Série N°01

Exercice N°1 :

1. Déterminer les dimensions et les unités dans le système international (SI) des grandeurs physiques suivantes : Énergie cinétique, Puissance.

2. La vitesse d'un mobile dans un mieux fluide est donnée par la relation suivante :

$$v = v_0 e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Où $\boldsymbol{v_0}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont des constantes physiques. Trouver la dimension de $\boldsymbol{v_0}$ et $\boldsymbol{\tau}$, ainsi que leurs unités dans le système international.

3. Vérifier l'homogénéité des formules suivantes :

$$x = 3at^2 + vt + h\,;\, v = gx\cos(\omega t)$$

Où v est une vitesse, a une accélération, t un temps, g l'accélération de la pesanteur, ω une pulsation et , h des distances.

4. On considère un satellite de masse m effectuant une trajectoire circulaire de rayon R autour de la Terre de masse M.Soit T la période de révolution du satellite. Par analyse dimensionnelle, retrouver la 3ème loi de Kepler de la forme :

$$\frac{T^\alpha}{R^\beta} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

G est la constante gravitationnelle dont l'unité dans le système international (SI) est $m^3.\,kg^{-1}.\,s^{-2}$

- Trouver les valeurs de α et β.

Exercice N° 2 :

On considère, dans un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}\ ;\ \vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}\,;\ \vec{V}_3 = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1. Calculer leurs modules.

2. Représenter le vecteur $\vec{V}_1$

3. Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = \vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + 3\vec{V}_3$

4. Déterminer le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1$.

5. Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.

6. Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.

7. Calculer le produit mixte $\vec{V}_1.\,(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

Exercice N° 3 :

1. Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$(x,y,z)= 2x^2yz^3-3x^3y^2z$$

2. Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z)= (x^3y-2xz)\,\vec{\imath} +(y^3z-2yx)\,\vec{\jmath} +(z^3x-2zy)\,\vec{k}$$

3. Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}\,(x,y,z)= (2xy+z^3)\vec{\imath} +(x^2+2y)\vec{\jmath}+(3x\,z^2-2)\vec{k}$$

Exercices supplémentaires

Exercice S1

La masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ d'un cylindre de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{l}$ est donnée par la relation suivante

$$\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2}$$

- En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les deux constantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$;
- En déduire l'expression exacte de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

Exercice S2

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : (3,4,−4),B(6,8,3). Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Exercice S3

Soient les vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \vec{V}_2\begin{pmatrix}3\\3\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_3\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$:

1. Représenter dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le vecteur $\vec{V}_1$.
2. Calculer les modules de ces trois vecteurs.
3. Calculer $2\vec{V}_1 - 3\vec{V}_2 + 4\vec{V}_3$.
4. Déduire les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des directions de $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.
5. Calculer $\vec{V}_1.\vec{V}_2$, $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$, $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.
6. En considérant l'angle θ compris entre 0 et π, calculer $\cos\theta = \cos(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Calculer les composantes du vecteur $\vec{u}_{23} = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$. En déduire $\sin\theta$.

Exercice S4

a- Soient les trois points : $A(2,-3), B(3,0)$ et $C(-2,x)$

1. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer x pour que les trois points soient alignés.

b- Déterminer la valeur du nombre a pour laquelle les vecteurs $\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{V}_2 = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ soient perpendiculaires.

Exercice S5

Calculer le module, la première dérivée et la seconde dérivée de la fonction, de la variable t, suivante :

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + 2\right)\vec{\imath} + (e^{-\alpha t})\vec{\jmath} + (\cos(\omega t))\vec{k}(\alpha\ et\ \omega\ sont\ des\ constantes)$$

Calculer l'intégrale $\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt$ sachant que:

$\vec{v}(t) = (-2t + 3)\vec{\imath} + (3t^2)\vec{\jmath} + (\sin(\omega t) + e^{\alpha t})\vec{k}$ $(\alpha\ et\ \omega\ sont\ des\ constantes)$,sachant que $\vec{r}(0) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

Exercice S6

Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$V(x, y, z) = xyz + xy^2z + xyz^2$$

Calculer la divergence du champ vectoriel suivant:

$$\vec{E}(x, y, z) = (xyz)\vec{\imath} + (x + y + z)\vec{\jmath} + \left(\frac{xy}{z}\right)\vec{k}$$

Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant:

$$\vec{B}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{y}{z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{z}{x}\right)\vec{k}$$

Exercices d'application (A traiter en cours)

(Analyse dimensionnelle)

Exercice N°1

Ecrire les équations aux dimensions dans le SI des grandeurs suivantes : La vitesse v, la force F, le travail W, la pression P.

Exercice N°2

Vérifiez la cohérence dimensionnelle (homogénéité) des équations suivantes :

1. La Relation d'Einstein $E = mc^2$
2. L'énergie potentielle $E = mgh$

Exercice N°3

La formule de Stokes $F=6\pi a\eta v$ donne la norme de la force résistante qui s'exerce sur une sphère de rayon a,de vitesse v,dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité η.

2.1. Déterminer les dimensions de η.

2.2. Calculer pour l'eau à 20°C la valeur de η en unité SI, sachant que η=0.010 en unité CGS .

Exercice N°4

Une mole d'un gaz obéit à l'équation de Van der Waals :

$$(P+\frac{a}{V_m^2}).(V_m-b)=R.T$$

Où P est la pression du gaz, V_m le volume molaire et T la température absolue.

Déterminer les dimensions des constantes a, b et R.

Analyse vectorielle

Exercice N° 6

1- Soient les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ $définis\ par$: $\vec{V}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$, $\vec{V}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$

- Déterminer son module puis calculer $\vec{V}_1 . \vec{V}_1$.Conclure.

2- Démontrer que $\| \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \|$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs.

Exercice N° 7

On considère, dans un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix}3\\-4\\4\end{pmatrix}, \vec{V}_2\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix} \text{et } \vec{V}_3\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}$$

1- Calculer leurs modules.

2- Représenter le vecteur $\vec{V}_1$.

3- Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = \vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + 3\vec{V}_3$

4- Déterminer la composante du vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1$.

5- Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1 . \vec{V}_2$.

6- Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

Les opérateurs

Exercice N° 8

Dans la base cartésienne l'opérateur différentielle **nabla** ($\vec{\nabla}$) s'écrit :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{k}$$

Déterminer l'expression des opérateurs suivants :

- L'opérateur gradient : $\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f$
- L'opérateur divergence : $div\left(\vec{F}\right) = \vec{\nabla} . \vec{F}$
- L'opérateur rotationnel : $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$
- L'opérateur laplacien : $\Delta f = \vec{\nabla} . (\vec{\nabla} f)$

Où :

$f(x, y, z)$: est le champ scalaire.

$\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$:est le champ vectoriel.