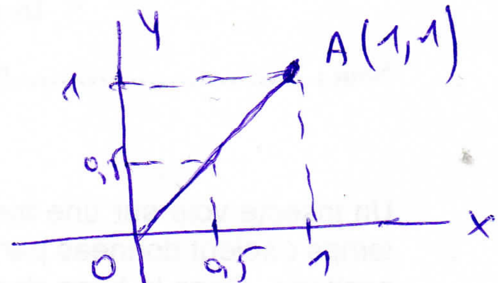
Solution des exo suppl de la série 4

Exo 1 : $\vec{F}(x,y) = x^2y^3\vec{i} + x^3y^2\vec{j}$.

① suivant la droite $y = x$



On a : $y = x \Rightarrow dy = dx$.

$$W_{OA}(\vec{F}) = \int_O^A \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_O^A x^2y^3\,dx + \int_O^A x^3y^2\,dy = \int_0^A (x^5\,dx + x^5\,dx)$$

$$= \int_0^1 2x^5\,dx = \left[\frac{1}{3}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,J$$

② $$\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & x^3y^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2y^2 - 3x^2y^2 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

$\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$ est une force conservative.

③ $\vec{F} = -\vec{grad}\,E_p \Rightarrow E_p = ?$

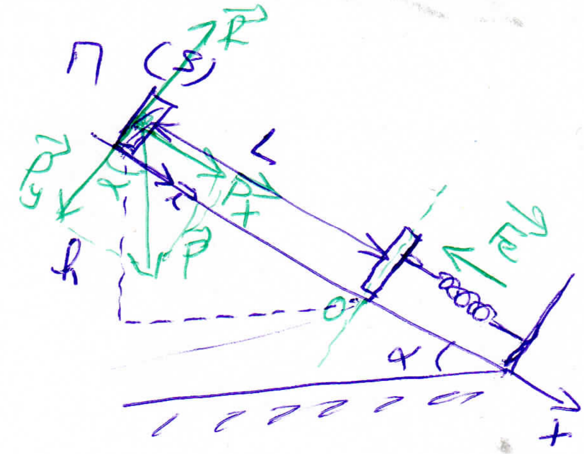
$$-\frac{dE_p}{dx} = +x^2y^3 \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = -x^2y^3$$

$$\Rightarrow E_p(x,y) = \int -x^2y^3\,dx = -\frac{1}{3}x^3y^3 + E_p(y) + C.$$

$$-\frac{dE_p}{dy} = x^3y^2 \Rightarrow \frac{dE_p}{dy} = -x^3y^2 = -x^3y^2 + \frac{dE_p(y)}{dy} \Rightarrow \frac{dE_p(y)}{dy} = 0$$

Donc $\boxed{E_p(x,y) = -\frac{1}{3}x^3y^3 + C}$

EXO S2 :



① Bilan des forces qui travaillent :

* $\vec{P} = m\vec{g}$ (Poids).
* $\vec{R}$ = Réaction du support (plan)
* $\vec{F_e} = -kx\vec{i}$ = Force élastique du ressort.

Les forces qui travaillent sont :

$$\begin{cases} \vec{P_x} = \vec{P}\sin\alpha = mg\sin\alpha\,\vec{i} \\ \vec{F_e} = -kx\vec{i} \end{cases}$$

Ces 2 forces dérivent des énergies potentielles gravitationnelle $E_{pg} = mgh$ pour $\vec{P}$ et élastique $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$ pour $\vec{F_e}$.

② O = origine (là où l'objet commence à comprimer le ressort).

$E_{pg} = mgh = mgL\sin\alpha$ ($E_{pg} = 0$ pour $h = 0$)

$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$ ($E_{pe} = 0$ pour $x = 0$)

③ Les énergies mécaniques : Il y a 3 cas :

* Au sommet du plan ($v_i = 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{ci} = 0 \\ E_{pi} = mgh = mgL\sin\alpha \end{cases}$$

$E_{mi} = E_{ci} + E_{pi} = mgL\sin\alpha$.

* L'objet atteint le butoir ($x = 0$)

$E_{pb} = 0$ car $h = 0$

$E_{mb} = E_{cb} + E_{pb} = mgL\sin\alpha$ (car $E_m = cte$).

* quand le ressort est comprimé :

Pour une compression maximale $\Rightarrow V_c = 0 \Rightarrow E_{cc} = 0$

$E_{pc} = 0$ car $h = 0$

$E_{mc} = E_{cc} + E_{pc} = E_{mi} = E_{mb} = E_{mc} = mgL\sin\alpha$.

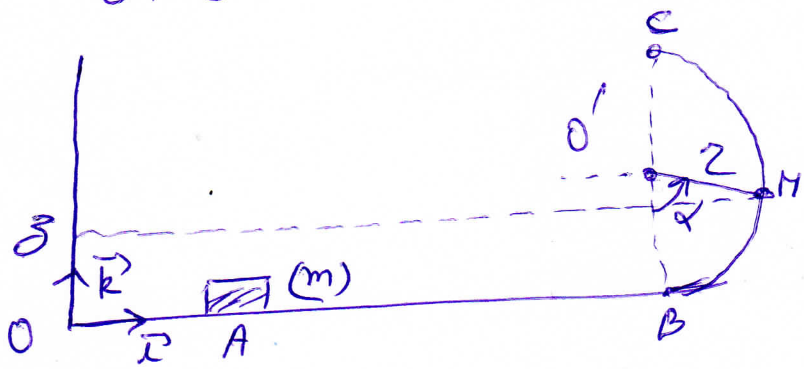
④ Compression max :

$x = x_{max} \Rightarrow$ Toute E_{mi} est transformée en E_{pe}.

$\Rightarrow mgL\sin\alpha = \frac{1}{2} k x_{max}^2$

$$\Rightarrow \boxed{x_{max} = \sqrt{\frac{2mgL\sin\alpha}{k}}}$$

Exo 3 : $m = 20g$, $g = 10 m/s^2$ (sans frottement)



① Energie potentielle :

$E_p = mgz$ (pour $z = 0$, on a $E_p = 0$: référence)

② Energie potentielle en M :

$E_p(M) = mgz_M = mgr(1-\cos\alpha)$ car $z = r - r\cos\alpha$
$z = r(1-\cos\alpha)$

③ $z_{max} = r(1-\cos\alpha_{max})$

$\alpha_{max} = \pi$ (point C) qui correspond à $\cos\pi = -1$.

$\Rightarrow z_{max} = r(1+1) = 2r$

et $E_{p max} = 2rmg$ (point C)

④ Energies mécaniques en A, B et C :

$E_m(A) = E_p(A) + E_c(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg\cancel{z_A} = \frac{1}{2} m v_A^2$

$E_m(B) = E_p(B) + E_c(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 + \cancel{mgz_B} = \frac{1}{2} m v_B^2$

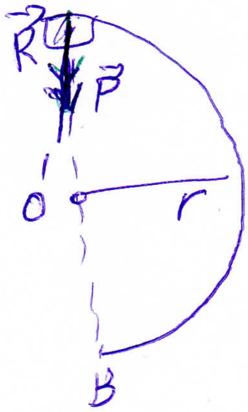
$E_m(C) = E_p(C) + E_c(C) = \frac{1}{2} m v_C^2 + 2rmg$.

⑤ Le solide parcourt la boucle (sans se détacher) pour $E_c(A) > 2mgr$?

Au point C on a :

$\vec{R} + \vec{P} = m\vec{a_n}$

$\Rightarrow R + mg = m\frac{v^2}{r}$



Le solide reste attaché à la boucle lorsque $R \geq 0 \Rightarrow mg$

$R \geq 0 \Rightarrow mg \leq \frac{mv^2}{r}$

$\Rightarrow \boxed{v \geq \sqrt{gr}}$

Donc pour que le solide ne quitte pas la boucle (faire 1 tour) la vitesse au pt C doit être $\geq \sqrt{gr}$.

$Em(A) = Em(C)$

$\Rightarrow Ec(A) + \cancel{Ep(A)} = \frac{1}{2}mv_c^2 + Ep(C)$

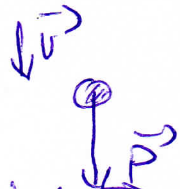
$\Rightarrow Ec(A) = \frac{1}{2}mv_c^2 + 2mgr = \frac{1}{2}mgr + 2mgr > 2mgr$

$\Rightarrow \boxed{Ec(A) > 2mgr}$

(6) $r = 1{,}5\,m$, $v_C = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = 2mgr$

$\Rightarrow v_A = 2\sqrt{gr} = 2\sqrt{10 \times 1{,}5}\ m/s.$

Exo 54 : $m = 1\,kg$, $h = 50\,m$, $v_0 = 10\,m/s$.



(1) $Ec_{(i)} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 100 = 50\,J$

(2) $Ec_{(S)} = \frac{1}{2}mv_S^2$

(3) $\vec{P} = m\vec{g}$ (Poids) et les frottements de l'air ($\vec{fr} = \vec{0}$)

$W(\vec{P}) = mgh$

$W(\vec{fr}) = 0$

(4) Théorème de l'énergie cinétique :

$\Delta Ec = \sum W(\vec{F_e}) \Rightarrow \Delta Ec = W(\vec{P}).$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$$

$$\Rightarrow v_s = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

$$\Rightarrow E_c(S) = \frac{1}{2} m v_s^2 = \frac{1}{2} m (v_0^2 + 2gh)^{1/2}$$

5 frottements : $fr = 1N$.

$$W(\vec{fr}) = + \vec{fr} \cdot \vec{h} = - fr \cdot h = -1 \times 50 = -50J$$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = W(\vec{fr}).$$

$$\Rightarrow E_m(S) - E_m(i) = W(\vec{fr})$$

$$E_m(S) = \frac{1}{2} m v_s^2 + mg\cancel{h_S} = \frac{1}{2} m v_s^2$$

$$E_m(i) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} \times 1 \times 100 + 1 \times 10 \times 50 = 550J$$

$$W(\vec{fr}) = E_m(S) - E_m(i)$$

$$= \frac{1}{2} m v_s^2 - 550J \Rightarrow \frac{1}{2} m v_s^2 = 550 - 50 = 500J$$

$$\Rightarrow v_s^2 = 1000 \Rightarrow \boxed{v_s = 10\sqrt{10}\ m/s}$$