarrow{OC} = R\overrightarrow{U_r} + \frac{R^2}{6Rt^2}\frac{d\left(\overrightarrow{U_\theta}\right)}{dt}$$

$$\overrightarrow{OC} = R\overrightarrow{U_r} + \frac{R^2}{6Rt^2} - 6t^2\overrightarrow{U}_r = \vec{0}$$ c'est C(0,0)

Avec $$\frac{d\overrightarrow{U}_\theta}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -6t^2\overrightarrow{U}_r$$

5- $\vec{v} = 6Rt^2\left(\overrightarrow{U}_\theta\right)$ et $\vec{v} = 6Rt^2\left(\overrightarrow{U}_t\right)$ donc $\overrightarrow{U_\theta} = \left(\overrightarrow{U}_t\right)$

De la même façon pour les accélération on compare l'accélération des coordonnées polaires avec celle des coordonnées de Frenet on trouve $\overrightarrow{U_n} = -\left(\overrightarrow{U}_r\right)$.

<u>Exercice12</u>

Un point matériel en mouvement dans un plan suivant une trajectoire curviligne ; sachant que son accélération tangentielle vaut β et normale vaut 2 β. On désigne α l'angle que fait la tangente avec l'axe OX.

1- si ce point est au repos à t=0, la coordonnée curviligne s=0 déduire la relation s=f(v)

2- calculer le rayon de courbure et montrer que ρ(t)=s(t)

3- sachant que ds= ρdα, déterminer s en posant s=s_0 quant α=0 déduire la relation v=f(α).

Solution

1- puisque $\frac{dv}{dt} = \beta.......... ......et.......... ...\frac{v^2}{\rho} = 2\beta$

En intégrant la première équation on aura $v = \beta t$ puisqu'à t=0 la vitesse est nulle.

La relation qui lie la coordonnée curviligne s et le module de la vitesse v est

$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int vdt = \frac{\beta t^2}{2} + c$ la constante c est nulle puisque s =0 lorsque t=0

Donc $s = \dfrac{\beta t^2}{2} = \dfrac{v^2}{2\beta}$ par ce qu'on a éliminé le temps.

2- on déduit le rayon de courbure l'accélération normale et sachant que d'après la première question $\rho = \dfrac{v^2}{2\beta} = s$

3- la coordonnée curviligne on la modélise comme un arc qui vaut le produit du rayon par l'angle. ds=ρdα et comme on s=ρ donc ds=sdα.

$\dfrac{ds}{s} = d\alpha \Rightarrow \ln s = \alpha + cst \Rightarrow s = Ae^{\alpha}$ puisque $s(0)=s_0$ donc $s = s_0 e^{\alpha}$.

De cette dernière équation et l'expression de la vitesse en fonction de s on aura

$\rho = \dfrac{v^2}{2\beta} = v = \sqrt{2s\beta} = \sqrt{2\beta s_0} e^{\frac{\alpha}{2}}$ donc la vitesse est une fonction de α.

MOUVEMENT RELATIF

I INTRODUCTION

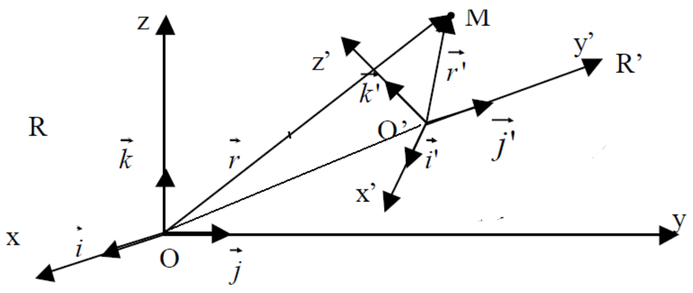
Le mouvement d'un point matériel peut être réparti en deux mouvements distincts

- Un mouvement par rapport à un repère fixe qu'on nommera repère Absolu
- Un mouvement par rapport à un repère mobile qu'on nommera repère relatif.

Toutes les grandeurs (position, vitesses et accélération) seront identifiées par rapport au repère approprié.

II Grandeurs absolues et relatives

Soit un point matériel M en mouvement par rapport à un repère R'(o',x',y',z') mobile, lui-même en mouvement par à un repère fixe R (O,x,y,z).



a- La position

La position de M dans R est la position absolue et sa position dans R' c'est sa position relative

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

b- Vitesse

La vitesse absolue est la vitesse de M par rapport à R

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Cette vitesse peut etre calculée d'une autre façon :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

On pose :

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$\vec{V}r = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

D'où

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r}$$

V_r : c'est la vitesse relative c'est-à-dire la vitesse du mobile M par rapport au repère R'

V_e : représente la vitesse d'entrainement c'est-à-dire la vitesse du repère R' par rapport au repère R.

Deux cas de mouvement de R' peuvent être, en translation et en rotation, la vitesse absolue et relative garde la même expression par contre la vitesse d'entrainement se met différemment.

Cas de Translation

R’ en translation par rapport à R

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

Les vecteurs unitaires du repère R’ ne changent pas ils gardent le même sens et même direction de ce fait leurs dérivés par rapport aux temps sont nulles. Il y a que l’origine O’ qui varie dans le temps.

$$\vec{i} = \vec{i}' \qquad \vec{j} = \vec{j}' \qquad \vec{k} = \vec{k}'$$

Cas de rotation

On suppose que le repère R’ est en rotation par rapport à R suivant l’axe perpendiculaire, donc le vecteur vitesse angulaire est porté par cet axe. Dans le cas présent l’axe (oz)

$$\vec{\Omega} = w\vec{k}$$

On sait que n’importe quel vecteur en rotation par rapport à l’axe perpendiculaire sa dérivé dans le temps est :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \quad \text{donc} \quad \frac{d\vec{i}'}{dt} = (\vec{\Omega} \wedge \vec{i}')$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(\vec{\Omega} \wedge \vec{i}') + y'(\vec{\Omega} \wedge \vec{j}') + z'(\vec{\Omega} \wedge \vec{k}')$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\Omega} \wedge x'\vec{i}') + (\vec{\Omega} \wedge y'\vec{j}') + (\vec{\Omega} \wedge z'\vec{k}')$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\Omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

c- accélération

L'accélération absolue c'est l'accélération du point M dans le repère R :

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) +$$
$$+ \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c}$$

L'accélération absolue est la somme de trois accélérations :

L'accélération relative

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$$

L'accélération d'entrainement

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$$

et l'accélération de Coriolis

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

Cas de translation,

$\vec{i} = \vec{i'} = cte \qquad \vec{j} = \vec{j'} = cte \qquad \vec{k} = \vec{k'} = cte$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

Cas de rotation

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = (\vec{\Omega} \wedge \vec{i}')$$

$$\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = (\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{i}') + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{i}'}{dt}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\left((\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{i}') + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{i}'}{dt}\right) + y'\left((\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{j}') + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{j}'}{dt}\right) + z'\left((\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{k}') + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left((\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge x'\vec{i}') + \vec{\Omega} \wedge x'\frac{d\vec{i}'}{dt}\right) + \left((\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge y'\vec{j}') + \vec{\Omega} \wedge y'\frac{d\vec{j}'}{dt}\right) +$$

$$+\left((\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge z'\vec{k}') + \vec{\Omega} \wedge z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') + \vec{\Omega} \wedge (x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}) \right)$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \right)$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}(\vec{\Omega} \wedge \vec{i}') + \frac{dy'}{dt}(\vec{\Omega} \wedge \vec{j}') + \frac{dz'}{dt}(\vec{\Omega} \wedge \vec{k}') \right)$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}') \right) = 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r)$$

Exercices

Exercice 1

Une masse tombe d'une hauteur h sans vitesse initiale.

1- On s'intéresse à la trajectoire de la masse dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v_0 et passant à la verticale de chute .

2- Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

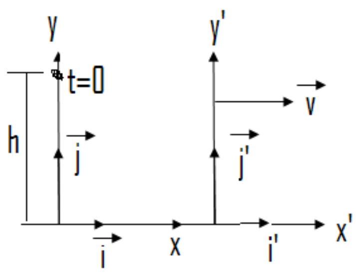
Solution

1- $\vec{V} = v_0\vec{i}$ c'est la vitesse d'entrainement

Dans le repère fixe R

t=0 et v=0 et y=h

$y(t) = h - \frac{1}{2}\gamma t^2$ d'où $\vec{V}_a = -\gamma t\vec{j}$



Dans le repère mobile R'

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \qquad \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$$

$$\overrightarrow{OM} = (h - \frac{1}{2}\gamma t^2)\vec{j} - v_0 t\vec{i}$$

$$\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = (-\gamma t)\vec{j} - v_0\vec{i}$$

2- y'=f(x') ?

$$\overrightarrow{OM} = (h - \frac{1}{2}\gamma t^2)\vec{j} - v_0 t\vec{i} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' = -v_0 t \\ y' = h - \frac{1}{2}\gamma t^2 \end{bmatrix} \Rightarrow y' = h + \left(\frac{\gamma}{2v_0^2}\right)x'^2$$

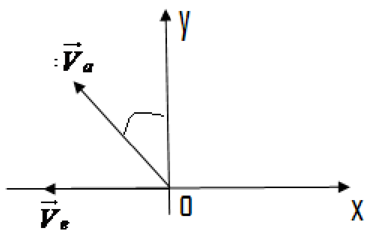
Exercice2

Un avion se dirige vers le nord ouest avec une vitesse de 125km/h par rapport à un observateur lié à la terre. Si le vent souffle vers l'ouest avec une vitesse de 50km/h par rapport au même observateur. Trouver la vitesse de l'avion et sa direction.

Solution

V_a=125km/h V_e=50km/h

$$\vec{V}_e = \begin{pmatrix} -V_e \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad \vec{V}_a = \begin{pmatrix} -V_a \sin\alpha \\ V_a \cos\alpha \end{pmatrix}$$



$$\vec{V}_r = \vec{V}_a - \vec{V}_e$$

$$\vec{V}_r = \begin{pmatrix} -V_a \sin\alpha + V_e \\ V_a \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Exercice 3

soit un repère mobile R'(o',x',y',z') en mouvement par rapport à un autre fixe R(o,x,y,z) avec une vitesse $\vec{V_e}$ (1,0,0). On suppose que x',y' et z' sont les coordonnés d'un point matériel M dans le repère R' tel que : (x'=6t^2+3t ; y'=-3t^2 et z'=3), on suppose qu'à l'instant t=0 ce point est a la position O(0,0,0) dans le repère fixe R.

a) Donner la vitesse relative de ce point ainsi que sa vitesse absolue.

b) En déduire les coordonnés du point M dans le repère fixe R.

c) Déterminer l'expression de l'accélération relative et absolue.

Solution

a) $$\vec{V}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R'} = awcoswt\vec{i}'$$

$$\vec{V}_e = \vec{i}' \qquad R//R' \Rightarrow \vec{i} = \vec{i}', \vec{j} = \vec{j}', \vec{k} = \vec{k}' \qquad \vec{V}_a = (12t+4)\vec{i} - 6t\vec{j}$$

b) $$V_a^x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int (12t+4)dt = 6t^2 + 4t + c_1$$

$$V_a^y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y = \int -6tdt = -3t^2 + c_2$$

$$V_a^z = \frac{dz}{dt} \Rightarrow z = \int 0dt = c_3$$

A t=0 ; x=y=z=0 d'où $c_1=c_2=c_3=0$.

c) $$\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{R'} = 12\vec{i}' - 6\vec{j}' \qquad \vec{\gamma}_a = 12\vec{i} - 6\vec{j}$$

la vitesse ainsi que l'accélération d'entrainement sont nulles, c'est un mouvement relatif rectiligne uniforme.

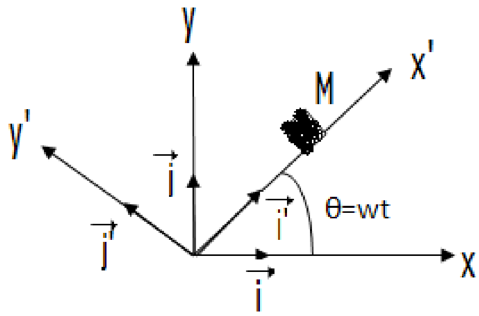
Exercice 4

Dans le plan xOy , une droite Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante Un mobile M se déplace sur la droite Ox' suivant la loi : r = a sin θ avec θ=wt et a = cte .

1. Déterminer à l'instant t en fonction de a et w, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le repère mobile x'Oy'. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

2. Déterminer à l'instant t en fonction de a et w, l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de M par leurs projections dans le repère mobile x'Oy' . En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

Solution



1- $\vec{V}_r = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R'} = aw\cos wt\,\vec{i}'$

$$\vec{V}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = w\vec{k}' \wedge \overrightarrow{OM} = aw\sin wt\,\vec{j}'$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = aw\cos wt\,\vec{i}' + aw\sin wt\,\vec{j}'$$

On écrit de la façon suivante les vecteurs unitaires

$\vec{i}' = \cos wt.\vec{i} + \sin wt.\vec{j}$ et

$\vec{j}' = -\sin wt.\vec{i} + \cos wt.\vec{j}$

Si on remplace ces expressions dans la vitesse absolue :

$$\vec{V}_a = aw\cos wt(\cos wt.\vec{i} + \sin wt.\vec{j}) + aw\sin wt(-\sin wt.\vec{i} + \cos wt.\vec{j})$$

$$\vec{V}_a = aw(\cos wt\cos wt - \sin wt\sin wt).\vec{i} + (\cos wt\sin wt. + \sin wt\cos wt.)\vec{j})$$

2- $\vec{\gamma}_r = \left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{R'} = -aw^2\sin wt\,\vec{i}'$

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -aw^2\sin wt\,\vec{i}'$$

$$\vec{\gamma}_c = 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r) = 2aw^2\cos wt\,\vec{j}'$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = -2aw^2 \sin wt\,\vec{i}' + 2aw^2 \cos wt\,\vec{j}'$$

Exercice5

Un repère R'(OX'Y') en rotation par rapport à un repère R(OXY) fixe, suivant l'axe (OZ), avec une vitesse angulaire w constante. On considère l'angle θ entre l'axe (OX) et (OX') tel que θ=wt. Soit un mobile M suivant l'axe (OX') et obéissant à la relation suivante

$\overrightarrow{OM} = ae^{-t}\vec{i}'$ (a const)

a) Déterminer la vitesse relative, d'entrainement et absolue

b) Déterminer l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue.

Solution

1- $\vec{V}_r = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R'} = -ae^{-t}\vec{i}'$

$$\vec{V}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = w\vec{k}' \wedge \overrightarrow{OM} = awe^{-t}\vec{j}'$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = -ae^{-t}\vec{i}' + awe^{-t}\vec{j}'$$

2- $\vec{\gamma}_r = \left.\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{R'} = ae^{-t}\vec{i}'$

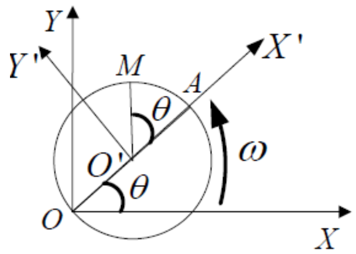
$$\vec{\gamma}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -aw^2e^{-t}\vec{i}'$$

$$\vec{\gamma}_c = 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r) = -2aw^2e^{-t}\vec{j}'$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = ae^{-t}(1 - w^2)\vec{i}' - 2awe^{-t}\vec{j}'$$

Exercice 6

Dans le plan OXY , un cercle de rayon R , de diamètre OA, tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point O. On lie à son centre mobile O' deux axes rectangulaires $O'X'Y'$ (l'axe $O'X'$ est dirigé suivant OA). A l'instant $t = 0$, A est sur OX , OX et OX' étant colinéaires. Un point M, initialement en A, parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω .



1/ Calculer directement les composantes des vecteurs vitesses et accélération de M dans le repère OXY

2/ Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de M dans le repère $O'X'Y'$ puis dans OXY.

3/ a/ Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère OXY par la loi de composition des vitesses.

b/ Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère OXY ; en déduire l'accélération complémentaire (Coriolis).

Solution

1- la méthode directe, il suffit de faire la projection du point M sur les deux axes du repère fixe R

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x = R\cos wt + R\cos 2wt \\ y = R\sin wt + R\sin 2wt \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} -Rw\sin wt - 2Rw\sin 2wt \\ Rw\cos wt + 2Rw\cos 2wt \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -Rw^2\cos wt - 2Rw^2\cos 2wt \\ -Rw^2\sin wt - 2Rw^2\sin 2wt \end{pmatrix}$$

2-la vitesse relative

$$\overrightarrow{O'M} = \begin{pmatrix} x' = R\cos wt \\ y' = R\sin wt \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \begin{pmatrix} -Rw\sin wt \\ Rw\cos wt \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -Rw^2\cos wt \\ -Rw^2\sin wt \end{pmatrix}$$

3-$\vec{V}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = w\vec{k}' \wedge \overrightarrow{O'M} = Rw\cos wt\,\vec{j}'$

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -Rw^2\cos wt\,\vec{i}'$$

$$\vec{\gamma}_c = 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r) = -2Rw^2\sin wt\,\vec{j}'$$

Dynamique

I Définition

La dynamique est l'étude des mouvements en fonction des causes qui les produisent. Ce chapitre sera consacré à la dynamique, les relations qui existent entre un mouvement et les forces qui en sont la cause

1- Quantité de mouvement

Un mouvement ne dépend pas que de la vitesse mais aussi de sa masse, deux masses différentes qui se déplacent à la même vitesse n'arrivent pas de la même façon. Pour cela on introduit une grandeur mathématique qui est la quantité de mouvement.
La quantité de mouvement par rapport au référentiel R d'un point matériel M, de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est donnée par

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2- Notion de forces

Schématiquement, une force est une cause de nature à modifier la vitesse d'un objet. Modifier la vitesse peut signifier lui communiquer une vitesse si cette dernière était initialement nulle, ou bien en faire varier soit la valeur, soit la direction, soit les deux à la fois.
Quelle que soit leur nature, et quelle que soit la façon dont elles se manifestent (à distance ou au contact de deux corps), les forces (par exemple le poids d'un corps) sont des grandeurs vectorielle. Il faut donc, à chaque fois que l'on considère une force, rechercher
:
— la droite d'action (la direction),
— le sens,
— le point d'application,
— l'intensité.

• La droite d'action

Si une force s'exerce, par exemple, par l'intermédiaire d'un fil tendu, la droite d'action de la force est celle que matérialise le fil. De même, si une force est transmise par une tige rigide, cette tige matérialise la droite d'action de la force.

• Le sens

Le sens d'une force est celui du mouvement qu'elle tend à produire ; si force et mouvement sont dans le même sens la force est dite *motrice* ; dans le cas contraire, la force est dite *résistante*.

Par exemple, les forces de frottement sont des forces résistantes.

II) Loi fondamentale de la dynamique.

1) Principe d'inertie.

Dans un repère R Galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé, est soit au repos ou en mouvement rectiligne uniforme. C'est la première loi de Newton (principe d'inertie).

2) Principe fondamentale de la dynamique.

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un point *M* de masse *m* et son accélération sont liées par

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

A l'échèle macroscopique la masse ne varie pas en fonction du temps donc sa dérivée est nulle, pour cela la force se réduit alors à :

$$\vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

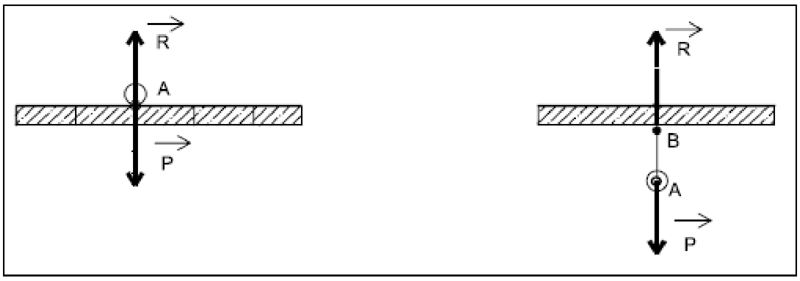
L'accélération d'un point matériel M en mouvement est proportionnelle à la résultante des forces qui s'exercent sur lui et inversement proportionnelle à sa masse : C'est la deuxième loi de Newton.

3) Action réaction

Considérons une masse ponctuelle quelconque ; celle-ci est en équilibre :

— soit si elle n'est soumise à aucune action (ou force) ;

— soit si la somme des actions (ou forces) qui lui sont appliquées est nulle. Ainsi, une petite boule placée sur un sol horizontal reste en équilibre parce que le sol exerce sur la petite surface de contact qu'il a avec cette boule une réaction R égale et opposée au poids de la boule



De même, une boule A attachée en B par un fil, exerce sur le point d'attache B une action dirigée vers le bas, égale au poids P de la boule (si l'on néglige le poids du fil). Il y aura équilibre si l'attache B maintient une réaction R égale et opposée au poids P de la boule. Remarquez au passage que l'égalité s'établit bien ici entre vecteurs glissants, les origines étant différentes, mais le support étant évidemment le même.

III Interactions fondamentales

Malgré leur grande diversité, les forces rencontrées dans la nature sont les manifestations des quatre interactions fondamentales :

- **l'interaction gravitationnelle :** elle se manifeste par une force d'attraction entre toutes les particules. Cette force apparaît dans la plupart des phénomènes décrits par l'astronomie et la géologie (le mouvement des astres, la montée des marées ; les corps attirés par la Terre en son voisinage, la non désagrégation de la Terre …).

- **l'interaction électromagnétique :** elle se manifeste entre les charges électriques dans tous les phénomènes faisant intervenir l'électricité et/ou le magnétisme.

- **l'interaction forte :** c'est l'interaction qui s'exerce entre les nucléons qui sont les constituants du noyau d'un atome. Elle permet aux particules composées de quarks, comme les protons et les neutrons, de ne pas se désagréger. Elle s'exerce à très courte distance et est responsable de la cohésion du noyau.
- **l'interaction faible :** elle s'applique à toutes les particules de matière (quarks, électrons, neutrinos, etc...). En particulier, les neutrinos, qui sont électriquement neutres et qui ne sont pas des quarks, ne sont sensibles qu'aux interactions faible et gravitationnelle. L'interaction faible se manifeste dans certains types de réactions nucléaires telles que la radioactivité.

Nous avons déjà vu qu'une force peut être représentée par un vecteur associé à un point correspondant au point d'application.

L'application des lois de la mécanique nécessite de faire un bon bilan de forces s'exerçant sur un système c'est-à-dire ne pas oublier une force ou ne pas en rajouter. Pour cela il faut que le système soit clairement défini pour pouvoir ensuite répertorier les forces que l'extérieur exerce sur lui.

Il existe deux types de forces :

* Forces d'interaction à distance (l'acteur et le receveur ne sont pas en contact) : exemples: les forces de gravitation, les forces électromagnétiques, les forces nucléaires de cohésion.
* Forces de contact: les forces de frottement et de tension

Force d'interaction gravitationnelle

C'est une force d'interaction à distance. Elle s'exerce entre deux masses. Elle a été énoncée par Newton en 1650.

Soit une masse M au point O en interaction avec une autre de masse m au point P, telle que la distance entre O et P est égale à r, s'érit :

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\overrightarrow{u_{op}}$$

$G=6.6710^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

Cette force peut s'écrire

$$\vec{F} = -m\vec{g}(p)$$

$$\vec{g} = G\frac{M}{r^2}\overrightarrow{u_{op}}$$

Cette dernière expression est appelée champ de gravitation crée par m en tout point P de l'espace. Elle a la même dimension qu'une accélération.

Champ de gravitation de la terre en un point P de l'espace situé à l'extérieur de la terre ce champ a pour expression :

$$\boxed{\vec{g} = G\frac{M}{(R_T + r)^2}\overrightarrow{u_{op}}}$$

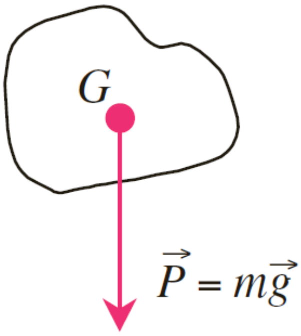
- M masse de la terre : M=5.98 10^{24} kg
- R_T rayon de la Terre = 6.37 10^6m
- r Représente l'altitude du point P par rapport à la surface de la terre.

Ce champ à la surface de la terre aura la valeur de $\mathbf{g_0=9.83}$

Poids d'une masse

Soit une masse ponctuelle m, en interaction gravitationnelle avec la terre. Cette dernière agit sur la masse avec une force qu'on appelle poids de la masse et qui a pour expression

$$\vec{p} = m\vec{g}$$

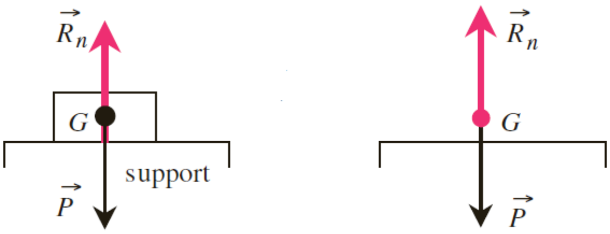


b) les forces de contact

il s'agit des force qui ont lieu une fois le contact établie. On peut citer quelques une.

- **Réaction d'un support**

Action d'un support sur lequel repose le système et qui l'empêche de s'enfoncer. Cette action est souvent appelée réaction du support.
Considérons un solide posé sur un support horizontal.



L'action de la surface est d'empêcher la masse de s'enfoncer vers le bas sous l'action de son poids. Cette action qui est une réaction de la surface sur la masse est en équilibre avec le poids, d'où l'immobilitée de la masse.

$$\vec{P} + \vec{R}_n = m.\vec{a} = \vec{0}$$

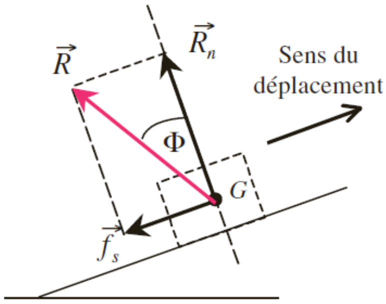
- Forces de frottements solides

  Ils correspondent à l'action d'un solide en contact avec le système étudié. Dans le cas d'une masse sur un support non lisse c'est-à-dire l'existence des forces de frottement, la réaction du support se décompose en :

- Une réaction normale au support $\overrightarrow{R_n}$ qui empêche le solide de s'enfoncer.
- Une force $\overrightarrow{f}_{sc}$ (frottement cinétique, c'est la valeur maximale insuffisante pour maintenir l'équilibre) ou $\overrightarrow{f}_{ss}$ (frottement statique) parallèle à la surface du support, résultantes des forces de frottement.

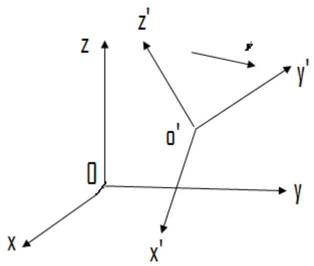
$$\mu_c = \frac{f_{sc}}{R_n}$$

μ_c est le coefficient de frottement cinétique. Il dépend de la nature des surfaces en contact.



D'après la représentation des forces le coefficient $\mu_c = tg\Phi$

<u>Principe fondamental de la dynamique PFD dans un référentiel non Galiléen</u>



On suppose un mobile de masse m en mouvement dans un repère R'(o',x',y',z'), lui-même en mouvement par rapport à un repère R(o,x,y,z) fixe.

En appliquant le PFD dans le repère absolu on aura :

$$\sum \vec{F} = m\overrightarrow{\gamma_a} \Rightarrow \vec{F} = m\overrightarrow{\gamma_r} + m\overrightarrow{\gamma_e} + m\overrightarrow{\gamma_c}$$

Si on cherche à appliquer le PFD dans le repère relatif on aura

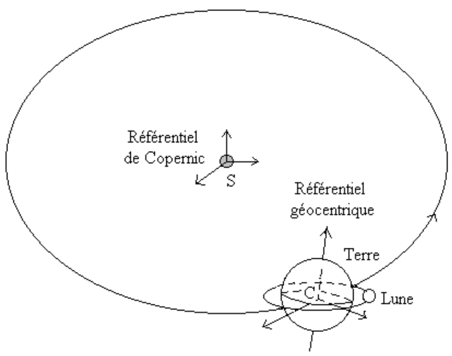
$$m\overrightarrow{\gamma_r} = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{\gamma_e} - m\overrightarrow{\gamma_c}$$

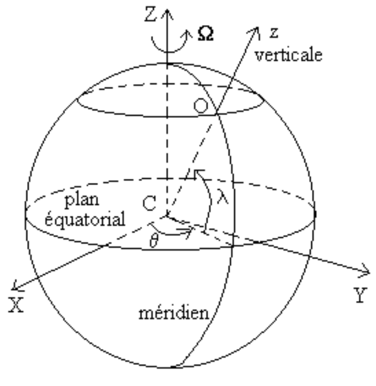
Le principe fondamental de la dynamique reste valable dans les repère non galiléens à condition d'ajouter la force d'entrainement $\overrightarrow{F_e} = m\overrightarrow{\gamma_e}$ et la force de coriolis $\overrightarrow{F_c} = m\overrightarrow{\gamma_c}$ aux forces $\vec{F}$ qui agissent sur le mobile pour le mettre en mouvement.

Référentiel géocentrique : a, pour origine, le centre de masse de la Terre; ses directions sont fixes par rapport aux direction du référentiel de Copernic; Le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel de Copernic; cette translation est, en première approximation à "intensité de vitesse uniforme" puisque l'orbite de la Terre dans le référentiel de Copernic est, en première approximation, "circulaire". Cette translation n'est pas à "vecteur vitesse uniforme", le référentiel géocentrique n'est pas "galiléen".

Le référentiel terrestre a pour origine le point O définissant le lieu, ses directions sont la direction verticale CO et deux directions perpendiculaires dans le plan horizontal (pour certains problèmes, les directions définies par le méridien et le parallaxe sont commodes). Ce référentiel à une vitesse de rotation (rotation propre de la Terre) $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ par rapport au référentiel géocentrique ou au référentiel de Copernic.

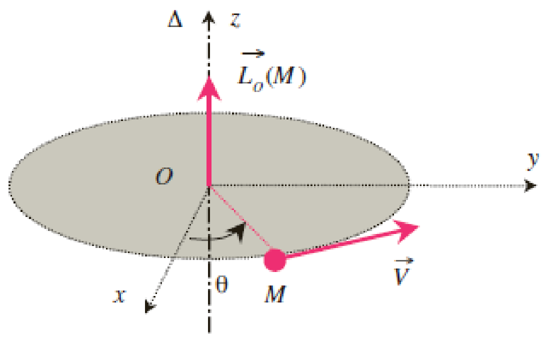
Dans le référentiel terrestre, l'équation de la





IV- Moment cinétique

1- Définition



Un mouvement curviligne d'une masse dépend en plus d'une force, de son rayon de courbure. Cette force est maximale si elle est appliquée perpendiculairement au rayon de courbure. On introduit une grandeur mathématique qui prend en considération ces informations qu'on nomme Moment cinétique.

Le moment cinétique au point O du point matériel M dans le référentiel R est :

$$\vec{L}_0(M)_R = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

2- Théorème du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen R, le théorème du moment cinétique peut être appliqué :

On dérive $\vec{L}$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_0} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_0} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}$$

Avec $\vec{\gamma}$ le vecteur accélération de M.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au point M :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

La dérivée du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point fixe O dans un référentiel galiléen est égale à la somme des moments par rapport au même point O des forces extérieures appliquées au point M.

3- Mouvements à force centrale conservative

On considère un point matériel de masse *m* soumis à une force centrale conservative de centre O, *point fixe* d'un référentiel galiléen. Rappelons qu'une force est dite *centrale* quand, à chaque instant, la droite support de cette force passe constamment par un point fixe O. Si l'on considère un système de coordonnées sphériques d'origine O on peut écrire la force en un point M :

$$\vec{f} = f(r,\theta,\varphi)\vec{v}$$

Force de gravitation entre un astre fixe (massif) à symétrie sphérique de masse *M* et un astre mobile à symétrie sphérique de masse *en est une force centrale.*

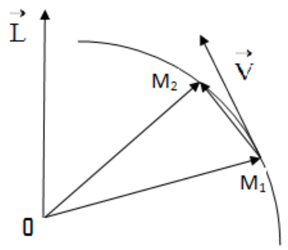
$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_0} = r\overrightarrow{u_r} \wedge f(r)\overrightarrow{u_r} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{L_0}(M) = \overrightarrow{Cons\tan t}$$

1. Le mouvement est plan.
2. En coordonnées polaires, la conservation du moment cinétique se traduit par la relation

$$r^2\dot{\theta} = C$$

où C est la constante des aires déterminée par les conditions initiales.

3. Loi des aires : si on considère un mouvement sous l'effet d'une force centrale du point M_1



au Point M_2, puisque $dS = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{M_1M_2}\right|$ c'est l'aire d'un triangle formé par les deux vecteurs.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OM_1} \wedge \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right|$$

l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ par unité de temps est constante et égale à $\frac{C}{2}$(vitesse aréolaire) : $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$

Exercices

Exercice1

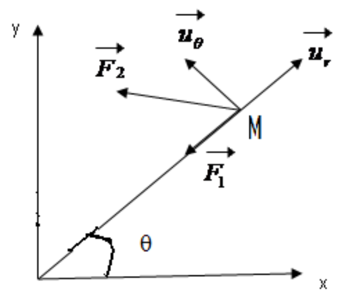
Une masse m est en mouvement dans un plan (xoy) sous l'effet de deux forces $\overrightarrow{F}_1 = -\overrightarrow{OM}$ et une autre force $\overrightarrow{F}_2 = -2m\vec{v}$, figure.

1- en utilisant la base polaire et le Principe fondamental de la dynamique, montrer que l'équation horaire du mouvement est donnée par $r = ae^{-t}$ (on suppose que θ=wt, et à t=0 r=a, a et w sont constant).

2- en utilisant le théorème du moment cinétique, retrouver l'expression $r = ae^{-t}$

Solution

1- La masse est soumise à deux forces F_1 et F_2



Si On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = m\vec{\gamma}$$

si on choisit la base de polaire, il faut projeter cette équation sur cette base pour cela

il faut écrire les forces dans la base polaire.

$$\overrightarrow{F_1} = -r\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{F_2} = -2m(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u_\theta}$$

Avec $\dot{\theta} = w \ldots\ldots et \ldots\ldots\ddot{\theta} = 0$

L'équation radiale sur $\vec{u_r}$: $r - 2mr = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \Rightarrow \frac{r}{m} - 2r = \ddot{r} - r\dot{w}^2$ (1)

L'équation ortho-radiale (angulaire) sur $\vec{u_\theta}$: $-2mr\dot{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \Rightarrow r = \dot{r}$ (2)

De l'équation (2) on en déduit

$$-r = \frac{dr}{dt} \Rightarrow -dt = \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln r = -t + cst \Rightarrow r = Ae^{-t}$$

Sachant qu'à t=0 r=a donc la constante A=a donc :

$$\boxed{r = ae^{-t}}$$

2- En utilisant le théorème du moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\vec{L_0} = \sum \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{L_0} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u_r} \wedge m(r\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L_0} = 2mwr\frac{dr}{dt}\vec{k} \qquad (3)$$

comme on a deux forces donc on aura deux moments de force.

$$\vec{OM} \wedge \vec{F_1} = r\vec{u_r} \wedge \left(r\vec{u_r}\right) = \vec{0} \qquad (4)$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_2} = r\overrightarrow{u_r} \wedge \left(-2m(r\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) \right) = -2mwr^2\vec{k} \qquad (5)$$

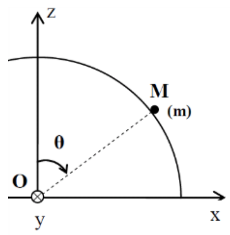
Donc en égalisant l'équation (3) avec la somme des équations (4) et (5) on aura

$$2mwr\frac{dr}{dt} = 0 - 2mwr^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -r$$

On retrouve bien l'équation différentielle qui a été trouver à la $1^{ère}$ question.

Exercice 2

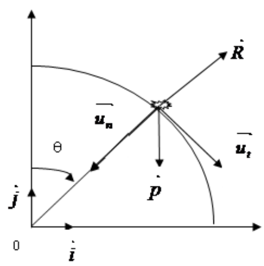
Une masse m glisse à partir d'un point A et sans vitesse initial sur une surface formée par une sphère de rayon a et de centre O on négligera les frottements.



a) En utilisant les coordonnées FRENET et le Principe fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse de la masse m puis déduire l'expression de la réaction R de la surface sur la masse, est il possible que m quitte la surface.

b) En utilisant le théorème du moment cinétique et les coordonnées intrinsèques (base de Frenet) l'expression de la vitesse de la masse m

Solution



La masse est soumise à deux forces son poids et la réaction du support

a) On applique le principe fondamental de la dynamique :

$\vec{P}+\vec{R}=m\vec{\gamma}$ si on choisi la base de Frenet, il faut projeter cette équation sur cette base

$$\vec{P}=mg\sin\theta\vec{u_t}+mg\cos\theta\vec{u_n}$$

$\vec{R}=-R\vec{u_n}$

$$\vec{\gamma}=m\frac{dv}{dt}\vec{u_t}+\frac{v^2}{a}\vec{u_n}$$

L'équation tangentielle sera : $mg\sin\theta=m\frac{dv}{dt}\Rightarrow g\sin\theta=\frac{dv}{dt}$ (1)

L'équation normale sera : $mg\cos\theta-R=m\frac{v^2}{a}\Rightarrow g\cos\theta-\frac{R}{m}=\frac{v^2}{a}$ (2)

De l'équation (1) on déduit l'expression de la vitesse

$$\frac{dv}{dt}=g\sin\theta\Rightarrow\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=g\sin\theta \quad \text{avec} \quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{v}{a}$$

$$\frac{v}{a}\frac{dv}{d\theta}=g\sin\theta\Rightarrow vdv=ag\sin\theta d\theta$$

$$\int_0^v vdv=\int_0^\theta ag\sin\theta d\theta\Rightarrow\frac{v^2}{2}=-g\cos\theta\Big|_0^\theta$$

Donc $v=\sqrt{2ag(1-\cos\theta)}$.

Détermination de la réaction :

R=mg(3cosθ-2)

- la masse quitte la surface pour R=0 cosθ=2/3 d'où θ=48°.

b) En utilisant le théorème du moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_0} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Puisque on a deux forces donc on aura deux moments de force celui du poids et celui de la réaction.

$$\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = -a\overrightarrow{u_n} \wedge mv\overrightarrow{u_t} = amv\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_0} = am\frac{dv}{dt}\vec{k}$$

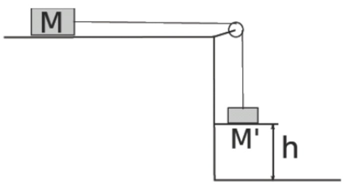
$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -a\overrightarrow{u_n} \wedge \left(mg\sin\theta\overrightarrow{u_t} + mg\cos\theta\overrightarrow{u_n}\right) = amg\sin\theta\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = -a\overrightarrow{u_n} \wedge \left(R\overrightarrow{u_n}\right) = \vec{0}$$

Donc on aura $g\sin\theta = \dfrac{dv}{dt}$

Exercice 3

Deux corps M et M’ de masse m et m’ respectivement, sont reliés par un fil inextensible passant par la gorge d’une poulie de masse négligeable. Initialement le corps M’ se trouve à une hauteur h du sol, il est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre le corps M et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_s et glissement μ_g. . $\mu_s = 0.6$, $\mu_g = 0.4$, m = 6 kg, h = 1.5 m et g = 10 m/s²



1- Donner l’expression de la masse m’min pour que le système se mette en mouvement, en fonction de m et µs.

2- On prend maintenant un masse m’= 4 kg, le système se met en mouvement. En considérant les deux phases du mouvement de la masse M jusqu’à son arrêt:

a- Quelle est la nature du mouvement de la masse M. Justifier.

b- Calculer l’accélération dans la première phase.

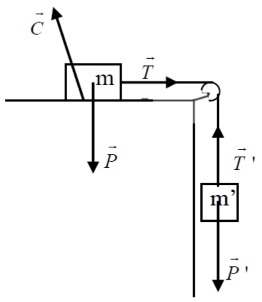
c- Déduire la vitesse à la fin de cette phase.

d- Calculer l’accélération dans la deuxième phase

e- Déduire la distance totale D parcourue par la masse M.

Solution

1- A l’équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$



Les forces sur la masse M’ : $\vec{P'} + \vec{T'} = \vec{0}$ $\qquad P' - T' = 0$

Sur la masse M $\quad \vec{P} + \vec{T} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \begin{matrix} T - C_x = 0 \\ C_y - P = 0 \end{matrix}$ $\qquad$ comme T=T’

Alors $P' = C_x$ et $C_x = \mu_s C_y = \mu_s mg \Rightarrow m' = \mu_s m = 3.6kg$

2- On a deux étapes

- Durant la première étape les forces sont constantes, l’accélération est constante et la vitesse augmente, il s’agit d’un mouvement uniformément accéléré.

on applique le principe fondamental de la dynamique.

sur la masse M’ $\quad \vec{P'} + \vec{T'} = m'\vec{\gamma_1} \Rightarrow P' - T' = m'\gamma_1$

Sur la masse M $\quad \vec{P} + \vec{T} + \vec{C} = m\vec{\gamma_1} \Rightarrow \left[\begin{matrix} T - C_x = m\gamma_1 \\ \hline C_y - P = 0 \end{matrix} \right]$

$$P^{''} - C_x = (m + m^{'})\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\left(m^{'} - \mu_g m\right)}{m + m^{'}} g = 1.6 m/s^2$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2\gamma_1 h \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = 2.2 {m}/{s}$$

- Durant la deuxième étape avec la présence des frottements et l'absence de la masse M', la vitesse diminue donc un mouvement uniformément retardé.

$$\vec{P} + \vec{C} = m\overrightarrow{\gamma_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} -C_x = m\gamma_2 \\ \hline C_y - P = 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow -\mu_g mg = m\gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 = -\mu_g g$$

La distance parcourue durant la deuxième phase est :

$$0 - v_1^2 = 2\gamma_2 D_2 \Rightarrow D_2 = \frac{v_1^2}{2\gamma_2} = 0.6m$$

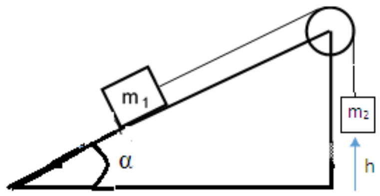
Donc la distance totale

D=1.5+0.6=2.1m

Exercice3

Deux masses m_1 et m_2 sont liées par un fil inextensible qui passe par une poulie de masse négligeable et d'axe fixe. La masse m_1 glisse sur un plan incliné non lisse qui fait un angle **$\alpha = 30°$** par rapport à l'horizontale (figure) sachant que les coefficients de frottements statique et dynamique sont respectivement $\mu_s = 0{,}7$ $\mu_d = 0{,}3$. On prendra g = 9,8 m/s, m_1=1kg.

1- calculer la masse minimale de m_{2min} qui maintient le système en équilibre.

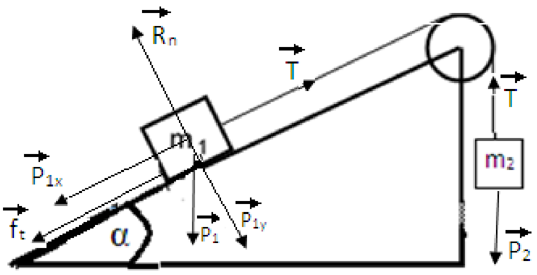


2- On prend, maintenant la masse $m_2 = 1{,}5$ kg. Elle est lâchée, sans vitesse initiale, d'une hauteur h durant un temps de 2 secondes.

a) Calculer les accélérations prises par les deux masses.

b) Calculer la hauteur h. Déduire les vitesses des deux masses lorsque la masse m_2 heurte le sol.

Solution



On applique le principe fondamental de la dynamique

Sur la masse M1

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R_n}+\vec{f_t}=\vec{0}\Rightarrow \quad \text{0.5 pt} \qquad \begin{aligned} &T-m_1 g\sin\alpha-f_t=0\\ &R_n-m_1 g\cos\alpha=0\end{aligned}$$

Sur la masse M2 : $\vec{P_2}'+\vec{T}'=\vec{0}$ $\qquad m_2 g'-T'=0 \qquad m_2 g'=T$

Avec $P_1\cos\alpha=R_n$ et $m_2 g'=T$

et $f_t=\mu_s R_n=\mu_s m_1\cos\alpha.g$

$$\Rightarrow m_{2\min}=m_1(\mu_s\cos\alpha+\sin\alpha)=1.1kg$$

2-

a- puisque $m_2 > m_{2min}$ le mouvement se fait dans le sens de m_2

on applique le principe fondamental de la dynamique.

Les forces sur la masse M2 : $\vec{P_2}' + \vec{T}' = m_2 \vec{\gamma}$ $\qquad m_2 g' - T' = m_2 \gamma$

Sur la m_1 $\quad \vec{P} + \vec{T} + \vec{R_n} + \vec{f_t} = m_1 \vec{\gamma} \Rightarrow \begin{matrix} T - m_1 g \sin\alpha - f_t = m_1 \gamma \\ R_n - m_1 g \cos\alpha = 0 \end{matrix}$

$P_1 \cos\alpha = R_n \qquad f_t = \mu_s R_n = \mu_s m_1 \cos\alpha . g$

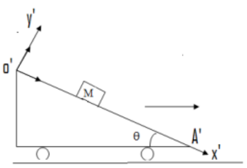
alors $\gamma = \dfrac{m_2 - m_1 \sin\alpha - \mu_d m_1 \cos\alpha}{m_2 + m_1} g = 2.91 m/s^2$

b- $h = \dfrac{1}{2} \gamma t^2 = 5.83 m$

$v = \gamma t = 2.91 m/s$

Exercice5

Chariot au repos, son toit O'A' est incliné de l'horizontale avec un angle θ. Il se déplace sur l'horizontale avec une accélération constante γ_0. On lâche sur le toit de ce chariot à partir du point O' une masse M sans vitesse initiale. On néglige les frottements, soit le repère R' du chariot.

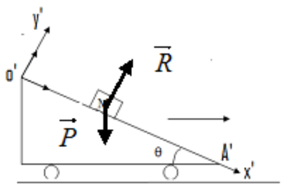


1- trouver l'accélération de la masse M par rapport au repère R' ? qu'est ce qu'elle représente ?

2- déduire la vitesse de M dans le repère R' ? et la nature du mouvement ?

3- déterminer la réaction du toit sur la masse M ?

Solution



- R' est mobile

Le principe fondamentale de la dynamique dans le repère mobile R' donne

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F_e}+\vec{F_c}=m\vec{\gamma_r}$ le repère

$\vec{F_c}$: force de coriolis qui est nulle.

$\vec{F_e}=-m\vec{\gamma_e}=-m\vec{\gamma_0}$ c'est la force d'entrainement

$\vec{P}+\vec{R}+-m\vec{\gamma_0}=m\vec{\gamma_r}$ si on projet sur l'axe o'x' on aura

$mg\sin\theta-m\gamma_0\cos\theta=m\gamma_r$ donc $\gamma_r=g\sin\theta-\gamma_0\cos\theta$

2- V_r ?

$$dV_r=\gamma_r dt\Rightarrow\int_0^{V_r}dV_r=\int_0^t\gamma_r dt\Rightarrow V_r=(g\sin\theta-\gamma_0\cos\theta)t$$

3- $dx'=V_r dt\Rightarrow\int_0^{x'}dx'=\int_0^t V_r dt\Rightarrow x'=\frac{1}{2}(g\sin\theta-\gamma_0\cos\theta)t^2$ c'est un mouvement rectiligne uniformément variable suivant o'A'.

Si on applique la projection sur l'axe des ordonnées

$-p\cos\theta+R-m\gamma_0\sin\theta=0\Rightarrow R=m(\gamma_0\sin\theta+g\cos\theta)$

Travail et énergie

I Le travail d'une force.

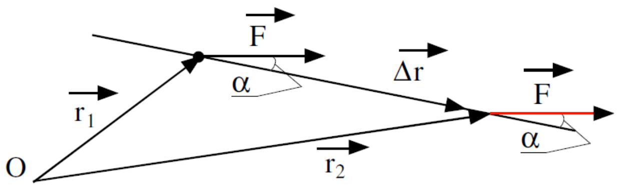
1- définition

Le travail d'une force mesure l'effort a faire pour déplacer un objet le long d'un trajet qui peut-être horizontal ou pas, rectiligne ou pas. Un travail peut être positif auquel cas, on parlera de travail moteur, car un moteur peut très bien effectuer cet effort de déplacement. A l'opposé, un travail peut être négatif, on parle de travail résistant car il s'oppose au déplacement, c'est le cas des forces de frottements.

1) Cas d'une force constante et d'un déplacement rectiligne. Un point matériel, soumis à une force F constante en module et en direction, se meut d'un point $\vec{r}_1$ a un point $\vec{r}_2$. Son déplacement est donc

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Durant ce déplacement, la force F exerce un travail



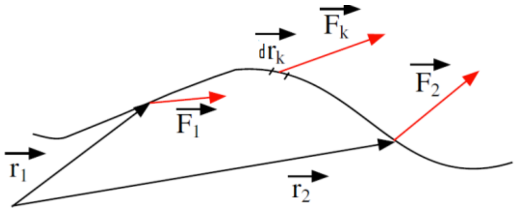
$$W_{12} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\alpha$$

Ce travail peur être positif, négatif ou nul, ça dépend du signe de cos α :

- cos α >0 c'est un travail moteur.
- cos α <0 travail résistant
- cos α =0 travail nul

2- Travail élémentaire

Dans le cas ou la force F est variable et un déplacement quelconque. On calcul le travail de cette force pour un déplacement infinitésimale $\overrightarrow{dr}$ rectiligne, on parle du travail élémentaire dW défini par



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

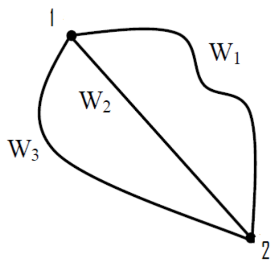
Pour trouver le travail total entre le premier point et le deuxième, on intègre cette dernière équation.

$$W_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

Si on veut utiliser les coordonnées cartésiennes, on exprime la force et le déplacement dans ce système, pour cela on aura :

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \qquad\qquad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$w_{1-2} = \int_1^2 F_x dx + F_y dy + F_z dz$$



Le calcul du travail nécessite de connaitre le chemin suivi entre les deux points. Pour chaque chemin on trouve un travail. En général le travail dépend du chemin suivi.

II L'énergie cinétique.

Une autre technique pour l'analyse du mouvement consiste en l'utilisation de l'énergie. Cependant, l'énergie apparait dans des formes tellement diverses qu'une définition claire est a priori difficile. Techniquement, on peut dire que l'énergie est une grandeur scalaire associée à un état du (ou des) points matériels(s).
L'énergie cinétique d'un point matériel est l'´energie qu'il possède en vertu de son mouvement.

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique dans un référentiel R :

$$dT = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\vec{v}d\vec{v} = m\vec{v}\vec{a}dt = m\vec{a}d\vec{r}$$

$$dT = m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} \underbrace{=}_{2è\ loi\ de\ Newton} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \delta W$$

$$\boxed{dT = \delta W}$$

En intégrant cette équation on aura

$$\int_A^B dT = W_{A-B}(\sum \vec{F}) \Rightarrow T_B - T_A = \sum W_{A-B}(\overline{F})$$

Théorème : dans un référentiel d'inertie, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale au travail de la force qui s'exerce sur le point.

III Energie potentielle

Une force F est une *force a circulation conservative* si elle ne dépend que de la position et si le travail de cette force entre deux points quelconques A et B ne dépend que des points A et B et non du chemin suivi entre A et B.

Soit une force F qui dérive d'une fonction scalaire à trois variables (x,y,z)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\Phi$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}$$

Le travail de cette force s'écrit

$$dW = \vec{F}.\vec{dr} = -\overrightarrow{grad}\Phi.\vec{dr} = -d\Phi \qquad \text{avec} \qquad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Si on veut trouver le travail d'un point A à B

On aura

$$W_{A-B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = -\int_A^B (d\Phi) = \Phi_A - \Phi_B$$

On remarque que cette fonction a la même dimension que le travail, on en conclu que c'est une énergie, comme elle dépend de la position (x,y,z) c'est l'énergie potentielle

$\Phi = E_p$ et la force s'écrit $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p(x,y,z)$ on parle d'une force qui dérive d'un potentiel E_{p}.

Une force est conservatrice vérifiée une des trois conditions

- son travail ne dépend pas du chemin suivi
- elle dérive d'un potentiel $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p(x,y,z)$
- $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$

Enoncé du théorème de l'énergie potentielle : Soit un déplacement d'un point A à un point B. Le travail des forces conservatrices est égal à la différence entre l'énergie potentielle de la position initiale et la position finale

$$W_{A-B} = E_A - E_B$$

IV énergie totale

Soit un déplacement d'un point A vers un point B sous l'action des forces. En appliquant les deux théorèmes de l'énergie cinétique et potentielle, il découle les conséquences suivantes :

$$T_B - T_A = \sum W_{A-B}(\overline{F}) = W_{A-B}(\vec{F}_{conservatrice} + \vec{F}_{non-conservatrice})$$

$$W_{A-B}(\vec{F}_{conservatice}) = E_A - E_B$$

En manipulant ces deux équations on trouve :

$$W_{A-B}(\vec{F}_{conservatrice}) = E_A - E_B = T_B - T_A - W_{A-B}(\vec{F}_{non-conservatrice})$$

$$\Rightarrow (E_B + T_B) - (E_A + T_A) = W_{A-B}(\vec{F}_{non-conservatice})$$

Il s'agit de l'énergie totale ou mécanique, qui est égale à la somme de l'énergie potentielle et cinétique.

$$\boxed{E_M = E_T = E_p + T}$$

.

Le théorème de l'énergie totale est :

La variation de l'énergie totale entre un point finale et un point initial est égale au travail des forces non-conservatrices. On parle de la non conservation de l'énergie. Dans le cas ou on n'a que les forces conservatrices, l'énergie se conserve, l'énergie totale de l'état initial est égale à l'énergie totale de l'état final.

$$\boxed{W_{A-B}(\vec{F}_{non-conservatice}) = E_M(B) - E_M(A) = \Delta E_M}$$

Exercice

Exercice 1

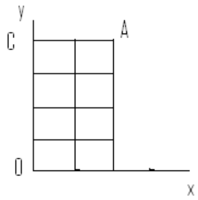
Soit un point matériel M soumis à un champ de force $\vec{F}$ $\vec{F}$ =(x-ay) $\vec{i}$ +(3y-2x) $\vec{j}$

a-Calculer le travail de la force $\vec{F}$ pour le déplacement de M du point O(0,0) au point A(2,4) en passant par le point C(0,4).

b-Trouver la valeur de a pour que $\vec{F}$ soit conservatrice, en déduire l'énergie potentielle Ep résultante de ce champ de force.

c-Déterminer le travail de $\vec{F}$ pour le déplacement de M suivant une trajectoire circulaire de rayon R et de centre O(0,0).

Solution



a- $\vec{F}$ =(x-ay) $\vec{i}$ +(3y-2x) $\vec{j}$

$$dw = \vec{F}\,\vec{dr} = F_x dx + F_y dy = (x-ay)dx + (3y-2x)dy$$

$$w_{OCA} = w_{OC} + w_{CA}$$

Le chemin de O à C (x=0 dx=0, y varie de 0 à 4) $w_{OC} = \int_0^4 3y dy = \left.\frac{3y^2}{2}\right|_0^4 = 24\,j$

Le chemin de O à C (x varie de 0 à 2, y=4 dy =0) $w_{CA} = \int_0^2 (x-4a)dx = \left.\frac{x^2}{2} - 4ax\right|_0^2 = (2-8a)\,j$

Donc $w_{OCA} = 26 - 8a$.

b- pour que la force soit conservatrice elle doit vérifier $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$

d'où $$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (x-4a) & (3y-2x) & 0 \end{vmatrix} = (-2+a)\vec{k} = \vec{0}$$

C'est-à-dire que a=2

c- $\vec{F}$ =(x-2y) $\vec{i}$ +(3y-2x) $\vec{j}$ qui est une force conservatrice. Donc c'est une fonction qui dérive d'un potentiel E_p

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p(x,y) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -(x-2y) \quad (1) \qquad \text{et} \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = -(3y-2x) \quad (2)$$

De la l'éq (1) $$E_p = -\int (x-2y)dx = -\frac{x^2}{2} + 2yx + C(y)$$

De l'éq (2) $$\frac{\partial E_p}{\partial y} = 2x + \frac{\partial C(y)}{\partial y} = -(3y-2x) \Rightarrow C(y) = -\frac{3y^2}{2} + C$$

Donc $$E_p(x,y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + 2yx + C$$

Exercice 2

Calculer le travail de la force $\vec{F}$ =(x^2+y^2)$\vec{i}$ +(xz)$\vec{j}$ +(xy)$\vec{k}$ qui fait passer un corps de l'origine O(0,0,0) au point M(1,1,0) suivant deux chemins différents. a- suivant le trajet OM_1M_2M tel que M_1(1,0,0) et M_2(1,1,0) b- suivant une courbe d'équation horaire (x=t, y=t² et z=1) .

Exercice 3

Soit la force $\vec{F}$ =2xz$\vec{i}$ +yz $\vec{j}$ +($ax^2+by^2+cz^2$)$\vec{k}$.

a) Trouver les constantes a,b et c pour que F soit conservatrice , sachant qu'au point (1,1,1) la force $\vec{F}$ =2$\vec{i}$ + $\vec{j}$ -3$\vec{k}$

b) Déduire le potentiel Ep(x,y,z)

Solution

a)

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (2xz) & (yz) & (ax^2+by^2+cz^2) \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{rot}\vec{F} = (2by - y)\vec{i} - (2ax - 2x)\vec{j} = \vec{0}$ (*)

et $\vec{F}$(1,1,1) =2$\vec{i}$ + $\vec{j}$ +(a+b+c)$\vec{k}$ =2$\vec{i}$ + $\vec{j}$ -3$\vec{k}$ (**)

de éq (*) on aura 2by-y=0 donc b=1/2, 2ax-2x=0 donc x=1

et de l'éq (**) on aura a+b+c=-3 donc c=-9/2

$\vec{F}$ =2xz$\vec{i}$ +yz $\vec{j}$ +($x^2+(1/2)y^2-(9/2)z^2$)$\vec{k}$

b)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p(x,y,z) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -(2xz)$ (1) et $\frac{\partial E_p}{\partial y} = -(yz)$ (2) $\frac{\partial E_p}{\partial z} = -(x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{2}z^2)$ (3)

De l'éq (1) $E_p = -\int (2xz)dx = -2zx^2 + C(y,z)$

De l'éq (2) $\frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = -(yz) \Rightarrow C(y,z) = -\frac{y^2 z}{2} + D(z)$

En remplaçant l'expression de C(y,z) dans E_p et en utilisant l'équation (3). On aura

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = -2x^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{\partial D(z)}{\partial z} = -(x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{2}z^2) \Rightarrow D(z) = \int (x^2 - \frac{9}{2}z^2)dz = x^2 z - \frac{9}{4}z^3 + C$$

Exercice 4

La particule se déplace du point (0,−1,0) au point (0,+1,0) sur un rail sans frottement sous l'action d'une force ***F*** (en plus d'une certaine force de contrainte). Trouver le travail W de la force ***F*** si le rail est

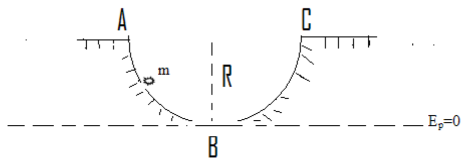
(a) Rectiligne suivant l'axe y.

(b) Circulaire dans le plan yz. Est-ce une force conservative ?

Exercice 5

une masse m glisse sans vitesse initiale d'un point A dans un demi cercle de rayon R figure.

I - Si on néglige les frottements :



1- Est-ce que l'énergie total (mécanique) de la masse se conserve durant sont mouvement ?

2- déterminer sa vitesse au point B.

3- A quelle hauteur h_1 la masse atteint ?

II- si on a la présence de frottements sur l'arc AB et la vitesse de la masse au point B vaut $\sqrt{gR}$, calculer le travail des forces de frottements. A quelle hauteur h_2 la masse atteint si l'arc BC est lisse (pas de frottements).

III- si on suppose qu'on se trouve dans le $2^{ème}$ cas, et la masse m démarre avec une vitesse initiale V_0. On remarque qu'elle arrive au point C avec une vitesse nulle.

- déterminer le travail de la force de frottement. Calculer la vitesse de la masse au point B.

Solution

I) 1- puisque que la masse n'est soumise qu'a son poids $\vec{P}$ et la réaction du support sur la masse $\vec{R}$

$w(\vec{R}) = 0$ par ce que la $\vec{R}$ est perpendiculaire au déplacement.

Comme le poids est une force qui dérive d'un potentiel alors

$E_T(A) = E_T(B)$

2- $E_P(A) + T(A) = E_p(B) + T(B)$

$$mgR + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad \Rightarrow v_B = \sqrt{2gR}$$

c- $E_T(B) = E_T(D) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2}v_B^2 = R$ donc la masse atteint le point C.

II- le chemin AB n'est pas lisse donc présence des forces de frottements $\vec{f}$ et l'énergie totale ne se conserve pas

$$W_{A-B}(\vec{f}) = E_M(B) - E_M(A) = \Delta E_M$$

$$w_{A-B}(\vec{f}) = \frac{1}{2}m(\sqrt{gR})^2 - mgR = -\frac{mgR}{2}$$

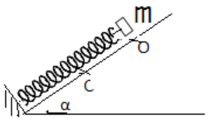
Comme le chemin BC est lisse , pas de force de frottement, donc l'énergie totale se conserve

$$E_T(B) = E_T(D) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2}R$$

III- $w_{A-B}(\vec{f}) = -\frac{mV_0^2}{2}$

Exercice 6

On pose une masse m à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k sur un plan incliné avec un angle α de l'horizontale. On laisse la masse au point O sans vitesse initiale. On suppose qu'il y a des frottements sur le plan μ.

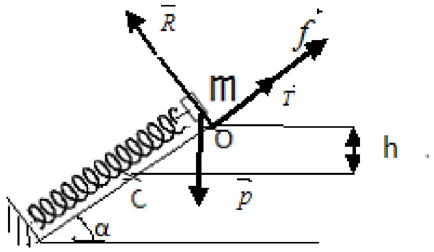


- Trouver l'énergie totale aux points O et C.

- Calculer le travail de la force de frottement.

Déduire Xc la compression maximum du ressort. Que devient-elle si on néglige les frottements ?

Solution



- $\vec{f}$: Force de frottement et $\vec{T}$: tension du ressort

Si on choisit le point O comme référence pour

l'énergie potentielle gravitationnelle et de raideur $E_p=0$

et T=0 $E_M(0)=0$

Au point C

$$E_M(c) = E_p(c) + T(c) = \frac{1}{2}kX_C^2 - mgh = \frac{1}{2}kX_C^2 - mgX_C\sin\alpha$$

$$\Delta E_M = E_M(c) - E_M(O) = \frac{1}{2}kX_C^2 - mgX_C\sin\alpha = w(\vec{f})$$

Il s'agit du travail de la force de frottement, l'énergie mécanique (totale) ne se conserve pas.

- le travail de la force de frottement $w(f) = \int \vec{f}\,\vec{dl} = -\int f\,dl$

Avec $f = \mu R = \mu mg\cos\alpha$ donc $w_{o-c}(\vec{f}) = -\int_0^{X_C} \mu mg\cos\alpha\,dx = -\mu mg\cos\alpha X_C$

En comparant ce travail avec celui de la première question

$$\frac{1}{2}kX_C^2 - mgX_C\sin\alpha = -\mu mg\cos\alpha X_C$$

$$X_C = \frac{2mg}{k}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

- si on néglige les frottements

$$X_C = \frac{2mg}{k}(\sin\alpha)$$

Références

- P. Benoist-Gueutal et M. Courbage, mathématique pour la physique, tome 1, 2, 3, édition Eyrolles, Paris (1992)

- Michel Henri et Nicolas Delorme Mini manuel de mécanique du point, édition Dunod (2008).

- Sylvie Pommier et Yves Berthaud, Mécanique Générale, édition DUNOD (2010).

- Horst Stocker, Francis Jundt et Georges Guillaume, Toute la physique, édition Dunod (1999).

- http://cours-examens.org/index.php/etudes-superieures/tronc-commun-technologie.

- TRAN Minh Tâm , physique générale, polycopié , http://lphe.epfl.ch/~mtran/.

- A. CHAFA, A.DIB , F.CHAFA, MEKIDECHE, A.DERBOUZ, FKAOUAH, Polycopié d'examens de mécanique du point, , USTHB, www.usthb.dz/fphy/IMG/pdf/examens.pdf

- Alonso M. et Finn E. , Physique générale 1 : mécanique et thermodynamique, Dunod, (2004).

- Feynman R., Le cours de physique de Feynman, 5 volumes, Dunod, (2013).

- Stocker H., Jundt F. et Guillaume G., Toute la physique, Dunod, (2007).