V / DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL
تـحـريـك الـنـقـطـة المـاديـة

INTRODUCTION :

La dynamique en physique est la science qui étudie la relation entre le corps en mouvement et les causes qui provoquent ce mouvement. Elle prédit aussi le mouvement du corps situé dans un milieu déterminé.

La dynamique, plus précisément, est l'analyse de la relation entre la force appliquée et les changements du mouvement du corps.

1/ PRINCIPE D'INERTIE GALILEEN (ou première loi de Newton 1642-1727) :

(مبدأ العطالة الغليلي)

Enoncé du principe :

Si le corps matériel n'est soumis à aucune force, il est :

- **soit en mouvement rectiligne uniforme,**
- **soit au repos, s'il était initialement au repos.**

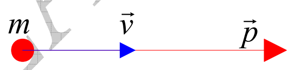
Pour une particule le principe d'inertie s'énonce ainsi : « **Une particule libre et isolée se déplace en mouvement rectiligne avec une vitesse constante** ».

C'est pour cette raison qu'une particule accélérée n'est ni libre ni isolée mais, soumise sans aucun, doute, à une force.

Et puisque le mouvement est une notion relative, il est indispensable de définir un repère auquel sera rapporté le mouvement de la particule libre : ce repère, à son tour, doit être libre (c'est pour cette raison qu'on l'appelle galiléen ou d'inertie, et dans lequel la particule libre se déplace à vitesse constante).

2/ LA QUANTITE DE MOUVEMENT (كمية الحركة)

❖ **Définition : la quantité de mouvement d'une particule est le produit de sa masse par son vecteur vitesse instantanée.**



$$\boxed{\vec{p} = m.\vec{v}} \qquad (1.5)$$

Fig 5.1 : Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle. Cette une notion très importante car elle introduit deux éléments qui caractérisent l'état de mouvement de la particule : sa **masse** et sa **vitesse**.

Nous pouvons à présent donner un nouvel énoncé du principe d'inertie : « **une particule libre se déplace toujours avec une quantité de mouvement constante** ».

❖ **Conservation de la quantité de mouvement** (إنحفاظ كمية الحركة)

S'il y a variation de la vitesse ou de la quantité de mouvement cela implique que la particule n'est pas libre.

Supposons l'existence de deux particules libres qui ne sont soumises qu'aux influences mutuelles entre elles ; elles sont donc isolées du reste de l'univers :

Au temps t : $\vec{p} = m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2$

Au temps t' : $\vec{p}\,' = m_1.\vec{v}_1^{\,'} + m_2.\vec{v}_2^{\,'}$

Les expériences ont prouvé que $\vec{p}=\vec{p}\,'$, c'est-à-dire que toute la quantité de mouvement d'un système composé de deux particules, soumises à leurs seules influences mutuelles, reste **constante**.

Par exemple : Pour les systèmes isolés suivants :

- Dans un atome d'hydrogène : la quantité de mouvement des deux particules (proton + électron) reste constante tout le temps, tel est le cas exactement de la terre et la lune, soit $\Delta\vec{p} = \vec{0}$.
- La quantité de mouvement d'une molécule constituée d'un atome d'oxygène associé à deux atomes d'hydrogène est constante, il en est de même pour le système solaire.

Si on généralise ceci, le principe de conservation de la quantité de mouvement s'énonce ainsi:

« la quantité de mouvement d'un système isolé constitué de particules est constante »

On peut exprimer mathématiquement ce principe de la conservation de la quantité de mouvement comme suit :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots\dots\dots\dots + \vec{p}_n = C^{te}$$

Dans le cas de deux particules : $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = C^{te}$

Entre les instants t et t' :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'} \Rightarrow \vec{p}_1^{\,'} - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2^{\,'} \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2}$$

« **Dans un système isolé de deux particules, la variation de la quantité de mouvement d'une particule au cours d'un certain temps est égale et de sens opposé à la variation de la quantité de mouvement de l'autre particule au cours du même temps** »

En d'autres termes, ce que gagne l'une des deux particules sous forme de quantité de mouvement, est perdu par l'autre particule sous la même forme, et vis versa, cependant la quantité de mouvement du système reste constante.

3/ LES AUTRES LOIS DE NEWTON (قوانين نيوتن الأخرى)

❖ **La deuxième loi de Newton :** (*c'est plutôt une définition qu'une loi*)

« La dérivée de la quantité de mouvement s'appelle force »

Cela veut dire que la résultante des forces appliquées à la particule est :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \qquad (2.5)$$

Cette équation s'appelle « **équation du mouvement** » (معادلة الحركة)

- **Cas de la masse constante :** suite à ce qui vient d'être dit, si la masse m du mobile est constante (ce qui est fréquent en mécanique newtonienne) alors l'équation précédente s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m.\vec{a}} \qquad (3.5)$$

- **Cas particulier :** Si la résultante $\vec{F}$ est constante alors l'accélération $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ est elle aussi constante et le mouvement est **rectiligne uniformément varié.**

C'est ce qui arrive exactement aux corps qui tombent en chute libre sous l'effet de la force de pesanteur (appelé poids) : $\vec{P} = m.\vec{g}$

- **<u>Cas de la masse variable :</u>** dans ce cas la résultante $\vec{F}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}.\frac{dm}{dt}} \qquad (4.5)$$

<u>Exemple 5.1</u> : un corps de masse $10kg$, soumis à la force $F = (120t + 40)N$ se déplace suivant une ligne droite. Au temps $t = 0$, le corps occupe la position $x_0 = 5m$ avec une vitesse $v_0 = 6ms^{-1}$. Trouver la vitesse et la position du mobile en fonction du temps.

<u>Réponse</u> :

En utilisant la formule (5.3) on trouve : $F = 120t + 40 = 10a$, telle que $a = (12t + 4)ms^{-2}$.

Pour trouver l'expression de la vitesse instantanée on doit intégrer l'expression de l'accélération.

Puisque $\frac{dv}{dt} = 12t + 4$

Donc : $\int_0^v dv = \int_0^t (12t + 4)dt \Rightarrow \boxed{v = 6t^2 + 4t + 6}\left(ms^{-1}\right)$

Intégrons de nouveau, mais cette fois, l'expression obtenue de la vitesse pour trouver la position du mobile à chaque instant :

$$\int_0^x dx = \int_0^t vdt = \int_0^t (6t^2 + 4t + 6)dt \Rightarrow \boxed{x = 2t^3 + 2t^2 + 6t + 5}(m)$$

❖ **<u>La troisième loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction :</u>**

(القانون الثالث لنيوتن أو مبدأ الفعل و رد الفعل)

<u>Enoncé de la loi</u> : « **lorsque deux particules sont en influence mutuelle, la force appliquée par la première particule sur la deuxième est égale et de signe contraire à la force appliquée par la deuxième particule sur la première** ».

C'est ce que montre la figure 5.2 et qui nous permet d'écrire :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}} \qquad (5.5)$$

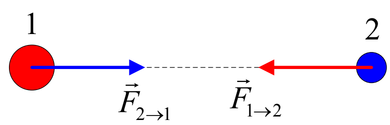


Fig 5.2: Action et réaction

4/ <u>NOTION DE FORCE ET LOI DE FORCE</u> (مفهوم القوة و قانون القوة)

La définition de la force par l'équation $\vec{F} = m.\vec{a}$ nous permet d'exprimer la force correspondante à l'effet étudié en fonction des facteurs physiques telles que la distance, la masse, la charge électrique des corps….Nous arriverons en fin de compte à dégager « la loi de force ».

La loi de force (ou loi des influences mutuelles) : cette loi montre clairement l'expression de la force (la résultante) appliquée à un point matériel dans une situation bien définie.

Par exemple : l'expression $\vec{P} = m.\vec{g}$ est la **loi de force** qui définit le poids d'un corps au voisinage de la terre et qui nous permet de prédire le mouvement de n'importe quel corps dans le champ de pesanteur terrestre.

Possédant la relation $\vec{F} = m.\vec{a}$, nous pouvons connaître le comportement des systèmes physiques, mieux encore nous pouvons même prédire leur évolution.

On peut résumer cette situation par l'équation symbolique :

$$\boxed{\text{PHYSIQUE=MECANIQUE+LOIS DE FORCE}}$$

Après avoir pris connaissance des lois de force correspondantes aux différents effets mutuels, nous pouvons prédire le mouvement du corps matériel qui est soumis à la force avec des conditions initiales prédéterminées.

Dans ce qui suit nous allons poser et prendre connaissance des lois relatives respectivement aux :

- Influences mutuelles dues à la gravitation au voisinage de la terre,
- Interactions mutuelles dans le cas de l'attraction universelle,
- Frottements,
- Influences mutuelles élastiques.

5/ MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS LE CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE (حركة قذيفة في حقل الجاذبية الأرضية)

Tous les projectiles qui tombent en chute libre au voisinage de la terre ont la même accélération $\vec{g}$ constante qui est dirigée vers le bas. On peut écrire $\vec{g}$ sous la forme : $\vec{g} = -g.\vec{j} = -9.8\vec{j}(m/s^2)$, $\vec{j}$ étant le vecteur unitaire de l'axe vertical dirigé vers le haut.

On peut prédire le mouvement d'un projectile lancé avec une vitesse initiale faisant un angle avec l'horizontale.

Nous avons pris connaissance dans l'enseignement secondaire que l'étude porte essentiellement sur la détermination:

- Des composantes de la vitesse :

$$V_x(t) = V_{0x} = V_0.\cos\alpha$$

$$V_y(t) = -gt + V_{0y} = -gt + V_0 \sin\alpha$$

- Des deux équations horaires :

$$x(t) = V_0.\cos\alpha.t \quad (t=0;\ x=0)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0.\sin\alpha.t + y_0$$

- De l'équation de la trajectoire : obtenue par élimination du temps entre les équations horaires précédentes :

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + (tg\alpha).x + y_0$$

- L'apogée ou hauteur maximale atteinte par le projectile :

$$y_{\max} = h = -\frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2g} \quad (g<0)$$

- La portée : $x_{max} = -\dfrac{V_0^{\,2}.\sin 2\alpha}{g}$ *(g<0)*

A titre de rappel on se propose d'étudier l'exemple suivant :

Exemple 5.1 : Un projectile est lancé verticalement vers le haut, à partir du sol, avec la vitesse $10 m.s^{-1}$

a/ Quelle est la hauteur atteinte par le projectile ?

b/ quelle est la vitesse du projectile après $1.5s$ depuis le lancement ?

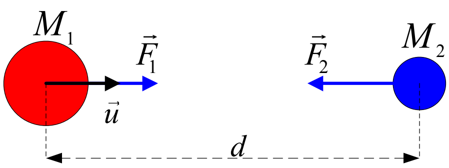
c/ quelle est l'intervalle de temps séparant l'instant du lancement et l'instant de collision du projectile avec la terre ?

Réponses : a/ $5.1m$ b/ $4.7m.s^{-1}$ c/ $2.04s$

6/ LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE (قانون الجذب العام)

La loi de gravitation universelle, qui a été établie par Newton en 1685, est la base de la théorie qui explique de nombreux phénomènes physiques : à commencer par le mouvement des planètes et en arrivant par la chute libre des corps en passant par le mouvement des marrées.

Cette loi explique l'attraction entre deux corps de masses respectives M_1 et M_2 , séparés par la distance d . Ces deux corps s'attirent mutuellement avec deux forces directement opposées $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.



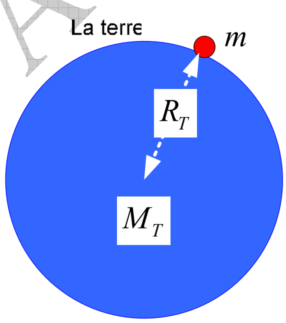
$$\vec{F}_1 = G\frac{M_1.M_2}{d^2}\vec{u} \Rightarrow \boxed{F_1 = G\frac{M_1.M_2}{d^2}} \qquad (5.6)$$

Fig 5.3 : attraction des deux corps

❖ Champ gravitationnel (حقل الجاذبية):

La force d'attraction terrestre est le poids. Il et de coutume de calculer le poids à l'aide de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ $\left(\vec{P} = m\vec{g}\right)$. Grâce à la loi de l'attraction universelle et la loi de force du poids on peut déterminer l'expression de $\vec{g}$ en fonction de l'altitude :

- **A la surface de la terre :** Nous obtenons la valeur de l'accélération de la pesanteur terrestre de la façon suivante :



$$\vec{F} = \vec{P} \Rightarrow G\frac{M_T.m}{R_T^2} = mg_0 \Rightarrow \boxed{g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}} \qquad (5.7)$$

Constante de l'attraction universelle $G = 6.67\times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$

Masse de la terre $M_T = 5.98\times 10^{24} kg$

Rayon terrestre $R_T = 6.37\times 10^{6} m$

Figure 5.4

L'application numérique nous donne $\boxed{g_0 = 9.8N.kg^{-1}}$

- **A la hauteur Z de la surface de la terre :** Le vecteur de l'accélération de la pesanteur terrestre à une hauteur Z du sol, c'est-à-dire à la distance $r = R_T + Z$ du centre de la terre, s'obtient par le raisonnement suivant :

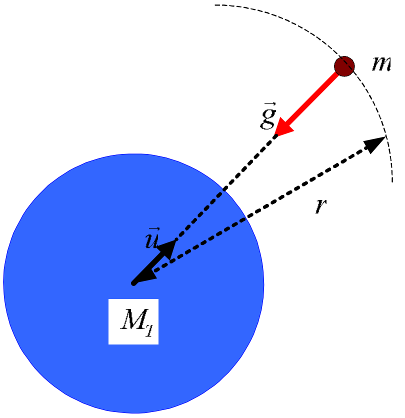


Fig 5.5

A la surface de la terre: $P_0 = mg_0 = G\dfrac{m.M_T}{R_T^2}$

A la distance r du centre de la terre: $P = mg = G\dfrac{m.M_T}{r^2}$

D'où: $$\boxed{g = g_0 \frac{R_T^{\,2}}{r^2}} \qquad (5.8)$$

Quant à l'expression vectorielle elle est :

$$\vec{g} = -g_0 \frac{R_T^{\,2}}{r^2}\vec{u} \qquad (5.9)$$

Exemple 5.3 :

Le soleil a une masse de $1.99\times10^{30}\,kg$, la terre une masse $5.98\times10^{24}\,kg$ et la lune une masse de $7.36\times10^{22}\,kg$. Le rayon moyen de l'orbite de la terre autour du soleil est $1.496\times10^{11}\,m$, celui de l'orbite de la lune autour du soleil est $3.84\times10^{8}\,m$.

a/ Calculer l'intensité moyenne du champ d'attraction solaire tout au long de l'orbite de la terre autour du soleil.

b/ Calculer l'intensité moyenne du champ d'attraction lunaire tout au long de l'orbite de la terre autour du soleil.

Réponses : a/ $5.9\times10^{-3}\,N.kg^{-1}$ b/ $3.33\times10^{-5}\,N.kg^{-1}$

❖ **Application : les satellites artificiels (الأقمار الاصطناعية):**

Durant ces dernières décennies la technologie des communications sans fil a connu un développement extraordinaire. Cette révolution est caractérisée par l'exploration de l'espace par l'homme, et la mise sur orbite de milliers de satellites artificiels géostationnaires, c'est-à-dire tournant à la même vitesse que la terre, afin d'assurer en permanence la télécommunication entre les différents points du globe terrestre.

Pour satisfaire la condition imposée ci-dessus (satellite géostationnaire), des calculs ont été effectués pour déterminer la hauteur correspondante. D'après les résultats cette hauteur est $z = 42.1\times10^{6}\,m$, et la vitesse de rotation $v = 3.08\times10^{3}\,m.s^{-1}$.

Nous laissons à l'étudiant le soin de s'en assurer lui même de ces résultats.

Effectivement, c'est à la hauteur et à la vitesse précédemment calculées que les satellites artificiels géostationnaires évoluent, comme l'avait prédites la théorie.

Vu l'importance du sujet et en complément, et par souci de compréhension nous pouvons ajouter quelques informations relatives au lancement des satellites artificiels.

La seule force agissant sur le satellite artificiel est son poids ou force de pesanteur. La phase étudiée ici est la phase balistique, c'est-à-dire l'étape où le satellite atteint le point M_0 (figure5.6) . En ce point $\vec{V}_0$ représente la vitesse initiale géocentrique du satellite étudié, et $_0$ la distance entre le centre de la terre et le point M_0 telle que l'altitude mesurée à partir de la surface de la terre soit comprise entre 100 et 200km. Le satellite doit évoluer à une distance ne dépassant pas les quelques dizaines de fois le rayon de la terre, et ce afin de pouvoir négliger les influences de la lune et du soleil.

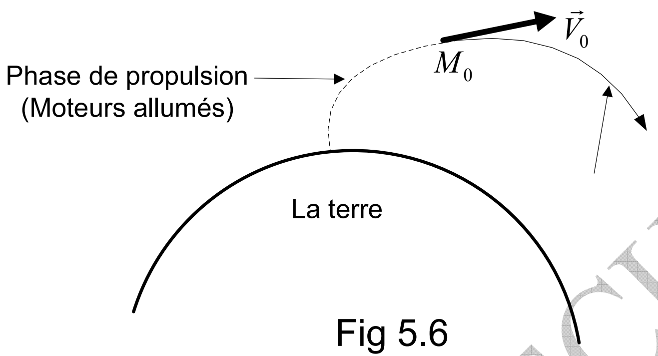


Fig 5.6

Dans ce qui suit nous allons donner les définitions de différentes vitesses propres aux lancements de satellites artificiels suivantes:

❖ **La première vitesse cosmique (السرعة الكونية الأولى) :**

La première vitesse cosmique est la vitesse circulaire géocentrique d'un satellite artificiel tournant à basse altitude (située entre 100 et 200km depuis la surface de la terre). Elle est donnée par l'expression :

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{M_T G}{r_0}}} \qquad (10.5)$$

En acceptant $r_0 \approx R_T = 6400km$ les calculs conduisent à :

$$g_0 = \frac{M_T G}{R_T^{\,2}} \approx 10m.s^{-2} \Rightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{Rg_0}} \simeq \sqrt{64.10^6} \Rightarrow \boxed{V_1 \approx 8000ms^{-1}}$$

❖ **La deuxième vitesse cosmique (السرعة الكونية الثانية) :**

La deuxième vitesse cosmique est la vitesse géocentrique que doit atteindre un satellite artificiel pour se libérer de l'attraction terrestre. Elle est donnée par la formule :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2M_T G}{r_0}} \Rightarrow \boxed{V_2 = V_1\sqrt{2}} \qquad (11.5)$$

En considérant le point M_0 au voisinage de la terre, on obtient $\boxed{V_2 \approx 11000ms^{-1}}$

❖ **La troisième vitesse cosmique (السرعة الكونية الثالثة) :**

La troisième vitesse cosmique est la vitesse géocentrique que doit atteindre un satellite artificiel pour se libérer du système solaire.

Les calculs ont donné :

$$\boxed{V_3 = 16800ms^{-1}} \qquad (12.5)$$

7/ FORCES DE LIAISON OU FORCES DE CONTACT(قوى التلامس أو قوى الترابط)

Entendons nous qu'ici nous parlons des forces agissant mutuellement entre les corps en contact.

La figure5.7 représente un corps solide posé sur une table. Le corps est en équilibre sur cette table, c'est à dire que l'accélération est nulle $\left(\vec{a}=\vec{0}\right)$.

Face à la force $\vec{F}$, représentant la résultante de toutes les interactions des molécules constituant le corps, et appliquée à la table, cette dernière à son tour applique la force $\vec{F}'$ qui est la résultante de toutes les interactions des molécules constituant la surface de la table qui est en contact avec le corps. Les deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ sont appelées forces de contact ou de liaison à cause du contact des deux corps entre eux.

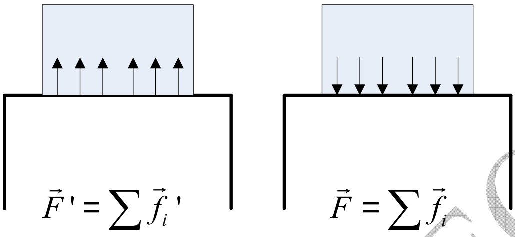


Fig 5.7 : Forces de contact

7/ FORCES DE FROTTEMENT (قوى الإحتكاك)

Chaque fois qu'il y a contact entre deux surfaces rugueuses de deux corps solides, une résistance apparaît alors et s'oppose au mouvement relatif des deux corps. Il existe plusieurs types de frottements :

- Les frottements entre les corps solides qui peuvent être statique et dynamique,
- Les frottements dans les fluides.

❖ **force de frottement statique(قوة الإحتكاك السكوني)**

La force de frottement statique est la force qui maintient le corps en état de repos même en présence d'une force extérieure.

- **Cas d'un corps posé sur un plan horizontal :**

Considérons le corps de la figure 5.8. Il est soumis à quatre forces. Soit $\vec{f}_s$ la force de frottement statique. $\vec{P}$ et $\vec{N}$ sont respectivement le poids et la force de réaction. Pour que le corps posé sur la table se met en mouvement il faut lui appliquée une force minimale $\vec{F}$ **.**

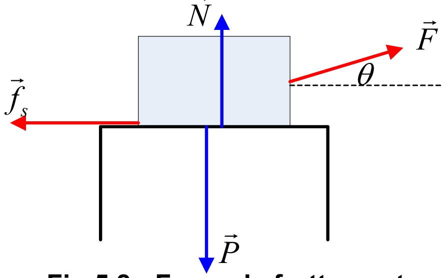


Fig 5.8 : Force de frottement

Le corps est au repos : $\sum_i \vec{F}_i=\vec{0}$

En projetant sur les deux axes horizontal et vertical on obtient:

$$\left.\begin{array}{l} N+F.\sin\theta-P=0 \\ F.\cos\theta-f_s=0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f_s=F.cos\theta}$$

Si l'angle θ était nul on aurait $f_s = F$ et $P = N$.

Remarquer que $P \neq N$ avec $N = P - F.\sin\theta$ qui est la force qui maintient le corps au repos jusqu'à ce que la force $\vec{F}$ appliquée arrive à l'arracher de la surface. Tout juste avant d'arracher le corps, la force de frottement statique atteint sa valeur maximale définie par la loi: $f_s = h_s.N$ où h_s est le coefficient de frottement statique et N la force normale.

Donc :

$$\boxed{f_s \leq f_{s,\max} = h_s.N} \qquad (13.5)$$

Dans notre exemple:

$$N = P - F\sin\theta \Rightarrow \boxed{f_{s,\max} = h_s.N = h_s(P - F\sin\theta)}$$

Il faut que $N > 0$ et par conséquent $P > F.\sin\theta$, sinon le corps se soulève.

Exemple 5.4 :

Un corps de poids $80N$ est posé sur la surface d'un plan horizontal rugueux. On applique à ce corps une force d'intensité $20N$ faisant un angle de $30°$ avec l'horizontal. Le coefficient de frottement statique étant 0.30 :

a/ Quelle est l'intensité de la force de frottement ?
b/ Quelle est l'intensité de la force normale ?
c/ Quelle est l'intensité de la force de frottement maximale ?
d/ Quelle doit être l'intensité de la force appliquée pour que le corps se décroche ?

Réponse : a/ $f = 17.3N$, b/ $N = 70N$, c/ $f_{s,\max} = 21N$, d/ $F = 24.1N$

❖ **force de frottement cinétique(قوة الإحتكاك الحركي)**

La force de frottement cinétique est la force qui s'oppose au mouvement du corps sur une surface rugueuse. Son intensité est donnée par la formule :

$$\boxed{f_c = h_c.N} \qquad (14.5)$$

Remarque : Dans le cas des forces de frottement **statique** le corps est au **repos**, par contre dans le cas des forces de frottement cinétique ou **dynamique** le corps est en **mouvement**.

Considérons l'exemple schématisé sur la figure5.9 :

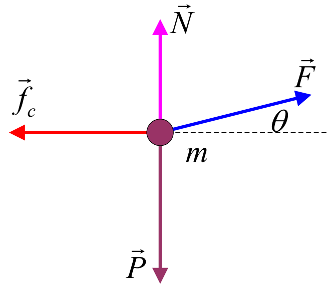


Fig 5.9

Le corps est considéré à présent en mouvement. Il est possible de déterminer l'expression de la force de frottement dynamique après avoir posé l'expression de la force normale :

$$\left.\begin{array}{l} N = P - F.\sin\theta \\ f_c = h_c.N \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f_c = h_c.(P - F.\sin\theta)}$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, sachant que m est la masse du corps, nous pouvons écrire:

$$F.\cos\theta - f_c = ma \Rightarrow \boxed{f_c = F.\cos\theta - ma}$$

Où h_c est le symbole du coefficient de frottement cinétique (ou dynamique) et N représente la force normale.

ICI on ne parle pas de force de frottement maximale.

A l'étudiant de trouver l'expression de l'accélération.

Exemple 5.5 :

Un corps de masse $10,2kg$ glisse sur un plan horizontal rugueux sous l'effet d'une force d'intensité $20N$. La direction de la force fait un angle de $45°$ vers le haut avec l'horizontale. Le coefficient de frottement dynamique est $0,15$. On prend $g = 9,8ms^{-2}$. Calculer :

a/ la force normale, b/ la force de frottement cinétique, c/ la résultante des forces, d/ l'accélération acquise.

Réponse : a/ $N = 85.82N$, b/ $f_c = 12.9N$, c/ $F_R = 1.24N$, d/ $a = 0.12ms^{-2}$

❖ LES FROTTEMENTS DANS LES FLUIDES(الإحتكاكات في المائع)

Quant un corps solide se déplace dans un fluide (gaz ou liquide) avec une faible vitesse relative, une force de frottement apparaît. Elle se calcule par la formule :

$$\boxed{\vec{f}_f = -K\eta.\vec{v}} \qquad (15.5)$$

K : Un coefficient qui dépend de la forme du corps solide en mouvement dans le fluide.

Pour une sphère, par exemple, on trouve $K = 6\pi.R$, et par conséquent :

$$\boxed{\vec{f}_f = -6\pi.R.\eta.\vec{v}} \qquad (16.5)$$

Cette loi est connue sous le nom de **Loi de Stockes.**

η : Coefficient qui dépend des frottements internes dans le fluide (c'est à dire les frottements entre les différentes couches qui sont en mouvement avec différentes vitesses). Le frottement interne au fluide s'appelle la **viscosité**, et c'est pour cette raison que η s'appelle le **coefficient de viscosité**. Dans les liquides, le coefficient de viscosité diminue avec l'élévation de température, par contre il augmente avec la diminution de la température pour les gaz.

9/ LES FORCES ELASTIQUES (القوى المرنة) :

Les forces élastiques provoquent des mouvements périodiques.

Par exemple : dans notre étude du mouvement rectiligne sinusoïdal, nous avons vu que l'accélération est calculée par :

$$\vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = m.\vec{a} \quad ; \quad \vec{F} = -m\omega^2.\overrightarrow{OM} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k.\overrightarrow{OM}} \qquad (17.5)$$

Cela veut dire, que pour le mouvement rectiligne sinusoïdal, la résultante de toutes les forces appliquées à un point matériel, est proportionnelle au vecteur position et de sens contraire. Cette force est toujours dirigée vers le centre, c'est pour cette raison qu'elle est appelée **force centrale**. Elle ne s'annule qu'au centre.

Par projection sur l'axe, on arrive à la loi de force suivante :

$$\boxed{F = -kx} \qquad (18.5)$$

10/ FORCES D'INERTIE OU PSEUDO FORCES (قوى العطالة أو شبه القوة)

Lors de notre étude du mouvement relatif, nous avons rencontré la loi de composition des accélérations:

$$a_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

L'observateur lié au repère absolu galiléen doit écrire:

$$\vec{F} = m\vec{a}_a = m\frac{d\vec{v}_a}{dt} \;\; ; \;\; \vec{v} = \vec{v}_a \Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad (19.5)$$

L'observateur lié au repère relatif non galiléen doit écrire:

$$\vec{F} = m\vec{a}_r = m\frac{d\vec{v}_r}{dt} \;\; ; \;\; \vec{F} = m(\vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c)$$

Soit:

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c} \qquad (20.5)$$

Conclusion : Dans le repère galiléen on doit écrire :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dans le repère non galiléen on écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

En comparant les deux dernières équations nous pouvons en déduire ce qui suit : on peut appliquer la loi de la dynamique dans un référentiel **non galiléen** (R) à condition qu'au terme $\vec{F}$, qui représente les forces réelles, c'est-à-dire les forces résultant des effets mutuels effectifs, on doit ajouter les deux termes $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$ connus respectivement sous les noms de **force d'entraînement** et **force Coriolis**.

Ces deux termes traduisent la forme **non galiléenne** du référentiel (R).

Tous les résultats de la mécanique newtonienne peuvent être utilisés dans un référentiel non galiléen à condition d'ajouter l'effet des forces d'inertie à l'effet des forces réelles.

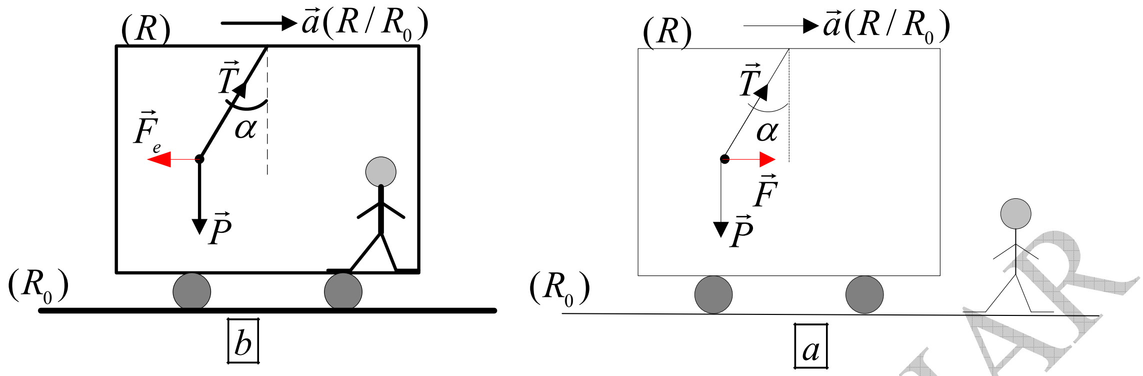
Par exemple : Lorsqu'un bus en mouvement freine subitement, un passager qui est à bord subit l'effet de la force d'inertie.

Exemple d'application :

Un pendule est suspendu au toit d'une voiture en mouvement de translation accéléré (voir figure5.10).

Nous allons recensé les observations de chacun des deux observateurs dont l'un, debout est lié à la terre, l'autre étant lié à la voiture.

Les deux observateurs constatent l'inclinaison du pendule dans le sens contraire du mouvement de la voiture.



Observateur ié au repère (R) mobile **Observateur ié au repère (R_0) fixe**

Fig 5.10 :

<u>Par rapport à l'observateur fixe</u> : la masse m est en mouvement avec l'accélération $\vec{a}$. Il applique la loi (5.6) et écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{P}+\vec{T}$$

<u>Par rapport à l'observateur en mouvement</u> : la masse m est en équilibre relatif. Cet observateur considère que les forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont compensées par la force d'inertie $\vec{F}_e$ telle que : $\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e=\vec{0}$

En comparant les écritures des deux observateurs on en déduit que la force d'inertie est:

$$\boxed{\vec{F}_e=-m\vec{a} \;\; ; \;\; F_e=ma}$$

L'équation du mouvement appliquée au pendule dans le repère (R) s'écrit :

$$m\frac{dv}{dt}=\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e+\vec{F}_c$$

Or la force de Coriolis est nulle puisque le repère (R) est en mouvement de translation par rapport au repère fixe (R_0) . Donc :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{P}+\vec{T}+\vec{F}_e \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}=m(\vec{g}-\vec{a})+\vec{T}$$

On pose $\vec{g}'=\vec{g}-\vec{a}$, ce qui nous permet d'écrire : $m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{g}'+\vec{T}$

Cette dernière équation montre que tout se passe comme si à l'intérieur de la voiture règne une **<u>pesanteur apparente</u>** :

$$\boxed{\vec{g}'=\vec{g}-\vec{a}} \quad \vec{a}\perp\vec{g} \Rightarrow \boxed{g'=\sqrt{g^2+a^2}}$$

Nous pouvons à présent calculer l'angle d'inclinaison du pendule qui est le même pour les deux observateurs :

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{F}{P} = \frac{a}{g}}$$

Nous pouvons aussi calculer la période des oscillations de faible amplitude par rapport à l'observateur mobile :

$$\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\left(g^2 + a^2\right)^{1/2}}}}$$

Si la voiture était au repos, la période serait plus grande :

$$\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Exemple5.6 : Une personne se tient debout sur une balance pèse personne à l'intérieur d'un ascenseur au repos, elle lit $650N$. Combien lira-t-elle sur la balance lorsque l'ascenseur se met en mouvement avec une accélération de $2ms^{-1}$ dans les deux cas :

a/ vers le haut,
b/ vers le bas.

Réponse :

a/ **Mouvement vers le haut** : Par rapport à un observateur extérieur à l'ascenseur, la personne pèse $650N$ et sa masse $65kg$.

L'ascenseur est en état d'équilibre par rapport à la personne qui est soumise aux forces $\vec{R},\vec{P},\vec{F}_e$. Ce que lit la personne est l'intensité de la réaction $\vec{R}$ de la balance, soit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow R - P - F_e = 0 \Rightarrow R = P' = mg + ma$$

$$\boxed{P' = mg' = m(g + a)} = 65(10 + 2) \qquad \boxed{P' = 780N}$$

b/ **Mouvement vers le bas :**

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow -R + P - F_e = 0 \Rightarrow \boxed{R = P' = m(g - a)}$$

$$P' = 65(10 - 2) \qquad \boxed{P' = 520N}$$

11/ MOMENT D'UNE FORCE(عزم قوة)

❖ Soit la figure 5.11 où Δ est un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$; Δ et $\vec{u}$ sont de même sens. Soit O un point de cet axe :

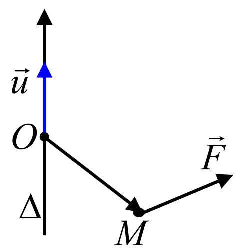


Fig 5.11

❖ **Définition : On appelle moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M par rapport à l'axe Δ la grandeur scalaire :**

$$\boxed{\tau_\Delta = \vec{\tau}_O.\vec{u}} \tag{21.5}$$

Avec $\vec{\tau}_O$ le moment de la force $\vec{F}$ au point O.

Remarquons que le moment de la force τ_Δ (grandeur scalaire) est la projection du moment de la force $\vec{\tau}_O$ (grandeur vectorielle) en un point de l'axe , et c'est une grandeur indépendante de la position de O sur l'axe.

$$\boxed{\vec{\tau}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}} \tag{22.5}$$

❖ **Expression du moment de la force par rapport à l'axe Δ :**

La figure 5.12 représente une porte soumise à une force quelconque $\vec{F}$ et assujettie à tourner autour de l'axe $\Delta = Oz$. Pour faire notre étude, nous optons pour les coordonnées cylindriques (r,θ,z) , les mieux adaptées à ce cas, et ayant comme origine O et Oz comme axe vertical.

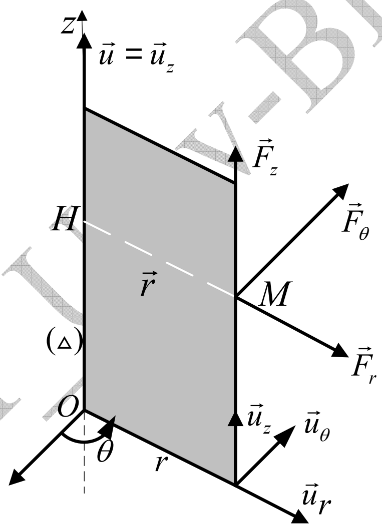


Fig 5.12

Nous décomposons la force $\vec{F}$ en trois composantes :

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\theta + \vec{F}_z \Rightarrow \vec{F} = F_r.\vec{u}_r + F_\theta.\vec{u}_\theta + F_z.\vec{u}_z$$

Oz étant l'axe, donc $\vec{u} = \vec{u}_z$ et par conséquent $\tau_\Delta = \tau_z = \vec{\tau}_O.\vec{u}_z \quad ; \quad \vec{\tau}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

$$\tau_\Delta = \tau_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u}_z = (r.\vec{u}_r + z.\vec{u}_z) \wedge (F_r.\vec{u}_r + F_z.\vec{u}_z + F_\theta.\vec{u}_\theta).\vec{u}_z$$

Effectuons cette opération qui est un produit mixte de vecteurs :

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ r & 0 & z \\ F_r & F_\theta & F_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{u}_r(0 - z.F_\theta) - \vec{u}_\theta(r.F_z - z.F_r) + \vec{u}_z(r.F_\theta - 0)$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = -z.F_\theta.\vec{u}_r - r.F_z.\vec{u}_\theta + z.F_r\vec{u}_\theta. + r.F_\theta.\vec{u}_z$$

$$\tau_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u}_z = -z.F_\theta.\underbrace{\vec{u}_r.\vec{u}_z}_{0} - r.F_z.\underbrace{\vec{u}_\theta.\vec{u}_z}_{0} + z.F_r.\underbrace{\vec{u}_\theta.\vec{u}_z}_{0} + r.F_\theta.\underbrace{\vec{u}_z.\vec{u}_z}_{1}$$

$$\boxed{\tau_\Delta = \tau_z = r.F_\theta} \qquad (23.5)$$

Nous remarquons que les composantes radiale $\vec{F}_r$ et axiale $\vec{F}_z$ ne contribuent pas dans le moment par rapport à l'axe Δ .

Conclusion :

- La force radiale $\vec{F}_r$ qui rencontre l'axe Δ n'a aucun effet de rotation sur la porte (elle l'arrache).
- La force axiale $\vec{F}_z$ parallèle à l'axe Δ n'a elle aussi aucun effet de rotation sur la porte (elle la soulève).
- La force normale $\vec{F}_\theta$ perpendiculaire à l'axe Δ est la seule qui a un effet de rotation sur la porte. Plus la longueur du bras est grande, plus il est facile de faire tourner la porte.

12/ LE MOMENT CINETIQUE (العزم الحركي)

❖ Le moment cinétique d'un point matériel en un point de l'espace :

Soit O un point de l'espace (il n'est pas indispensable qu'il soit au repos dans un référentiel R) :

On appelle moment cinétique d'un point matériel de masse m, de quantité de mouvement $\vec{p}$ et situé au point M par rapport au point O le produit vectoriel:

$$\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}} \qquad (24.5)$$

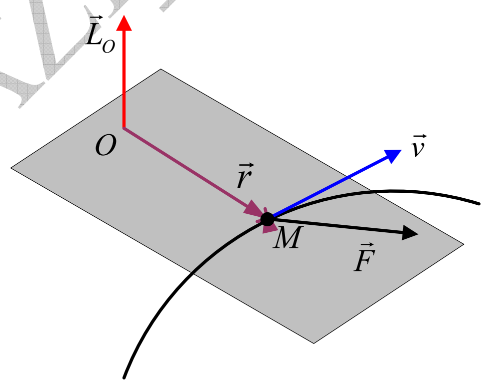


Fig 5.13

Vu la similitude entre cette expression 5.24 et l'expression du moment cinétique de la force 5.22, on peut qualifier le moment cinétique de moment de la quantité de mouvement.

❖ Le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe :

Par comparaison avec la définition du moment d'une force par rapport à un axe, on peut en déduire la définition du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe Δ comme suit :

$$\boxed{L_\Delta = \vec{L}_O.\vec{u}} \qquad (25.5)$$

Remarquons que le moment cinétique L_Δ (grandeur scalaire) est la projection du moment cinétique $\vec{L}_O$ (grandeur vectorielle) en un point de l'axe. L_Δ est indépendant du choix de la position O sur l'axe.

Sans de nouveaux calculs et en se référant uniquement à la comparaison, nous arrivons à l'expression du moment cinétique d'un point matériel par rapport à l'axe Oz en fonction de la coordonnée transversale de sa quantité de mouvement, soit :

$$\boxed{L_\Delta = L_z = r.p_\theta} \qquad (26.5)$$

Partant des deux expressions transversales de la quantité de mouvement et de la vitesse, nous arrivons à une nouvelle expression du moment cinétique en fonction de la masse, du vecteur position et de la vitesse angulaire :

$$\left.\begin{array}{l} p_\theta = m.v_\theta \\ v_\theta = r.\dot{\theta} \\ L_\Delta = L_z = r.p_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{L_\Delta = L_z = m.r^2.\dot{\theta}} \qquad (27.5)$$

Remarque : Cette expression peut demeurer constante si $\dot{\theta} = \omega \Rightarrow L_\Delta = m.r^2.\omega$

On pose $C = r^2.\dot{\theta}$

Sous l'effet d'une force centrale, le vecteur position balaie entre les instants t_1 et t_2 le triangle OP_1P_2 dont l'aire est $ds = \frac{1}{2}r^2.d\theta$, (figure5.14).

Divisons les deux membres par dt :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2.\dot{\theta} \qquad (28.5)$$

On remarque que : $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2.\dot{\theta} = \frac{1}{2}C = C^{te}$

Nous découvrons une expression appelée **loi des aires** relative au mouvement à force centrale qui stipule que **« le vecteur position balaie pendant des intervalles de temps égaux des aires égales ».** Figure5.14

Il est utile de donner par la même occasion la définition de la **vitesse aréolaire** en relation avec le sujet de la force centrale « **la vitesse aréolaire** $\frac{dS}{dt}$ **est la surface balayée par le vecteur position par unité de temps** ».

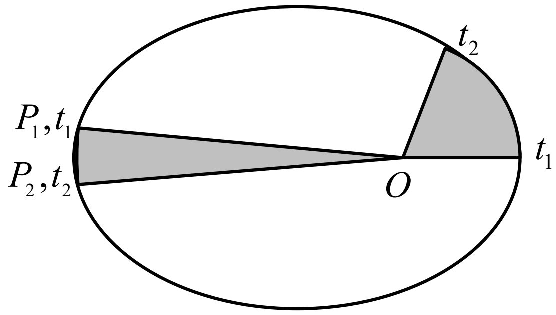


Fig 5.14 : Schématisation de la loi des aires les surfaces colorées sont égales

❖ **Le théorème du moment cinétique :**

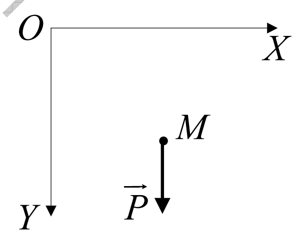
Enoncé : **En un point fixe O d'un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel est égal au moment de la force qui lui est appliquée en ce point.**

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O} \qquad (29.5)$$

Le moment cinétique joue pour la rotation ($\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$) un rôle similaire à celui que joue la force pour la translation ($\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$).

Exemple 5.7:

Un point matériel M de masse m vibre autour d'un axe horizontal OZ perpendiculaire au plan vertical (OX, OY) du mouvement (figure5.15). Sa position est définie à chaque instant par ses coordonnées cartésiennes.



Calculer directement :

1/ le moment du poids $\vec{P}$ par rapport au point O, puis par rapport à l'axe OZ en fonction de x, g et m.

2/ le moment cinétique du point M par rapport au point O, puis par rapport à l'axe OZ en fonction de $m, x, y, \dot{x}$ et $\dot{y}$.

3/ Trouver l'équation du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique sur le point M.

Réponse :

1/ On calcule le moment de la force $\vec{P}$ appliquée au point M par rapport au point O dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}_O = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right) \\ \vec{P} = \underbrace{\vec{P}_x}_{0} + \vec{P}_y = mg.\vec{j}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{\tau}_O = \begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & mg & 0\end{vmatrix} \;\; ; \;\; \boxed{\vec{\tau}_O = mgx.\vec{k}}$$

Par rapport à l'axe $\Delta = OZ$, on obtient :

$$\tau_\Delta = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\right).\vec{k} \;\; ; \;\; \boxed{\tau_\Delta = mgx}$$

2/ Calculons le moment cinétique du point M par rapport au point O dans la base $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v}_x + m\vec{v}_y\end{array}\right| \Rightarrow \vec{L}_O = \begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0\end{vmatrix} \;\; ; \;\; \boxed{\vec{L}_O = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\vec{k}}$$

Par rapport à l'axe nous obtenons : $\Delta = OZ$

$$L_\Delta = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}\right).\vec{k} \;\; ; \;\; \boxed{L_O = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)}$$

Appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_0 \;\; ; \;\; m\left(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x}\right)\vec{k} = mgx.\vec{k} \Rightarrow \boxed{x\ddot{y} - y\ddot{x} = gx}$$