Corrigé des Exo complémentaires de la SERIE 3 (DYNAMIQUE)

EXOS 1 : $m = 10\,kg$, $F = (120t + 40)\,N$

$x(t=0) = x_0 = 5\,m$, $v(t=0) = v_0 = 6\,m/s$

① Vitesse $v(t)$:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F = ma \Rightarrow a(t) = \frac{F}{m} = 12t + 4 \ (m/s^2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = \int a\,dt = \int (12t+4)\,dt = 6t^2 + 4t + v_0$$

$$\Rightarrow v(t) = 6t^2 + 4t + 6 \quad (m/s)$$

② Position $x(t)$:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x(t) = \int v(t)\,dt = \int (6t^2 + 4t + 6)\,dt$$

$$\Rightarrow x(t) = 2t^3 + 2t^2 + 6t + x_0$$

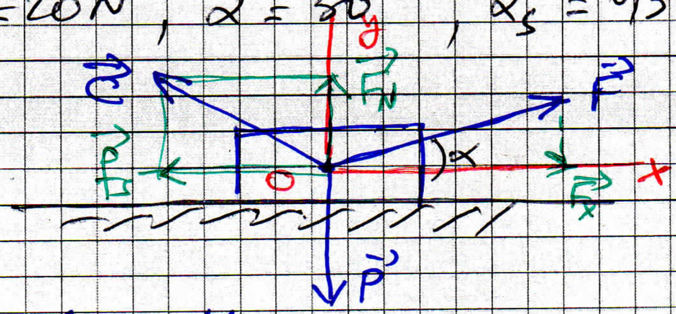
$$\Rightarrow x(t) = 2t^3 + 2t^2 + 6t + 5 \quad (m)$$

EXOS 2 : $P = 80N$, $F = 20N$, $\alpha = 30°$, $\alpha_s = 0{,}30$

Equilibre $\Rightarrow \sum \vec{F}_{ex} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{C} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$

$\vec{C} = \vec{F_N} + \vec{f_s}$



① La force de frottement statique :

On projette sur (Ox) : $-f_s + F\cos\alpha = 0 \Rightarrow f_s = F\cos\alpha$

$$\Rightarrow f_s = 20\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 17{,}3\,N \Rightarrow f_s = 17{,}3\,N$$

② La force normale F_N :

On projette sur (Oy) : $F_N - P + F\sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow F_N = P - F\sin\alpha = mg - F\sin\alpha = 80 - 20/2 = \underline{70\,N}$$

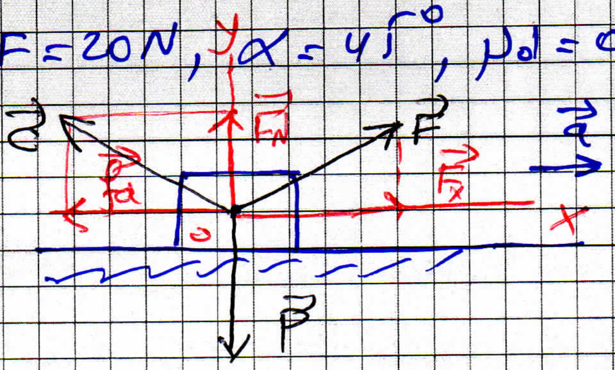
③ La force de frottement maximale.

$$\alpha_s = tg(\alpha_{max}) = \frac{(f_s)_{max}}{F_N} \Rightarrow (f_s)_{max} = \mu_s \cdot F_N = 0{,}3 \times 70 = \underline{21\,N}$$

④ Le corps commence à bouger lorsque $F_x = F\cos\alpha = f_{s\,max}$.

$$\Rightarrow F = \frac{f_{s\,max}}{\cos\alpha} = \frac{21}{(\sqrt{3}/2)} = \underline{24,2\,N}.$$

EXOS3 : $m = 10,2\,kg$, $F = 20\,N$, $\alpha = 45^\circ$, $\mu_d = 0,15$, $g = 9,8\,m/s^2$



Le corps est en mvt $\Rightarrow$

$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \quad \vec{C} + \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{C} = \vec{f_d} + \vec{F_N}$.

$\Rightarrow \vec{f_d} + \vec{F_N} + \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$

1. La force normale : On projette sur (Oy) :

$F_N - P + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_N = P - F\sin\alpha = mg - F\sin\alpha$

$\Rightarrow F_N = 10,2 \times 9,8 - 20(\sqrt{2}/2) = \underline{85,82}\,N$

2. La force de frottement dynamique f_d :

$tg\,\alpha_{max} = \mu_d = \frac{f_d}{F_N} \Rightarrow f_d = \mu_d \cdot F_N = 0,15 \times 85,82\,N$

$\Rightarrow f_d = \underline{12,87}\,N$

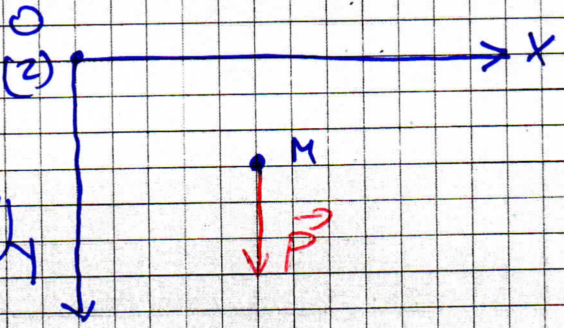
3. La résultante des forces :

$N = F\cos\alpha - f_d = 20\,\sqrt{2}/2 - 12,87 = \underline{1,27}\,N$.

4. L'accélération a :

$N = ma \Rightarrow a = \frac{N}{m} = \frac{1,27}{10,2} = \underline{0,124}\,m/s^2$

EXOS4 :



① Moment de $\vec{P}$ par rapport à O :

Le moment /à O de $\vec{P}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

est : $\vec{\tau_O} = \vec{OM} \wedge \vec{P}$

$\vec{P} = \vec{P_x} + \vec{P_y} = mg\vec{j}$ car $\vec{P_x} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{vmatrix} = mgx\,\vec{k}$$

Le moment de $\vec{P}$ par rapport à l'axe (Oz) est :

$$\tau_\Delta = (\vec{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{k} = mgx\,\vec{k}\cdot\vec{k} = mgx.$$

(2) Le moment cinétique de M par rapport à O dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_x + \vec{p}_y = m\vec{v}_x + m\vec{v}_y$$

$$\vec{L}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m(x\dot{y} - \dot{x}y)\vec{k}.$$

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe (Oz) est :

$$L_\Delta = (\vec{OM} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{k} = m(x\dot{y} - \dot{x}y).$$

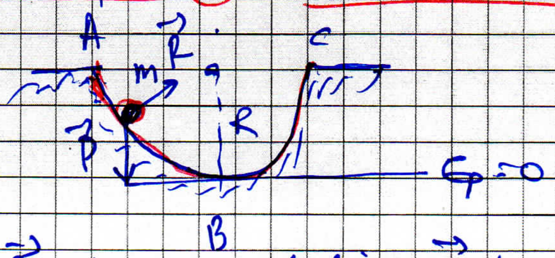
(3) Equation du mvt de M en utilisant le TMC :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O \Rightarrow m(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \ddot{x}y - \dot{x}\dot{y})\vec{k} = mgx\,\vec{k}.$$

$$\Rightarrow \boxed{x\ddot{y} - \ddot{x}y = gx.}$$

Exo 5 :

Exo 55 : (cet exo est sur le chapitre 4 : Travail et Energie)



I) Pas de frottements

1) La masse m est soumise uniquement à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$ du support.
Le travail de $\vec{R}$ est $W(\vec{R}) = 0$ ($\vec{R} \perp$ au deplacement)
Le travail de $\vec{P}$ est independant du chemin suivi ($\vec{P}$ dérive d'un potentiel) $\Rightarrow$ $W_T(A) = W_T(B)$.

2) La vitesse en B :

$$E_p(A) + E_c(A) = E_p(B) + E_c(B)$$

$$\Rightarrow mgR + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gR}.$$

3) La hauteur h_1 atteinte par m :
Soit D le pt atteint par m : $\Rightarrow E_T(D) = E_T(B)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_D^2 + mgh_D = 0 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

Comme $v_D^2 = 0 \Rightarrow h_D = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{2gR}{2g} = \frac{2R}{2} = R$.

Donc $\boxed{h_D = h_1 = R}$

II) Avec frottements sur AB et $v_B = \sqrt{gR}$.

* Travail des forces de frottements :

$$W_{AB}(\vec{f}) = E_m(B) - E_m(A) = \Delta E_m \quad (\vec{f} = \text{force de frottements})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 + \cancel{E_p(B)}^{0} - \cancel{\frac{1}{2} m v_A^2}^{0} - mgR = W_{AB}(\vec{f})$$

$$\Rightarrow W_{AB}(\vec{f}) = \frac{1}{2} m gR - mgR = -\frac{mgR}{2} \Rightarrow W_{AB}(\vec{f}) = -\frac{mgR}{2}.$$

BC est lisse (pas de frottements) :

$$E_T(B) = E_T(D) \Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = mgh_2 \Rightarrow \boxed{h_2 = \frac{R}{2}}$$

III) frottements : $v_A = v_0$, $v_C = 0$

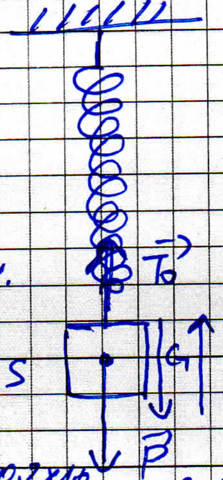
$$W_{AC}(\vec{f}) = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \boxed{W_{AC}(\vec{f}) = -\frac{1}{2} m v_0^2}$$

Entre B et C : $-\frac{1}{2} m v_B^2 + mgR = -\frac{1}{4} m v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gR - \frac{v_0^2}{2}}}$

car : $W_{CB}(\vec{f}) = \frac{W_{AC}(\vec{f})}{2} = -\frac{1}{4} m v_0^2$.

Exercice 56 : $m = 0{,}2\,kg$, $k = 20\,N/m$

$g = 10\,m/s^2$



① Bilan des forces (Equilibre)

$\vec{P}$ = poids = $m\vec{g}$

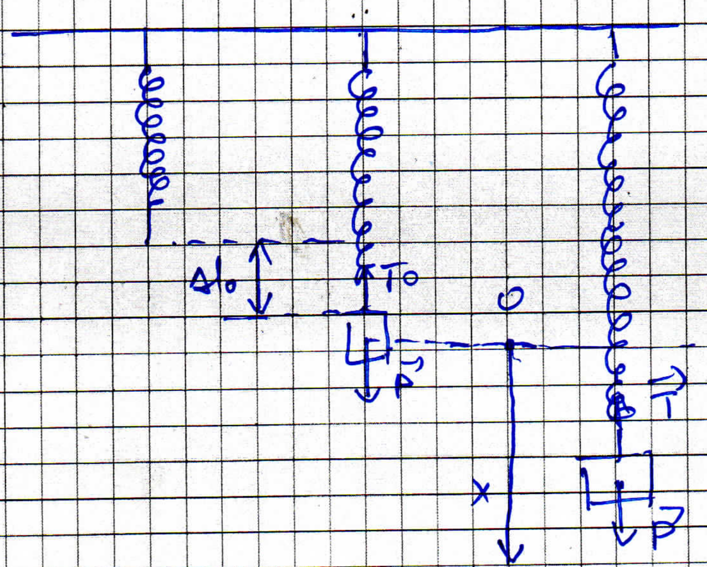
$\vec{T_0}$ = Tension du ressort à l'équilibre.

$\vec{T_0} + \vec{P} = \vec{0}$

$\Rightarrow T_0 = P = mg$

$\Rightarrow k\Delta l_0 = mg \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0{,}2\times 10}{20} = 0{,}1\,m = 10\,cm.$

② En mvt (oscillations).



$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}$.

$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \underbrace{mg - k.\Delta l_0}_{=0} - kx = ma$

$\Rightarrow -kx = ma$

$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

eq du mvt.

③ Solution : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0{,}2}} = 10\,rd/s$. à $t = 0$, $x = 0$

$\Rightarrow x_m = 3\,cm \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \pi/2$.

à $t = 0$, $v > 0 \Rightarrow \dot{x} = -x_m \sin(\omega_0 t + \varphi) > 0 \Rightarrow \varphi = -\pi/2$

Donc $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = 3\cos(10t - \pi/2)}$

④ La période propre est : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{20}} = 0{,}628\,s$