Série N°02

Exercice 1

Un mobile M se déplace suivant une trajectoire rectiligne confondue avec l'axe $X'OX$. A un instant t, sa position est donnée par : $x(t) = -6t^2 + 7t - 2$. Déterminer :

1. Sa vitesse et son accélération.
2. Les instants où il passe par l'origine O.
3. Déterminer l'instant t où le mobile M s'arrête.
4. Les intervalles du temps durant lesquels il se déplace dans le sens des x positifs et négatifs.
5. Les intervalles du temps durant lesquels son mouvement est accéléré et retardé.

Exercice 2

Un point matériel M, se déplaçant dans le plan(Oxy), est repéré par ses coordonnées cartésiennes:

$$x(t) = t^2 - 1, \quad y(t) = 2t$$

1. Ecrire l'équation cartésienne de la trajectoire de M, puis déterminer sa nature.
2. Donner les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules ;
3. Quelle est la nature du mouvement de M ? Justifier ;
4. Donner les accélérations tangentielle et normale et déduire le rayon de courbure de la trajectoire ;
5. Calculer le sinus de l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{ox}, \vec{v}\right)$;

Exercice 3

Dans un plan (OXY), une particule M est repérée à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ, θ) telles que : $\begin{cases} \rho(t) = \mathrm{b}\cos(\omega t) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$ où b et ω sont des constantes positives.

1- Dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule M.

2- Toujours dans la même base, déterminer puis représenter les vecteurs position, vitesse et accélération aux instants $t_1 = 0s$ et $t_2 = \frac{\pi}{4\omega}s$.

Exercice 4

Dans le référentiel $\mathcal{R}(OXYZ)$ muni de la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, la position du point matériel M est donnée par les équations horaires suivantes d'une hélice:

$$x = R\cos(\omega t)\ ;\ y = R\sin(\omega t)\ ;\ z = \alpha t$$

Où R, ω et α sont des constantes positives.

1. Donner les coordonnées cylindriques du point matériel M ;
2. Dans la base locale des coordonnées cylindriques $\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k}\right)$, exprimer les vecteurs, position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du point matériel M ;
3. Quel est l'angle formé par les vecteurs, vitesse et accélération?
4. Calculer l'abscisse curviligne (t) du point M sachant que s (t=0) = 0 ;
5. Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération de M ;
6. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire de M ;
7. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ da la base de Frénet.

Exercice 5

Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans le plan. Les équations horaires sont, en coordonnées polaires :

$$r = r_0 e^{-\frac{t}{b}} \qquad \text{et} \quad \theta = \frac{t}{b}$$

Où r_0 et b sont des constantes positives.

1) Calculer le vecteur vitesse de la particule.

2) Montrer que l'angle $\alpha = (\vec{v},\vec{e_\theta})$ est constant. Que vaut cet angle ?

3) Calculer le vecteur accélération de la particule.

4) Montrer que l'angle $\beta = (\vec{a},\vec{u_n})$ est constant. Que vaut cet angle ?

5) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 6

Un nageur plonge d'un point situé sur la rive d'un fleuve et veut atteindre l'autre rive. Pour cela, il nage perpendiculairement au courant avec une vitesse ne vitesse $\vec{v_1}$. Sa vitesse par rapport à la terre est $\vec{v_3}$ et la vitesse du vent est $\vec{v_2}$. On demande :

1- Identifier chacune des vitesses $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ aux vitesses, absolue $\vec{v_a}$, relative $\vec{v_r}$ et d'entrainement $\vec{v_e}$.
2- Calculer la vitesse du nageur par rapport à la terre (module et direction). Faites un schéma.
3- a- suivant quelle direction le nageur doit-il s'orienté pour qu'il se déplace en ligne droite et perpendiculaire à la rive à la vitesse constante $\vec{v_3}$. Faites un schéma.
   b- Quelle est alors la vitesse du nageur par rapport à la terre.

   A.N.: v_1=4m/s, v_2=3m/s

Exercices supplémentaires

Exercice S1

Une particule P se déplace le long de l'axe x avec l'accélération a donné par :
$a = 6t - 4$ ms^{-2}
Initialement P est au point x_0= 20 m et se déplace à une vitesse de v_0= 15 ms^{-1} dans le sens négatif de x.

1- Trouver la vitesse et le déplacement de P à l'instant t.
2- Trouvez le temps et la position de la particule au moment où elle devienne immobile.

Exercice S2

Dans un référentiel $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le vecteur accélération d'un point matériel M est donné par : $\vec{\gamma} = \gamma\vec{\jmath}$ où γ est une constante.

Etablir les expressions des vecteurs vitesse et accélération du point M, sachant qu'à l'instant t=0 le point était à l'origine et animé d'une vitesse v_0 dirigée suivant l'axe (Ox).

Exercice S3

Dans un plan OXY, une particule M est repérée à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ, θ) telles que : $\begin{cases} \rho(t) = 1 \\ \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$ où α et une constante positive.

1- Trouver l'expression de l'équation de la trajectoire de M en coordonnées cartésiennes. Déduire sa nature.
2- Dans la base locale$(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule M. Déduire leurs modules
3- Calculer l'abscisse curviligne s(t) de M sachant qu'à l'instant t=0s, s(0)=0

Exercice S4

Un point matériel parcourt un cercle de rayon R à la vitesse $v = \alpha t$ où α est une constante positive.

1. Quelle est la relation entre v et la vitesse angulaire$\dot{\theta}$?
2. Trouver les composantes tangentiellea_t et normalea_n de l'accélération. En déduire la norme du vecteur accélération.
3. Dans la base vectorielle des coordonnées polaires $\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta\right)$:
3.1. Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$, le vecteur position du point matériel.
3.2. Déduire $\vec{v}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel.
3.3. Déterminer l'expression de $\vec{a}(M)$, le vecteur accélération du point matériel. En déduire la norme de ce vecteur. Comparer avec le résultat de 2. Conclure.

Exercice S5

Des flocons de neige tombent verticalement avec une vitesse de $8\ m.s^{-1}$.
Avec quelle vitesse et dans quelle direction ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant avec une vitesse de $50\ km.h^{-1}$ **.**

Exercice S6

Un bateau prend la mer en direction du Nord 60° Ouest $(N60°O)$ à la vitesse de $4\ km.h^{-1}$ par rapport à l'eau. La direction du courant d'eau est tel que le mouvement résultant par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l'Ouest à la vitesse de $5\ km.h^{-1}$.
Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau par rapport au sol.

Série N°2 (Corrigé)

Exercice 1 :

Axe : $x'Ox$.

$M(x)$ tq : $x(t) = -6t^2 + 7t - 2$ (équ. horaire)

① **Vitesse et accélération :**

$v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -12t + 7$ (en m/s)

$a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = -12$ (m/s²) = cte.

② **M passe par O** $\Rightarrow x(t) = 0 \Rightarrow -6t^2 + 7t - 2 = 0$

$\Delta = (7)^2 - 4(-6)(-2) = 49 - 48 = 1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{-7+1}{-12} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ (s)

$t_2 = \dfrac{-7-1}{-12} = \dfrac{2}{3}$ (s)

A $t = 0$, M se trouve point $x = -2$ m.
Le point M passe "2 fois" par O. La 1ère à $t_1 = 0{,}5$ s et la 2ème fois, à $t_2 = 0{,}666$ (s).

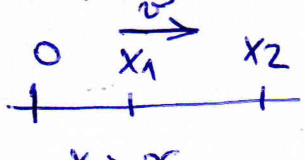
③ **Le mobile M s'arrête** $\Rightarrow v(t) = 0 \Rightarrow v(t) = -12t + 7 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{7}{12}$ (s).

④ **Le sens de déplacement** de M est généralement donné par le signe de sa vitesse.

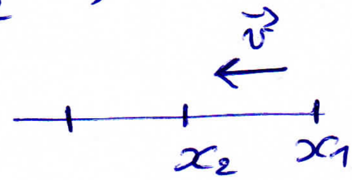
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

si $v > 0 \Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow$ M se déplace vers les x positifs

si $v < 0 \Rightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow$ " " " " " négatifs



$x_2 > x_1$



$x_2 < x_1$

$v(t) = -12t + 7$

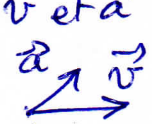
$t < \frac{7}{12}$ s $\Rightarrow v(t) > 0$

$t > \frac{7}{12}$ s $\Rightarrow v(t) < 0$

t	0		7/12		+∞
v(t)		+	0	−	
Sens		vers les x positifs		vers les x négatifs.	

⑤ **La nature du mvt** (accéléré ou retardé) est donnée par le signe du produit scalaire : $\vec{v}.\vec{a}$.

* Si $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont dans le même sens $\Rightarrow \vec{v}.\vec{a} > 0 \Rightarrow$ mvt accéléré
* Si $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont dans des sens opposés $\Rightarrow \vec{v}.\vec{a} < 0 \Rightarrow$ mvt retardé



$\vec{a}.\vec{v} > 0$
(accéléré)

$\vec{a}.\vec{v}$
(retardé)

On a : $a = -12$ m/s , $v = -12t + 7$

t	0		7/12		+∞
a(t)		−		−	
v(t)		+	0	−	
$\vec{a}.\vec{v}$		−		+	
Nature		mvt retardé		mvt accéléré	

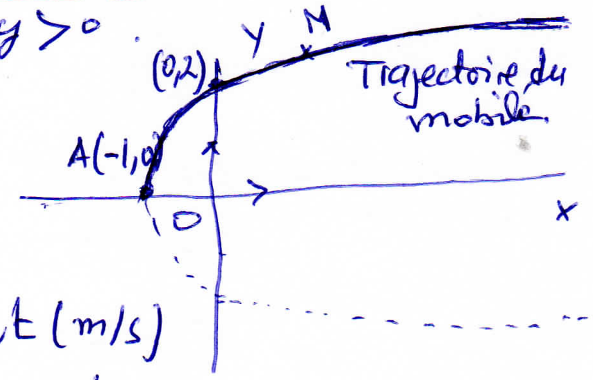
Exercice 2 : Plan (XOY). M tq $\begin{cases} x(t) = t^2-1 \\ y(t) = 2t \end{cases}$

① La trajectoire et sa nature :

$x = t^2 - 1 \Rightarrow t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y = 2\sqrt{x^2+1}$.

C'est l'equation d'une partie de la courbe parabolique d'equation $x = \frac{y^2}{4} - 1$ avec $y > 0$.

À $t=0$, le mobile se trouve au point $A(-1,0)$.



② Vitesse et accélération

* $\vec{v}(t) : \begin{cases} \dot{x}(t) = v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 2t\ (m/s) \\ \dot{y}(t) = v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 2\ m/s \end{cases}$

$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{4t^2+4} = 2\sqrt{t^2+1}\ (m/s)$

* $\vec{a}(t) : \begin{cases} \ddot{x}(t) = a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 2\ (m/s^2) \\ \ddot{y}(t) = a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = 0\ (m/s^2). \end{cases}$

$\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{4+0} = 2\ m/s^2 = cte.$

③ Nature du mvt : c'est un mvt curviligne uniformément varié (accéléré) car :

- La trajectoire est une courbe $\Rightarrow$ mvt curviligne
- $\vec{a} = cte \Rightarrow$ mvt uniformement varié
- $\vec{a}\cdot\vec{v} = 4t > 0 \Rightarrow$ mvt uniformément accéléré.

④ * Accélération tangentielle :

$\vec{a} = a_t \vec{u_t} + a_n \vec{u_n}$

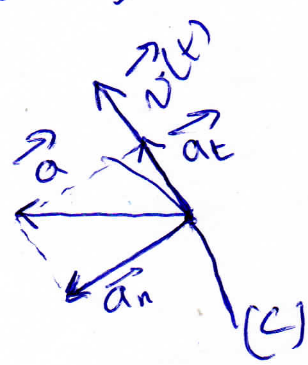
$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{t^2+1}\right) = 2 \times \frac{1}{2} \times 2t\ (t^2+1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\ (m/s^2)$

* Accélération normale :

$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} \Rightarrow a^2 = a_t^2 + a_n^2$

$\Rightarrow a_n^2 = a^2 - a_t^2 = (2)^2 - \left(\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2 = \frac{4}{t^2+1}\ (m/s^2)^2$

$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\sqrt{t^2+1}}\ (m/s^2).$



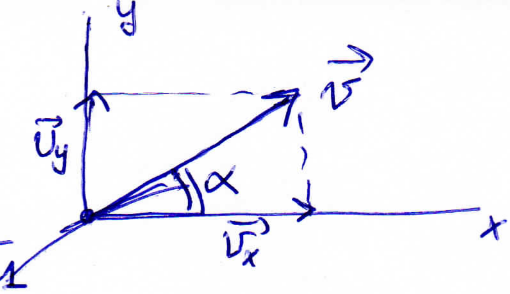
* Rayon de courbure :

$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4(t^2+1)}{\left(\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}\right)} = 2\,(t^2+1)^{3/2}$

$R(t) = 2\,(t^2+1)^{3/2}$

⑤ $\alpha = (\vec{v}, Ox) =$

$\sin\alpha = ?$



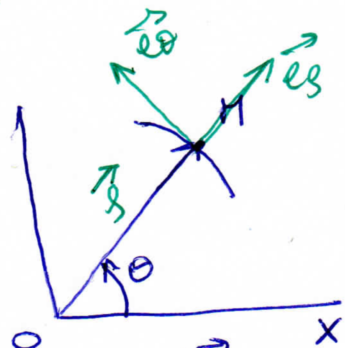
$$\sin\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{2}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

Exercice 3 :

Dans le plan (xOy) on a :

$$M : \begin{cases} \rho(t) = b\cos\omega t \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

Donc $\rho(\theta) = b\cos\theta$, $b = cte$, $\omega = cte$



① Les vecteurs position, vitesse et accélération dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.

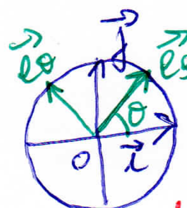
* $\vec{OM} = \vec{\rho} = \rho\,\vec{e}_\rho = \boxed{b\cos\omega t \cdot \vec{e}_\rho}$

$\|\vec{OM}\| = \rho = b\cos\omega t$.

* $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = (-b\omega\sin\omega t)\,\vec{e}_\rho + (b\cos\omega t)\cdot\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$

or : $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \cdot \omega$

$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\omega\,\vec{e}_\rho$



$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \vec{e}_\theta$

$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -\vec{e}_\rho$

Donc $\vec{v} = -b\omega\sin\omega t\,\vec{e}_\rho + b\omega\cos\omega t\,\vec{e}_\theta$

$$\boxed{\vec{v} = b\omega(-\sin\omega t\,\vec{e}_\rho + \cos\omega t\,\vec{e}_\theta)}$$

* $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = b\omega\left[-\omega\cos\omega t\,\vec{e}_\rho - \sin\omega t\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} - \omega\sin\omega t\,\vec{e}_\theta + \cos\omega t\cdot\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right]$

$\vec{a} = b\omega\left[-\omega\cos\omega t\,\vec{e}_\rho - \omega\sin\omega t\,\vec{e}_\theta - \omega\sin\omega t\,\vec{e}_\theta - \omega\cos\omega t\,\vec{e}_\rho\right]$

$$\boxed{\vec{a} = -2b\omega^2\left[\cos\omega t\,\vec{e}_\rho + \sin\omega t\,\vec{e}_\theta\right]}$$

Calculons l'angle $(\vec{a}, \vec{v})$:

on a : $\vec{a}\cdot\vec{v} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\vec{a},\vec{v}) = 2b\omega^2\sin\omega t\cos\omega t - 2b\omega^2\sin\omega t\cos\omega t$

$\vec{a}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (\vec{a},\vec{v}) = \pi/2 \ \forall t$. ($\vec{a}$ est toujours $\perp$ à $\vec{v}$)

$\|\vec{a}\| = 2b\omega^2$, $\|\vec{v}\| = b\omega$.

2. **Représentation à $t_1 = 0s$ et à $t_2 = \frac{\pi}{4\omega}s$.**

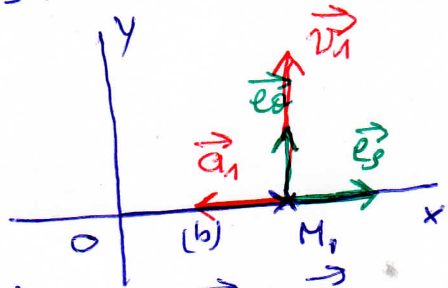
* Au temps $t_1 = 0s$ on a : $\theta_1 = 0°$, $\rho_1 = b$

Position : $\overrightarrow{OM_1} = \rho\,\vec{e_\rho} = b\,\vec{e_\rho}$

vitesse : $\vec{v_1} = b\omega\,\vec{e_\theta}$

accélération : $\vec{a_1} = -2b\omega^2\vec{e_\rho}$.

$\|\overrightarrow{OM_1}\| = b$, $\|\vec{v_1}\| = b\omega$, $\|\vec{a_1}\| = 2b\omega^2$



$\vec{a_1} \perp \vec{v_1}$

$\theta = 0° \Rightarrow$ le point M se trouve sur l'axe (Ox) :

* Au temps $t_2 = \frac{\pi}{4\omega}s \Rightarrow \theta_2 = \omega \cdot \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4}$ $\quad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\rho_2 = b\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}b.$

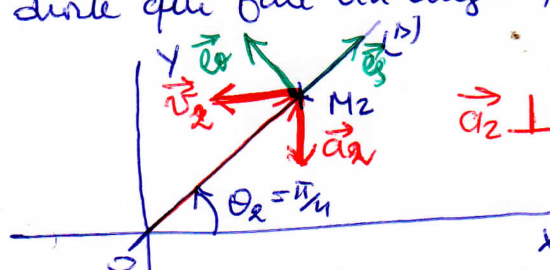
Position : $\overrightarrow{OM_2} = \rho_2\,\vec{e_\rho} = b\cos\frac{\pi}{4}\,\vec{e_\rho} = \frac{b\sqrt{2}}{2}\,\vec{e_\rho}$

vitesse : $\vec{v_2} = b\omega\left(-\sin\frac{\pi}{4}\,\vec{e_\rho} + \cos\frac{\pi}{4}\,\vec{e_\theta}\right) = \frac{b\sqrt{2}}{2}\omega\left(-\vec{e_\rho} + \vec{e_\theta}\right)$

Accélération : $\vec{a_2} = -2b\omega^2\left(\cos\frac{\pi}{4}\,\vec{e_\rho} + \sin\frac{\pi}{4}\,\vec{e_\theta}\right) = -\sqrt{2}\,b\omega^2\left(\vec{e_\rho} + \vec{e_\theta}\right)$

$\|\overrightarrow{OM_2}\| = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, $\|\vec{v_2}\| = b\omega$, $\|\vec{a_2}\| = 2b\omega^2$.

$\theta = \pi/4 \Rightarrow M_2$ se trouve sur la droite qui fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe (Ox).



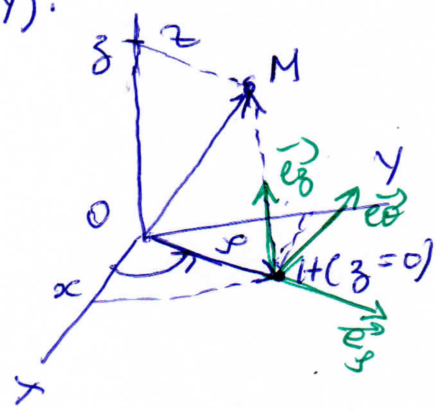
$\vec{a_2} \perp \vec{v_2}$

Exercice 4 :

* Les coordonnées cylindrique d'un point M sont (ρ, θ, z)

H = projection de M sur (XOY).

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OH}\| \\ \theta = (Ox, \overrightarrow{OH}) \\ z = HM \end{cases}$$



* La base locale associée à ces coordonnées est $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z} = \vec{k})$

$\vec{e_\rho}$ est $\perp$ à $\vec{e_\theta}$ et se trouvent dans le plan (XOY)

* Relations entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctg\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Données : $M : \begin{cases} x(t) = R\cos\omega t \\ y(t) = R\sin\omega t \\ z(t) = \alpha t \end{cases}$

① Coordonnées cylindriques de M :

$* \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t}$

$\rho = R\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = R$

$* \ tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{R\sin\omega t}{R\cos\omega t} = tg\,\omega t$

$\Rightarrow \theta = \omega t$

$* \ z = \alpha t$

② les vecteurs :

$*$ position : $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{k} = R\vec{e_\rho} + \alpha t\vec{k}$

$*$ vitesse : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \alpha\vec{k} = R\omega\vec{e_\theta} + \alpha\vec{k}$

$*$ accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\omega\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -R\omega^2\vec{e_\rho}$ (R, ω, α et $\vec{k}$ sont constants)

③ L'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{v}$:

$\|\vec{a}\| = R\omega^2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}$

$\vec{a}\cdot\vec{v} = \|\vec{a}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{a},\vec{v}) = (-R\omega, 0, 0)\cdot(0, R\omega, \alpha) = 0$

$\Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{v}) = 0 \Rightarrow (\vec{a},\vec{v}) = \pi/2$ ($\vec{a} \perp \vec{v}$).

④ L'abscisse curviligne $s(t)$:

$s(t) = \int v(t).dt = \int \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}.dt = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}.t + C$

$s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}.t$

⑤ Les accélérations tangentielle et normale :

$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} = a_t\vec{u_t} + a_n\vec{u_n}$

avec $a_t = \frac{dv}{dt}$

$a_n = \frac{v^2}{R_c}$

$v = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}$

Donc $a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \ m/s^2$

$\boxed{a_t = 0}$

$a^2 = a_n^2 + a_t^2$

$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = a^2 = R^2\omega^4$

$\Rightarrow \boxed{a_n = R\omega^2}$

⑥ Le rayon de courbure R_c :

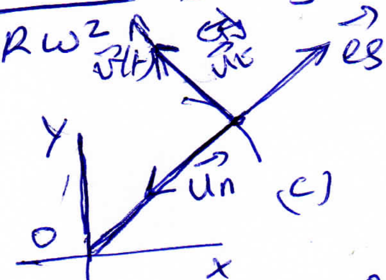
$a_n = \frac{v^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{R^2\omega^2 + \alpha^2}{R\omega^2} = R + \frac{\alpha^2}{R\omega^2}$

⑦ Les vecteurs unitaires $\vec{u_t}$ et $\vec{u_n}$.

On a : $\vec{v} = v \cdot \vec{u_t} \Rightarrow \vec{u_t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{R\omega \vec{e_\theta} + \alpha \vec{k}}{\sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}}$

$\Rightarrow \vec{u_t} = \left(\frac{R\omega}{\sqrt{R^2\omega^2+\alpha^2}}\right)\vec{e_\theta} + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{R^2\omega^2+\alpha^2}}\right)\vec{k}.$

$\vec{a_n} = a_n \vec{u_n} \Rightarrow \vec{u_n} = \frac{\vec{a_n}}{a_n} = \frac{-R\omega^2 \vec{e_\rho}}{R\omega^2} = -\vec{e_\rho}.$



Exercice 5 :

Les équations horaires en coordonnées polaires sont données par :

$r(t) = r_0 e^{-t/b}$, $\theta(t) = \frac{t}{b}$ $\quad b = cte$, $r_0 = cte$.

① Le vecteur vitesse de la particule :

$\vec{OM}(t) = \vec{r}(t) = r(t)\vec{e_r} = r_0 e^{-t/b}\vec{e_r}$ (avec $\vec{e_r} = \vec{e_\rho}$).

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{r_0}{b} e^{-t/b}\vec{e_r} + (r_0 e^{-t/b})\frac{d\vec{e_r}}{dt}$

or $\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \frac{1}{b} \cdot \vec{e_\theta}$

Donc : $\vec{v}(t) = -\frac{r_0}{b} e^{-t/b}\vec{e_r} + r_0 e^{-t/b} \cdot \frac{1}{b}\vec{e_\theta}$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{e_r} + \vec{e_\theta}\right)}$$

② $\alpha = (\vec{v}, \vec{e_\theta}) = cte$?

$\vec{v} \cdot \vec{e_\theta} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{e_\theta}\| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{e_\theta}) = \vec{v} \cdot \vec{e_\theta}$

avec : $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{r_0}{b} e^{-t/b} \\ r_0/b\, e^{-t/b} \end{pmatrix}$ et $\vec{e_\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

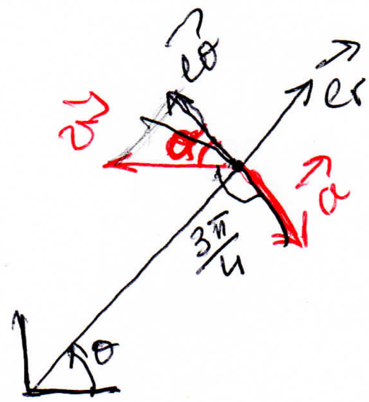
$$\|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{2}\, r_0}{b}\, e^{-t/b}$$

$$\|\vec{e_\theta}\| = 1$$

Donc $\vec{v} \cdot \vec{e_\theta} = \frac{\sqrt{2}\, r_0}{b}\, e^{-t/b} \cdot \cos(\vec{v}, \vec{e_\theta}) = \frac{r_0}{b}\, e^{-t/b}$

$$\Rightarrow \cos(\vec{v}, \vec{e_\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cte$$

Donc $(\vec{v}, \vec{e_\theta}) = \pm \pi/4 = cte.$



$$\vec{v} = \frac{r_0\, e^{-t/b}}{b}\left(-\vec{e_r} + \vec{e_\theta}\right)$$

$$tg\alpha = \frac{v_r}{v_\theta} = -1 \Rightarrow (\vec{v}, \vec{e_\theta}) = -\frac{\pi}{4}$$

Vecteur - accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{r_0}{b^2}\, e^{-t/b}\, \vec{e_r} - \frac{r_0}{b}\, e^{-t/b}\, \frac{d\vec{e_r}}{dt} - \frac{r_0}{b^2}\, e^{-t/b}\, \vec{e_\theta} + \frac{r_0}{b}\, e^{-t/b}\, \frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$

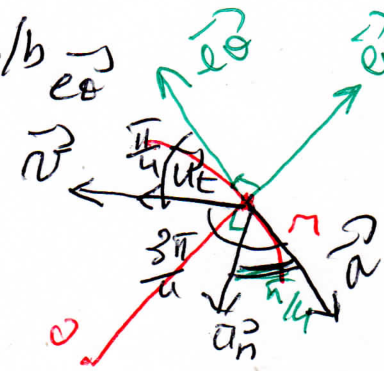
or $\begin{cases} \dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = \dfrac{1}{b}\, \vec{e_\theta} \\ \dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dfrac{1}{b}\, \vec{e_r} \end{cases}$

Donc $\vec{a}(t) = \cancel{\frac{r_0}{b^2}\, e^{-t/b}\, \vec{e_r}} - \frac{r_0}{b^2}\, e^{-t/b}\, \vec{e_\theta} - \frac{r_0}{b^2}\, e^{-t/b}\, \vec{e_\theta} - \cancel{\frac{r_0}{b^2}\, e^{-t/b}\, \vec{e_r}}$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{-2 r_0}{b^2}\, e^{-t/b}\, \vec{e_\theta}}$$

(4) $\beta = (\vec{a}, \vec{u_n}) = cte$?

on remarque que $\begin{cases} \vec{a} = -\dfrac{2 r_0}{b^2}\, e^{-t/b}\, \vec{e_\theta} \\ (\vec{v}, \vec{e_\theta}) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$



Donc $(\vec{a}, \vec{v}) < 3\pi/4$

D'autre part : $\vec{v} = v \cdot \vec{u_t} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{u_t}) = \frac{3\pi}{4}$

la base $(\vec{u_t}, \vec{u_n})$ est orthogonale

$\Rightarrow (\vec{u_t}, \vec{u_n}) = \pi/2$.

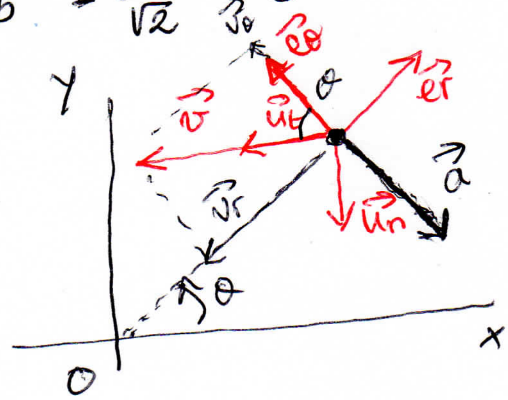
Donc $\boxed{(\vec{a}, \vec{u_n}) = \frac{\pi}{4}}$

5 Rayon de courbure?

On a : $a_n = \frac{v^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2r_0^2}{b^2} e^{-\frac{2t}{b}} / a_n$

$R_c = a \cos\beta = \frac{\cancel{2} r_0}{b^2} e^{-t/b} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{2}}{b^2} r_0 e^{-t/b}$

$R_c = \frac{2r_0^2 \cancel{e^{-2t/b}}}{\cancel{b^2} \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{b^2}} r_0 \cancel{e^{-t/b}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} r_0 e^{-t/b} = \sqrt{2} . r_0 e^{-t/b}$



Exercice 6 :

1 * Le bord de la rivière = Repère absolu

* Eau (courant) = Repère relatif.

* Nageur = mobile

* La vitesse du nageur par rapport à l'eau est la vitesse relative $\vec{v_r} = \vec{v_1}$

* La vitesse du nageur par rapport au bord de la rivière est la vitesse absolue $\vec{v_a} = \vec{v_3}$

* La vitesse de l'eau dans la rivière par rapport à la rive est la vitesse d'entraînement $\vec{v_e} = \vec{v_2}$

(2) $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$

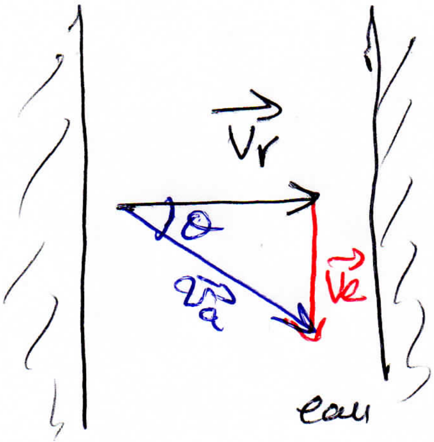
$\vec{V_3} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

$V_3^2 = V_1^2 + V_2^2$

$\Rightarrow V_3 = V_a = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$

$V_3 = \sqrt{16+9}$

$\boxed{V_3 = 5\ m/s}$



$tg\theta = \frac{V_e}{V_r} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = arctg(3/4) = 37°$.

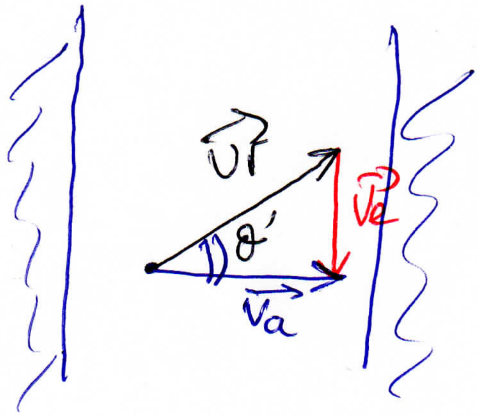
(3) On a toujours $\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$

$V_r^2 = V_a^2 + V_e^2$

$\Rightarrow V_a^2 = V_r^2 - V_e^2$

$\Rightarrow V_a = \sqrt{(4)^2 - (3)^2}$

$\boxed{V_a = \sqrt{7} = 2{,}64\ m}$



Direction

$tg\theta' = \frac{V_e}{V_a} = \frac{3}{2{,}64}$ ~~$= 48{,}6° = \theta'$~~

$\Rightarrow \theta' = arc\ tg(1{,}136) = 48{,}6°$