MECANIQUE DU POINT

I) Cinématique du point matériel:

1) Référentiel:

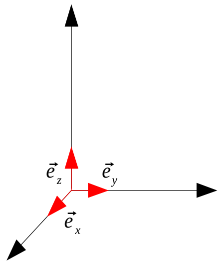
L'ensemble de tous les systèmes d'axes de coordonnées liés à un même solide de référence S constitue un **repère**.

Soit une horloge permettant de mesurer des durées ou intervalles de temps. Si on choisit un instant origine, on dispose alors d'un repère temporel ou **chronologie**.

L'ensemble d'un repère lié à un solide de référence S et d'une chronologie constitue un **référentiel** lié à S.

2) Systèmes de coordonnées:

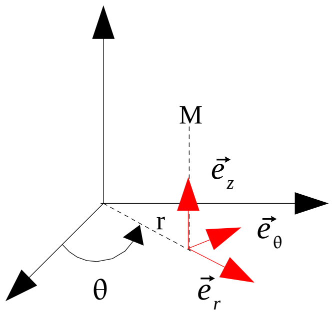
coordonnées cartésiennes:



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$[O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$ est le trièdre de référence

coordonnées cylindriques:



On a: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ où $[O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z]$ est le trièdre de référence.

r est la distance à l'axe, θ l'angle polaire et z la côte

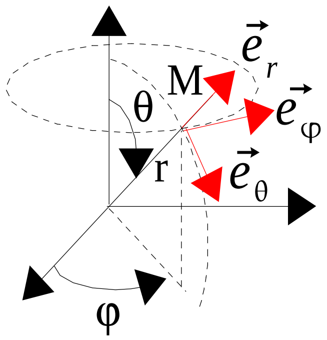
Rem 1: on obtient les coordonnées polaires en supprimant la coordonnée z.

Rem 2: attention! $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ sont des vecteurs mobiles.

Si on pose $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_z$, leurs dérivées temporelles se calculent par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

coordonnées sphériques:



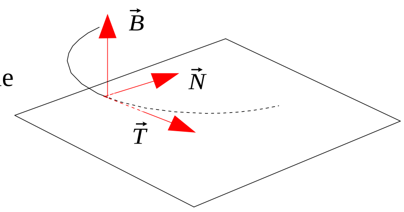
On a: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ où $[O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi]$ est le trièdre de référence.

r est la rayon vecteur, $\theta \in [0, \pi]$ est la colatitude et $\varphi \in [0, 2\pi]$ est la longitude

Rem 2: attention! $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ sont des vecteurs mobiles. Si on pose $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z = \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi$, leurs dérivées temporelles se calculent par : $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$,

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta = \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\,\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r$$

trièdre de Frenet:



$\vec{T}$ est le vecteur tangent, $\vec{N} = R\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ est le vecteur normal. Ils engendrent le plan osculateur. $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ est la binormale.

MECANIQUE DU POINT

3) Vitesse et accélération – Expressions diverses:

a) Vitesse:

Soit un trièdre [O,x,y,z], on définit la vitesse par $\boxed{\vec{v}=\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}}$

cartésiennes	$\vec{v}=\dot{x}\,\vec{e}_x+\dot{y}\,\vec{e}_y+\dot{z}\,\vec{e}_z$
cylindriques	$\vec{v}=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+\dot{z}\,\vec{e}_z$
sphériques	$\vec{v}=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$
Frenet	$\vec{v}=\dot{s}\,\vec{T}$ avec $\dot{s}=\|\vec{v}\|$

b) Accélération:

Soit un trièdre [O,x,y,z], on définit l'accélération par $\boxed{\vec{a}=\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$

cartésiennes	$\vec{a}=\ddot{x}\,\vec{e}_x+\ddot{y}\,\vec{e}_y+\ddot{z}\,\vec{e}_z$
cylindriques	$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta+\ddot{z}\,\vec{e}_z$
Sphériques	$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\theta+(2\dot{r}\sin\theta\,\dot{\varphi}+r\sin\theta\,\ddot{\varphi}+2r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$
Frenet	$\vec{a}=\ddot{s}\,\vec{T}+\dfrac{\dot{s}^2}{R}\vec{N}$ avec $R=\dfrac{v^3}{\|\vec{v}\wedge\vec{a}\|}$ rayon de courbure de la trajectoire

4) Moment cinétique et quantité de mouvement:

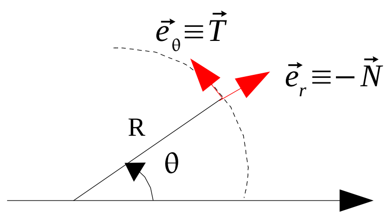
On définit la quantité de mouvement par $\boxed{\vec{p}=m\,\vec{v}}$. C'est une grandeur combinant un paramètre cinématique (la vitesse) à un paramètre intrinsèque du système (la masse)

Pour les mouvements de rotation, on utilise plutôt le moment cinétique par rapport à un point O donné:

$$\boxed{\vec{\sigma}_0=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}=\overrightarrow{OM}\wedge m\,\vec{v}}$$

5) Cas particuliers:

a) Mouvement circulaire:



On le caractérise par r = R et on appelle $\dot{\theta}=\omega$ la vitesse angulaire. On se placera dans le plan z = 0. La description dans le repère polaire ou dans celui de Frenet donne les mêmes résultats. Attention toutefois, **l'équivalence** $\vec{e}_\theta\equiv\vec{T}$ **et** $\vec{e}_r\equiv-\vec{N}$ **n'est valable qu'en mouvement rigoureusement circulaire!**

On appelle vecteur rotation le vecteur porté par l'axe de rotation et dont le module vaut la vitesse angulaire. On a: $\boxed{\vec{\omega}=\omega\,\vec{e}_z}$.

On peut alors exprimer la vitesse et l'accélération d'un point M par:

$$\vec{v}=R\omega\,\vec{e}_\theta=R\omega\,\vec{T}\quad\text{soit}\quad\boxed{\vec{v}=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}}$$

$$\vec{a}=R\,\dot{\omega}\,\vec{e}_\theta-R\,\omega^2\vec{e}_r=R\dot{\omega}\,\vec{T}+R\,\omega^2\,\vec{N}$$

Si le mouvement est uniforme, on a $\vec{a}=-R\omega^2\vec{e}_r=R\,\omega^2\,\vec{N}$. L'accélération est normale et centripète.

MECANIQUE DU POINT

b) Mouvement à accélération centrale:

Par définition l'accélération du point M est colinéaire au rayon vecteur. On pose: $\vec{a}=-f(r,\theta)\vec{e}_r$ et on a :

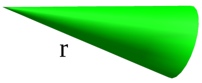
$$\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}=\vec{0}$$

Propriétés:

Le mouvement est plan: En effet avec $\vec{\sigma}_0=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}$, on a $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}=\vec{v}\wedge m\vec{v}+\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}=\vec{0}$. On posera donc: $\boxed{\vec{\sigma}_0=m\vec{C}}$ et on en déduit que le mouvement est plan.

Loi des aires: On a $\overrightarrow{OM}=r\vec{e}_r$ et $\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\vec{\sigma}_0=mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z=m\vec{C}$ d'où $\boxed{C=r^2\dot{\theta}}$

L'aire hachurée dS vaut $dS=\frac{1}{2}r^2d\theta$ donc la vitesse aréolaire est constante:



rdθ

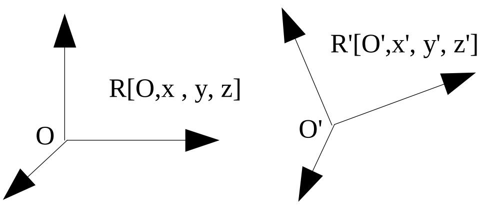
$$\boxed{\frac{dS}{dt}=\frac{C}{2}} .$$

Ce résultat est connu sous le nom de loi des aires: en des temps égaux le rayon vecteur balaie des aires égales.

Formules de Binet: pour l'étude des trajectoires des mouvements à force centrale, il peut être très intéressant d'utiliser les formules de Binet. On les obtient en éliminant formellement le temps des expressions de v^2 et de $\vec{a}$ en utilisant $C=r^2\dot{\theta}$ et en exprimant le tout en fonction de $u=\frac{1}{r}$. On obtient les deux formules de Binet:

$$\boxed{\begin{aligned} v^2&=C^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]\\ \vec{a}&=-C^2u^2\left[u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right]\vec{e}_r\end{aligned}}$$

6) Changement de référentiel:



Soient deux référentiel R et R' caractérisés par $[\vec{a}_{O'}]_R=\vec{a}_{O'}$ et par le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{R'/R}}=\vec{\Omega}$.

On montre en utilisant le fait que les référentiels sont des solides de référence et en utilisant les relations entre vitesses pour deux points d'un même solide que si $\vec{u}$ est un vecteur de R' alors sa dérivée par rapport au temps par rapport à R peut se calculer sans exprimer les coordonées de $\vec{u}$ dans R par la formule: $\boxed{\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R'}+\vec{\Omega}\wedge\vec{u}}$.

Soit $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$. En dérivant par rapport au temps, on obtient:

$$\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R=\left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right]_R+\left[\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{R'}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M} \quad (1)$$

Soit $\vec{v}_a=\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R$ la vitesse absolue et $\vec{v}_r=\left[\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right]_{R'}$ la vitesse relative, l'expression (1) devient:

$\boxed{\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e}$ avec $\boxed{\vec{v}_e=\vec{v}_{O'}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}}$ vitesse d'entrainement.

Pour les accélérations:

$$[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}]_R=[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}]_R+[\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}]_{R'}+\vec{\Omega}\wedge[\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}]_{R'}+\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\Omega}\wedge([\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}]_{R'}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

Soit $\vec{a}_a=[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}]_R$ l'accélération absolue et $\vec{a}_r=[\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}]_{R'}$ l'accélération relative, on a:

$\boxed{\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c}$ avec $\boxed{\vec{a}_e=\vec{a}_{O'}+\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})}$ accélération d'entrainement et $\boxed{\vec{a}_c=2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r}$ accélération de Coriolis.

II) Dynamique du point matériel:

1) Théorèmes généraux en référentiel galiléen:

Principe fondamental de la dynamique:

Dans un référentiel galiléen R, si un point matériel est soumis à un système de forces de résultante $\vec{f}$ alors:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{f}}$$

Rem: attention, si la masse du système varie $\frac{d\vec{p}}{dt}\neq m\vec{a}$!

Théorème du moment cinétique:

Dans un référentiel galiléen R, si un point matériel est soumis à un système de forces de résultante $\vec{f}$ alors:

$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}=\vec{M}_0(\vec{f})=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}}$ où M est le point d'application de la force $\vec{f}$

Théorème de l'action et de la réaction:

Dans un référentiel galiléen R, soient deux point A et B isolés. Si A exerce sur B la force $\overrightarrow{f_{A\to B}}$ et si B exerce sur A la force $\overrightarrow{f_{B\to A}}$ alors: $\boxed{\overrightarrow{f_{A\to B}}=-\overrightarrow{f_{B\to A}}}$

Rem 1: attention, si on n'a plus affaire à des points matériels mais à des systèmes $\overrightarrow{f_{A\to B}}$ et $\overrightarrow{f_{B\to A}}$ ne sont plus portés par la droite AB.

Rem 2: si les actions ne se propagent pas instantanément, ce théorème devient faux!

2) Théorèmes généraux en référentiel non galiléen:

Dans un référentiel non galiléen R', il faut ajouter au bilan des forces, les forces d'inertie d'entrainement $\vec{f}_{ie}=-m\vec{a}_e$ et de Coriolis $\vec{f}_{ic}=-m\vec{a}_c$.

Principe fondamental de la dynamique:

Dans un référentiel non galiléen R', si un point matériel est soumis à un système de forces de résultante $\vec{f}$ alors: $\boxed{[\frac{d\vec{p}}{dt}]_{R'}=\vec{f}+\vec{f}_{ie}+\vec{f}_{ic}}$

Théorème du moment cinétique:

MECANIQUE DU POINT

Dans un référentiel non galiléen R', si un point matériel est soumis à un système de forces de résultante $\vec{f}$ alors:

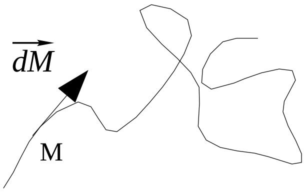
$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}\right]_{R'} = \vec{M}_0(\vec{f}) + \vec{M}_0(\vec{f}_{ie}) + \vec{M}_0(\vec{f}_{ic})$$

Rem 1: lorsqu'on étudie un équilibre relatif – i.e. un équilibre dans R'!-, $\vec{f}_{ic}$ n'intervient pas puisqu'elle est proportionnelle à $\vec{v}_r$ donc nulle!

Rem 2: lorsqu'on se place en référentiel terrestre – étude du pendule de Foucault, chute libre avec déviation vers l'est...-, la force d'inertie d'entrainement est comprise dans le poids $m\vec{g}$ car $\vec{g}$ est la somme de l'accélération d'entrainement et de l'attraction gravitationnelle $\vec{A}_T(M)$ exercée par la Terre sur le système M.

III) Energie cinétique – Energie potentielle – Energie mécanique:

1) Travail – Théorème de l'énergie cinétique:



Soit un point M de R soumis à une force $\vec{f}$. On définit le travail élémentaire de la force $\vec{f}$ lors du déplacement $\overrightarrow{dM}$ par: $\delta W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dM}$.

On a alors : $W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} \cdot \vec{v}\, dt$.

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est définie par: $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.

Théorème de l'énergie cinétique (TEC):

La variation d'énergie cinétique d'un point entre deux instants dans un référentiel donné est égale au travail des forces qui s'exercent sur le point entre ces deux instants $E_{c_2} - E_{c_1} = W_{1\to 2}$

Ce théorème est très utile pour résoudre les problèmes à un seul degré de liberté. On peut aussi l'utiliser sous la forme du théorème de la puissance cinétique à savoir: $\frac{dE_c}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$

Rem : attention, si la masse du système varie le théorème de l'énergie cinétique ne s'applique plus. En effet, sa démonstration à partir du pfd suppose que la masse m du système est constante.

2) Force conservative – Energie potentielle:

Une force est conservative s'il existe une fonction scalaire U telle que: $\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\, U$. On dit alors que la force $\vec{f}$ dérive du potentiel – ou énergie potentielle U.

Si on cherche le travail de cette force $\vec{f}$ lors du déplacement $M_1 \to M_2$, on a:

$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dM} = -\int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{grad}\, U \cdot \overrightarrow{dM} = -\int_{M_1}^{M_2} dU$ d'après la propriété fondamentale du gradient. Alors:

$$W = U(M_1) - U(M2) = -\Delta E_p$$

Le travail d'une force conservative lors d'un déplacement $M_1 \to M_2$ ne dépend pas du chemin suivi mais seulement du point de départ et du point d'arrivée: il est égal à la diminution d'énergie potentielle.

3) Energie mécanique:

Lorsqu'on est en présence de forces conservatives, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit:

$$\Delta E_c = W = -\Delta U \Leftrightarrow \Delta(E_c + U) = 0$$

On appelle énergie mécanique la quantité: $E_m = E_c + U$

Si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives, son énergie mécanique se conserve au cours du temps.

On appelle ***intégrale première du mouvement*** toute quantité ne faisant intervenir que des dérivées premières par rapport au temps qui se conserve au cours du temps.

Dans le cas présent, l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement.

Si le système est soumis en plus des forces conservatives à des forces non conservatives comme les frottements alors: $\Delta E_c = W_{conservatives} + W_{nonconservatives} = -\Delta U + W_{non\,conservatives}$ et $\boxed{\Delta E = W_{nonconservatives}}$

3) Equilibre et stabilité:

Un point est à l'équilibre si son ***énergie potentielle est minimale*** en ce point. Cela correspond à $\vec{f} = \vec{0}$. En effet: $\boxed{\frac{dE_p}{dx} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{grad}\,E_p = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{f} = \vec{0}}$ où x est un paramètre caractérisant le mouvement de M.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que le mouvement du point M au voisinage de ce point soit celui d'un oscillateur harmonique. On montre que cela correspond à la condition: $\boxed{\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0}$. C'est un minimum d'énergie potentielle.

Démonstration : supposons pour simplifier que O [0,0,0] soit la position d'équilibre (on peut toujours s'y ramener par un subtil changement d'origine!). Développons $E_p(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de cette position d'équilibre. On obtient:

$$E_p(x) = E_p(0) + x\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_o + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_o$$

Or par définition de la position d'équilibre le terme d'ordre 1 est nul. Posons $k = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_o$ et écrivons la conservation de l'énergie mécanique: $E_c + E_p = cte \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(0) + \frac{1}{2} k x^2 = cte \Leftrightarrow m\ddot{x} + k\,x = 0$.

On retrouve bien l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique à une dimension si et seulement si k>0 soit $\boxed{\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0}$ cqfd!!

On peut bien sur généraliser à trois dimensions. On remarque aussi que la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre est donnée par $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$

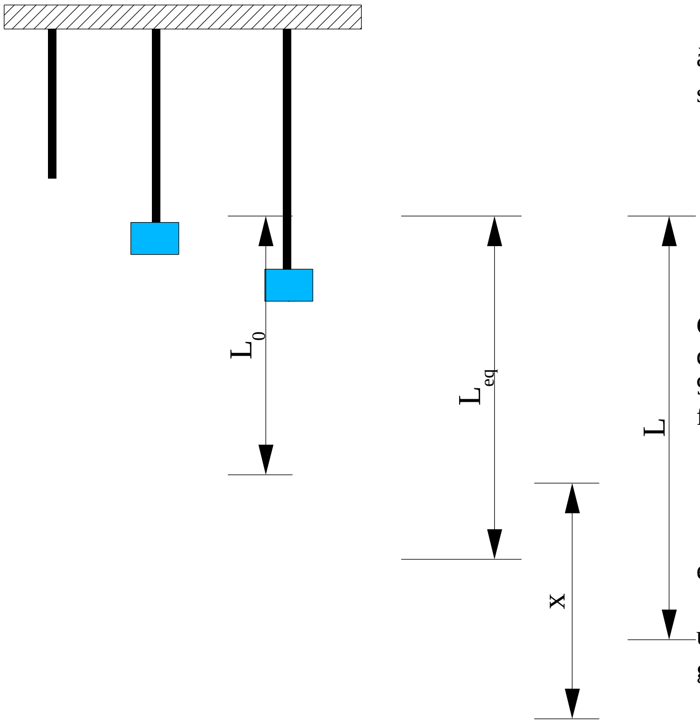
IV) Oscillateur harmonique – Oscillateur amorti – Oscillateur forcé :

1) L'oscillateur harmonique:

On appelle oscillateur harmonique à une dimension tout système mécanique dépendant d'un seul paramètre décrit par l'équation différentielle: $\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$ où ω_0 est la pulsation des oscillations. La période T vaut $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

On a vu que tout mouvement d'un système soumis à des forces conservatives au voisinage d'une position d'équilibre stable est du type oscillateur harmonique. C'est donc un mouvement très général

Exemple: soit un point M de masse m suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0.



Le sustème est soumis à son poids $mg\,\vec{e}_z$ et à la force de rappel du ressort $-k(L-L_0)\vec{e}_z$. Le pfd s'écrit:

$$m\ddot{x}=mg-k(L-L_0)=mg-k(x+L_{eq}-L_0)$$.

A l'équilibre: $0=mg-k(L_{eq}-L_0)$

D'où: $\boxed{m\ddot{x}+kx=0}$

On peut remarquer que le poids n'apparait plus. C'est normal car le paramètre x est défini depuis la position d'équilibre et pas depuis la longueur à vide. C'est le cas dans 99.99% des exercices avec ressorts. Donc dans l'équation finale, le poids ne doit plus apparaître!

2) L'oscillateur amorti:

On ajoute au bilan de l'oscillateur harmonique en plus de la force de rappel en -kx avec $k=\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_o$, une force de frottement fluide en $-f\,\vec{v}$. L'équation générale du mouvement devient:

$$\boxed{\ddot{x}+\frac{1}{\tau}\dot{x}+\omega_0^2x=0}$$ avec $\tau=\frac{f}{m}$ et $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

τ est le temps de relaxation: c'est l'ordre de grandeur du temps que met le système, pour f faible, à regagner sa position d'équilibre après une perturbation.

ω_0 est la pulsation propre du système: ce serait la pulsation des oscillation si le système n'était pas amorti.

On définit le ***facteur de qualité Q*** par: $\boxed{Q=\omega_0\tau}$.

C'est un nombre sans dimension caractérisant la qualité de l'oscillateur: plus Q est fort, plus l'amortissement est faible. Il permet de comparer les comportements de deux systèmes de nature complètement différente comme par exemple un pendule élastique où $Q=\frac{\sqrt{mk}}{f}$ et un circuit RLC où $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

L'équation du mouvement devient: $\boxed{\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2x=0}$ (1). L'équation caractéristique de cette équation différentielle fait apparaître trois cas possible:

Régime pseudo-périodique: $Q>\frac{1}{2}$

C'est le cas où le discriminant est négatif. On appelle pseudo-pulsation la quantité $\Omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$.

Les deux racines de l'équation caractéristique sont: $s_{\frac{1}{2}}=\frac{-\omega_0}{2Q}\pm i\Omega=\frac{-1}{2\tau}\pm i\Omega$.

La solution de (1) est alors $\boxed{x=e^{\frac{-t}{2\tau}}(A_1e^{i\Omega t}+A_2e^{-i\Omega t})=Ae^{\frac{-t}{2\tau}}\cos(\Omega t+\varphi)}$ où les constantes sont déterminées par les conditions initiales.

Rem 1: on définit le décrément logarithmique par $\delta=\frac{1}{n}\ln[\frac{x(t)}{x(t+nT)}]$. Il s'exprime en fonction de Q.: samesure expérimentale donne donc accès au facteur de qualité de l'oscillateur.

Rem 2: plus l'amortissement est faible, plus la pseudo-pulsation tend vers la pulsation propre.

Régime apériodique: $Q<\frac{1}{2}$

C'est le cas où le discriminant est positif.

Les deux racines de l'équation caractéristique sont: $s_{\frac{1}{2}}=\omega_0(\frac{-1}{2Q}\pm\sqrt{(\frac{1}{4Q^2}-1)})$.

La solution de (1) est alors $x=e^{\frac{-t}{2\tau}}(A_1 e^{\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}t}+A_2 e^{-\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}t})=Ae^{\frac{-t}{2\tau}}ch(\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}t+\varphi)$

où les constantes sont déterminées par les conditions initiales.

Rem : le système atteint la valeur d'équilibre sans osciller.

Régime critique: $Q=\frac{1}{2}$

C'est le cas où le discriminant est nul. La racine double de l'équation caractéristique est: $s_0=\frac{\omega_0}{2Q}$.

La solution de (1) est alors $x=e^{\frac{-t}{2\tau}}(At+B)$ où les constantes sont déterminées par les conditions initiales.

Rem : le système atteint la valeur d'équilibre en une oscillation. C'est le retour le plus rapide à l'équilibre.

3) L'oscillateur forcé:

On soumet l'oscillateur harmonique amorti à une force f(t) périodique. L'analyse de Fourier montre que f(t) est alors décomposable en une somme infinie de termes sinusoïdaux de pulsations multiples de la pulsation fondamentale de f(t).On aura: $f(t)=\sum_0^{\infty}(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t))$ avec $\omega=\frac{2\pi}{T}$ où T est la période de f(t).Nous nous bornerons donc à étudier la réponse de l'oscillateur à une sollicitation de la forme $F_0 \cos \omega t$. L'équation générale du mouvement devient:

$$\boxed{\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=F_0\cos\omega t} \quad (1)$$

La solution est de la forme: $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ où $x_1(t)$ est la solution de l'équation sans second membre et $x_2(t)$ la solution imposée par le régime forcé. On a montré au 2) qu'au bout de quelques τ, $x_1(t)\to 0$. On ne cherchera donc que $x_2(t)$. De plus on sait que la solution étant de même pulsation que la force excitatrice $x_2(t)$ sera de la forme: $x_2(t)=X\cos(\omega t-\varphi)$.

Soit l'équation: $\boxed{\ddot{y}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{y}+\omega_0^2 y=F_0\sin\omega t}$ (2). En posant $\underline{z}=x+i\,y$ et en calculant (1) +i (2), on obtient l'équation (3): $\boxed{\ddot{z}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{z}+\omega_0^2 z=F_0 e^{i\omega t}}$. La solution de (1) sera nécessairement $x=\Re(\underline{z})$.

Posons $z=Z e^{i\omega t}$ où $Z=Z\,e^{-i\varphi}$ est l'amplitude complexe. En injectant dans (3) et en simplifiant par

$e^{i\omega t}$, on obtient :

$$\underline{Z} = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$ soit $$Z = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega\omega_0}{Q})^2}}$$ et $$\varphi = \arctan\frac{\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Rem 1: on appelle ***impédance mécanique*** le rapport $\frac{\underline{f}}{\underline{v}}$.

Rem 2: on peut faire grace au modèle des oscillateurs une analogie électromécanique fort utile pour des modélisations de comportement:

Position x→ charge q	***Vitesse v→intensité i***	***Force f(t)→tension u(t)***
Masse m→ inductance L	***Coefficient f→ résistance R***	***Constante rappel k→ 1/C capacité***

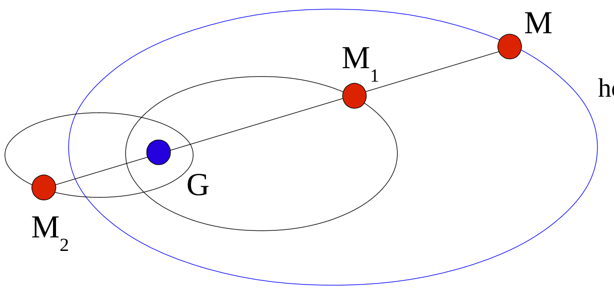
V) Forces centrales en 1/r²:

1) Réduction du problème à deux corps – Particule réduite:

On étudie un système isolé de deux particules M_1 de masse $m_1$et M_2 de masse m_2. Soit O une origine arbitraire.

On appelle ***mobile réduit M*** le point matériel fictif de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ égale à la masse réduite du système et de position donnée par $\overrightarrow{OM}^{M^{2}¿} = \vec{r} = \vec{¿}$. La vitesse de M est la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1. De même son accélération est l'accélération relative de M_2 par rapport à M_1.

Rem : on prend souvent pour origine O le centre de masse du système {M_1 M_2}.



Les trajectoires de M_1 et M_2 se déduisent de celle de M par des homothéties de centre G et de rapports respectifs $\frac{-m_2}{m_1+m_2}$ et $\frac{m_1}{m_1+m_2}$.

Rem : si une particule est plus massive que l'autre (par exemple m_1>>m_2), alors $\mu \simeq m_2$. La particule la plus massive est quasi-immobile et joue le rôle de G. La trajectoire de la particule la plus légère se confond avec celle du mobile réduit M. Ce sera le cas pour le mouvement d'un satellite dans le champ de gravitation de la Terre ou le mouvement des planètes dans celui du Soleil $(\frac{m_{Jupiter}}{m_{Soleil}} = 1047\,!)$. Pour ces cas qui représentent 99.99% des exercices, on ne fera pas apparaître le mobile réduit: on considérera le centre attracteur fixe et travaillera directement avec le système soumis à ce champ.

2) Etude générale des trajectoires:

a) Résolution quantitative:

Soit un mobile réduit M de masse réduite m soumis à une force centrale $\vec{f} = \frac{-k}{r^2}\vec{e}_r$. On se place bien sûr en coordonnées polaires puisqu'on a montré que le mouvement est plan. On pose u=1overr . Alors le PFD appliqué dans le référentiel barycentrique à M donne: $\mu \vec{a} = \vec{f}$. En utilisant la formule de Binet relative à l'accélération, on obtient:

$$-C^2 u^2 \left(\frac{d^{2u}}{d\theta^2} + u\right)\vec{e}_r = \frac{-k}{\mu} u^2 \vec{e}_r \Leftrightarrow \frac{d^{2u}}{d\theta^2} + u = \frac{k}{\mu C^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{r = \frac{p}{\epsilon + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

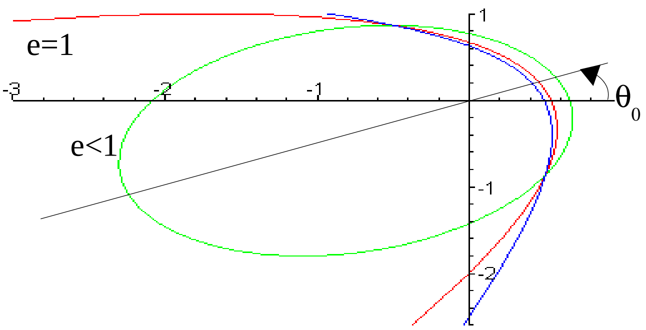
On a $p = \dfrac{\mu C^2}{k}$; $\left|\begin{array}{l} si\, k > 0\, \epsilon = 1 \\ si\, k < 0\, \epsilon = -1 \end{array}\right.$ et θ_0 est donné par les conditions initiales.

L'exentricité e se calcule en injectant l'expression de r dans l'équation de conservation de l'énergie mécanique en utilisant la première formule de Binet pour exprimer v^2 dans l'énergie cinétique:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\mu C^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] - \epsilon |k| u = \frac{1}{2}\mu C^2 \left(\frac{1}{p^2} + \frac{e^2}{p^2} - \frac{2e\epsilon\cos\theta}{p^2}\right) + \epsilon\frac{|k| e\cos\theta}{p} - \frac{|k|}{p}$$

d'où $\boxed{e = \sqrt{1 + \dfrac{2E\mu C^2}{k^2}}}$

b) Tracé des trajectroires:

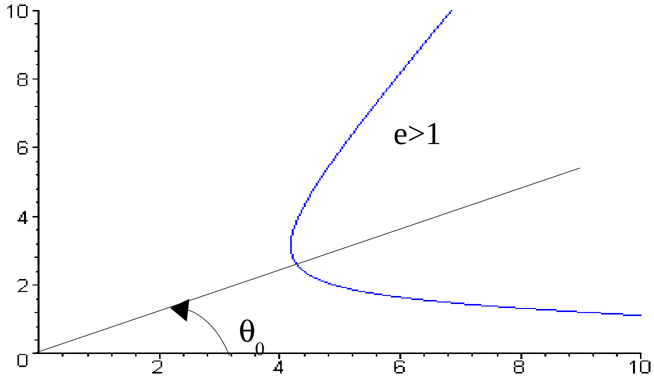


Dans le cas attractif, k>0. L'équation de la trajectoire est

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

Si E>0 alors e>1, on obtient une hyperbole. C'est un état de diffusion. Si E=0 alors e=1 et on obtient une parabole qui correspond encore à un état de diffusion.

Si E<0 alors e<1, on obtient une ellipse. C'est un état lié. On peut noter que le cas e=0 correspond à une trajectoire circulaire.



Dans le ca $\boxed{r = \dfrac{p}{-1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$ e la trajectoire est

Ici e>1,donc la trajectoire sera toujours une hyperbole. Il n'y a que des états de diffusion possibles

c) Etude particulière de l'ellipse:

L'équation est $\boxed{r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$. G sera situé à l'un des foyers.

L'apogée est à $r_A = \dfrac{p}{1+e}$, le périgée est à $r_P = \dfrac{p}{1-e}$ donc le grand axe de l'ellipse vaut $2a = r_A + r_P = \dfrac{2p}{1-e^2}$. Or $e = \sqrt{1 + \dfrac{2E\mu C^2}{k^2}}$ et $p = \dfrac{\mu C^2}{k}$.

On obtient alors l'expression de l'énergie totale en fonction du demi grand axe de l'ellipse: $\boxed{E = \dfrac{-k}{2a}}$.

MECANIQUE DU POINT

Calculons maintenant la période de révolution du mobile. Sachant que la vitesse aréolaire vaut $v_a = \frac{dS}{dt} = \frac{r\dot{\theta}^2}{2} = \frac{C}{2}$, on peut écrire que $T = \frac{S}{v_a}$ où $S = \pi ab$ est l'aire de l'ellipse. Or le paramètre p s'exprime aussi en fonction du grand axe et du petit axe de l'ellipse par $p = \frac{b^2}{a}$. On obtient après calculs que $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{k}}$

3) Mouvement des planètes – Mouvement keplerien:

La thérie précédente peut s'appliquer en première approximation au mouvement des planètes dans le champ gravitationnel du Soleil. Cela suppose bien sûr qu'on néglige les actions des planètes entre elles comme par exemple les perturbations de la trajectoire d'Uranus par Neptune – perturbations qui permirent à Joseph Le Verrier de postuler en 1845 l'existence de Neptune qui ne fût découverte qu'un an plus tard -. On négligera aussi les effets relativistes tels que l'avance du périhélie de Mercure – rotation du périgée de 42.9 seconde d'arc par siècle!!-.

Le mouvement des planètes est décrit dans le référentiel de Copernic en supposant le Soleil fixe et à symétrie sphérique par trois lois. Elles furent énoncées par l'astronome Johannes Kepler en 1605au vu des excellentes mesures des positions des planètes effectuées peu avant par le Danois Ticho Brahé – mesures effectuées à l'oeil nu et dont la précision dépassait la minute d'angle.

- ***Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers***
- ***En des temps égaux les rayons vecteurs balaient des aires égales***
- ***Le rapport des carrés des périodes aux cubes des demis grands axes sont indépendants de la planète***

On peut remarquer que ces lois ont déjà été trouvées lors de la théorie précédente.

4) Mouvement des satellites – Vitesses cosmiques:

On peut utiliser la théorie précédente pour décrire le mouvement des satellites artificiels si le mouvement est décrit dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, si la seule force agissant sur le satellite est la force de gravitation terrestre, si l'orbite est assez haute (supérieure à 100km) pour négliger l'effet de trainée aérodynamique, si elle est inférieure à 10 rayons terrestres afin de négliger l'action de la Lune ou du Soleil et enfin si on considère que la Terre est à symétrie sphérique.

On définit la première vitesse cosmique comme étant la vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire dont le rayon est quasiment celui de la Terre.

Comme $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{R_T} = \frac{-GMm}{2R_T}$ d'après ce qui précède, on a $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_T}}}$.

Elle est de l'ordre de 8km/s.

On peut ensuite définir la vitesse de libération comme étant la vittes correspondant au passage d'un état lié à un état de diffusion.

Comme $E_{libération} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R_T} = 0$ on a: $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}}$.

Elle est de l'ordre de 11km/s.