Corrigé des exo supplémentaires de la série N°2

Exercice S1 :

Données : $a(t) = 6t - 4$ (m/s)

$x(t=0) = x_0 = 20$ m

$v(t=0) = v_0 = -15$ m/s

① $v(t)$ et $x(t)$?

* $a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a(t).dt$

$\Rightarrow v(t) = \int a(t).dt = \int (6t-4)\,dt = 3t^2 - 4t + c^{te}$

$v(0) = v_0 \Rightarrow C = v_0 = -15$ m/s

Donc : $\boxed{v(t) = 3t^2 - 4t - 15}$ (m/s)

* $v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \int v(t).dt \Rightarrow x(t) = \int v(t).dt$

$\Rightarrow x(t) = \int (3t^2 - 4t - 15)\,dt = t^3 - 2t^2 - 15t + C'$

$x(0) = 20 \Rightarrow C' = 20$ m.

Donc : $\boxed{x(t) = t^3 - 2t^2 - 15t + 20 \text{ (m)}}$

② M est immobile $\Rightarrow v(t) = 0$

$v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 4t - 15 = 0$

$\Delta = 16 - 4(3)(-15) = 196 = 14^2$

$t_1 = \frac{4+14}{6} = 3s$

$t_2 = \frac{4-14}{6} = -\frac{10}{6}$ s (exclue).

Donc M s'arrête à $t = 3s$.

A $t = 3s$, on a : $x(3s) = (3)^3 - 2(3)^2 - 15(3) + 20$

$$\Rightarrow x = -16 \text{ m}$$

M s'arrête à $t = 3s$ à $x = -16m$.

Exercice S2 :

On a comme données : $\vec{\gamma} = \gamma \vec{j}$ et $\vec{v}(0) = \vec{v_0} = v_0 \vec{i}$

$x(t=0) = 0$.

① Vecteur - vitesse :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\Rightarrow d\vec{v} = \vec{\gamma}.dt \Rightarrow \vec{v}(t) = \int \gamma \vec{j} dt = \gamma.t \vec{j} + \vec{cte}$.

A $t=0$, $\vec{v}(0) = \vec{v_0} = v_0 \vec{i} \Rightarrow \vec{cte} = v_0 . \vec{i}$

Donc $\boxed{\vec{v}(t) = \gamma t \vec{j} + v_0 \vec{i}}$.

② Vecteur - position :

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \Rightarrow d\vec{x}(t) = \vec{v}(t).dt \Rightarrow \vec{x}(t) = \int \vec{v}(t).dt$

$\vec{x}(t) = \int (\gamma t \vec{j} + v_0 \vec{i}) dt = \frac{\gamma t^2}{2} \vec{j} + v_0 t \vec{i} + \vec{c'}$.

à $t = 0$, $x(0) = 0 \Rightarrow \vec{c'} = \vec{0}$

Donc : $\boxed{\vec{x}(t) = \frac{\gamma t^2}{2} \vec{j} + v_0 t \vec{i}}$

Exercice S3 : $M(\rho(t), \theta(t))$ tq $\begin{cases} \rho(t) = 1 \\ \theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases}$

① Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \cos\left(\frac{\alpha t^2}{2}\right) \\ y(t) = \sin\left(\frac{\alpha t^2}{2}\right) \end{cases}$$

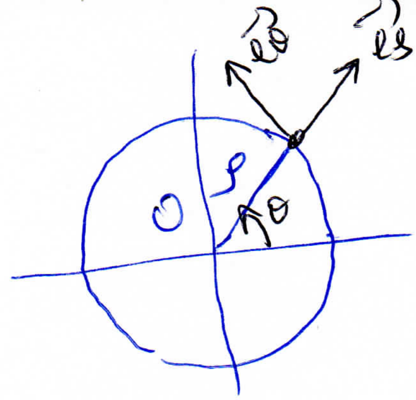
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = \cos^2 \frac{\alpha t^2}{2} \\ y^2 = \sin^2 \frac{\alpha t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \cos^2 \frac{\alpha t^2}{2} + \sin^2 \frac{\alpha t^2}{2} = 1$$

Donc $x^2 + y^2 = 1$ ou $(x-0)^2 + (y-0)^2 = R^2 = 1^2 = 1$.

c'est un cercle de rayon $R = 1m$ et de centre $O(0,0)$.

② *Vecteur position :

$$\vec{OM} = \vec{\rho} = \rho\,\vec{e_\rho} = \vec{e_\rho}.$$



*Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \alpha t\cdot\vec{e_\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \alpha . t\,\vec{e_\theta}}$$

* Vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha\,\vec{e_\theta} + \alpha t\,\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$

$$= \alpha\,\vec{e_\theta} + \alpha . t\,\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \alpha\,\vec{e_\theta} - \alpha t^2\vec{e_\rho}$$

Donc : $\boxed{\vec{a}(t) = \alpha\,\vec{e_\theta} - \alpha t^2\vec{e_\rho}}$

Les modules :

$$\|\vec{OM}\| = \rho = 1$$

$$\|\vec{v}\| = \alpha t$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 t^4} = \alpha\sqrt{1+t^4}.$$

③ Abscisse curviligne $s(t)$ si $s(0) = 0$.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt = \alpha t\,dt.$$

$$\Rightarrow s(t) = \int \alpha t\,dt = \frac{\alpha t^2}{2} + cte.$$

à $t = 0$, $s(0) = 0 \Rightarrow cte = 0$

Donc : $s(t) = \dfrac{\alpha t^2}{2}$

Exercice S4 : Données : $v(t) = \alpha t$; $\alpha > 0$.

① Relation entre v et θ :

$$v = R\dot{\theta} \Rightarrow v(t) = R\frac{d\theta}{dt} = \alpha t \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha}{R}t$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \int \frac{\alpha}{R}t\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{\alpha t^2}{2R} + \theta_0}$$

② Accélérations tangentielle et normale

$$\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} = \alpha\,\vec{u_t}$$

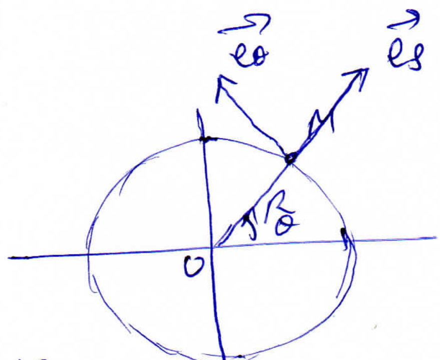
$$\vec{a_n} = \frac{v^2}{R}\vec{u_n} = \frac{(\alpha t)^2}{R} = \frac{\alpha^2 t^2}{R}\vec{u_n}.$$

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} \Rightarrow a^2 = a_t^2 + a_n^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha^2 t^2}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = \alpha^2\left(1 + \frac{\alpha^2 t^4}{R^2}\right)$$

$$\Rightarrow a(t) = \alpha\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^4}{R^2}}$$

③ Dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$



3.1 : Vecteur-position :

$$\vec{OM} = R\,\vec{e_\rho}$$

3.2 : Vecteur-vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = R\frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

or $\frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta} = \vec{e_\theta}$ et $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha}{R}t.$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = R.\vec{e_\theta}.\frac{\alpha}{R}t \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \alpha t\,\vec{e_\theta}}.$$

on constate que $\vec{u_t} = \vec{e_\theta}$.

3.3 : vecteur-accélération

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha\vec{e_\theta} + \alpha t\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \alpha\vec{e_\theta} + \alpha t\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

or $\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_\rho}$ et $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha}{R}t$

Donc $\vec{a}(t) = \alpha\vec{e_\theta} + \alpha.t(-\vec{e_\rho})\cdot\frac{\alpha}{R}t$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}(t) = -\frac{\alpha^2 t^2}{R}\vec{e_\rho} + \alpha\vec{e_\theta}}$$

Module : $a = \sqrt{\left(\frac{-\alpha^2 t^2}{R}\right)^2 + (\alpha)^2} = \alpha\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^4}{R^2}}$

On constate que le module de $\vec{a}$ est le même dans les 2 système de coordonnées.

Conclusion : Le module de $\vec{a}$ ou de $\vec{v}$ est indépendant du système de coordonnées utilisé.

Exercice 55 :

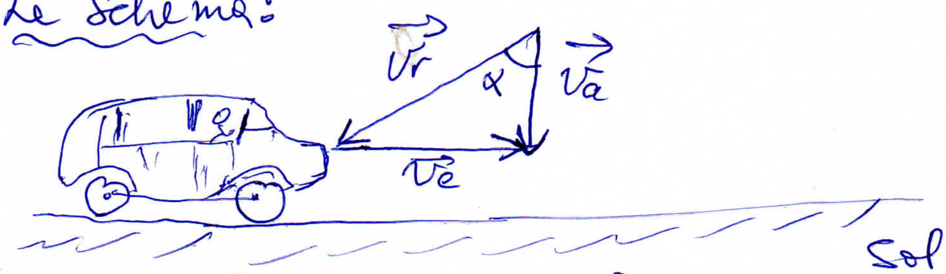
Les repères (Référentiels) :

* Le sol = repère absolu
* La voiture en mouvement = repère relatif.

Les vitesses :

* La vitesse de la neige par rapport au sol = vitesse absolue $= V_a = 8\,m/s$
* La vitesse de la voiture par rapport au sol = vitesse avec laquelle se deplace le référentiel relatif $= V_e$ = vitesse d'entraînement $= 50\,km/h$.
* La vitesse avec laquelle la neige tombe sur le parebrise de la voiture = vitesse de la neige par rapport à la voiture = vitesse relative $= V_r$ (à déterminer).

Le Schéma :



On a : $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$.

$$V_r^2 = V_e^2 + V_a^2$$
$$\Rightarrow V_r^2 = (13{,}88)^2 + (8)^2$$
$$\Rightarrow V_r^2 = 256{,}9\ m^2/s^2$$
$$\Rightarrow V_r = 16{,}03\ m/s.$$

$$V_e = 50\ km/h = \frac{500}{36}\ m/s = 13{,}88\ m/s$$

Direction : $tg\,\alpha = \frac{V_e}{V_a} = \frac{13{,}88}{8} = 1{,}735 \Rightarrow \alpha = arctg(1{,}735)$

$$\Rightarrow \alpha = 60°.$$

Donc la neige tombe sur le parebrise avec une vitesse de $16{,}03\ m/s$ sous un angle de $60°$ par rapport à la verticale (Dessin).

Exercice 56 :

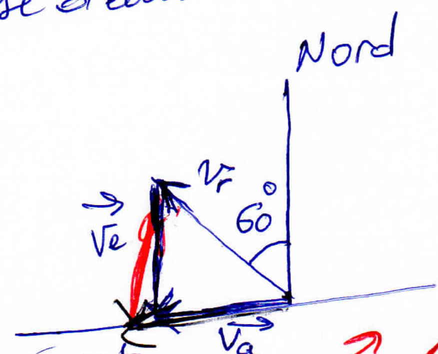
Les repères :

eau = repère relatif

Terre = repère absolu.

Les vitesses :

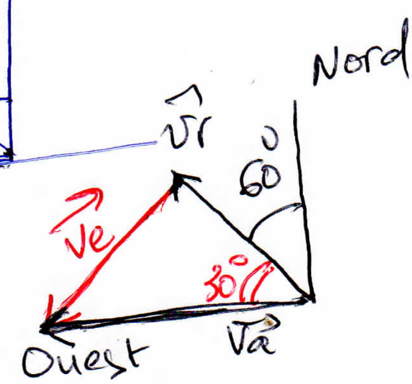
* La vitesse du bâteau par rapport à la Terre = $\vec{V_a}$.
* La vitesse du bâteau par rapport à l'eau = $\vec{V_r}$.
* La vitesse de l'eau = vitesse d'entraînement = $\vec{V_e}$.



On a : $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$

$V_r = 4 \, km/h$

$V_a = 5 \, km/h$



$\vec{V_e} = \vec{V_a} - \vec{V_r}$

$V_e^2 = V_a^2 + V_r^2 - 2 \vec{V_a} \cdot \vec{V_r}$

$= V_a^2 + V_r^2 - 2 V_a \cdot V_r \cos(\vec{V_a}, \vec{V_r})$

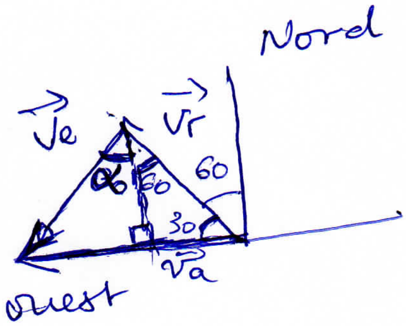
$= V_a^2 + V_r^2 - 2 \times 5 \times 4 \cos(30°)$

$= 25 + 16 - 2 \times 5 \times 4$

$= 10{,}39$

Donc $V_e = \sqrt{10{,}39} = 3{,}22 \, km/h$.

Direction :



$$tg\alpha_0 = \frac{V_a - V_r \cos 30°}{V_r \sin 30}$$

$$= \frac{5 - 4 \times \sqrt{3}/2}{4 \times 1/2}$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{3}}{2} = 0{,}768$$

$\Rightarrow \alpha_0 = \text{arc}\, tg(0{,}768) = 37{,}52°$

Donc l'eau coule à la vitesse de $3{,}22 \, km/h$

Dans la direction Sud-Ouest $(37{,}52°)$.