Série de TD n°01 (à traiter en 02 séances)

Exercice 1

I. Vérifiez la cohérence dimensionnelle des équations suivantes :

1. La Relation d'Einstein

$$E = mc^2$$

2. L'énergie potentielle

$$E = mgh$$

Où E, m, g et h sont respectivement une énergie, une masse, une accélération et une hauteur.

II. Etablir l'équation aux dimensions de la constante de gravitation G, sachant que la force gravitationnelle appliquée entre deux planètes est donnée par $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$, F la force, m_1 et m_2 la masse de la planète 1 et 2 et d la distance entre les deux planètes. Quelle est son unitée en SI.

Exercice 2

La masse volumique d'un cylindre de masse m, de rayon R et de hauteur h par la relation :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi h^y R^2}$$

1. En utilisant une analyse dimensionnelle, trouvez les valeurs des constantes x et y.

2. En déduire l'expression exacte de la masse volumique.

Exercice 3

On considère, dans un repère cartésien orthonormé$\mathcal{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k} \;;\; \vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k} \;;\; \vec{V}_3 = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1- Calculer leurs modules.

2- Représenter le vecteur $\vec{V}_1$.

3- Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = \vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + 3\vec{V}_3$.

4- Déterminer la composante du vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1$.

5- Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.

6- Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.

7- Calculer le produit mixte $\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$ et le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$.

Exercice 4:

Soit les fonctions vectorielles de la variable réelle t suivantes :

$$\vec{r}_1(t) = (3t^2)\vec{i} - (2t^2)\vec{j} + (t+1)\vec{k}$$

$$\vec{r}_2(t) = \cos(\omega t)\,\vec{i} - \sin(\omega t)\,\vec{j} + e^{-\alpha t}\vec{k}$$

Où α et ω sont des constantes réelles positives. Calculer :

- Leurs dérivées première et seconde par rapport à t ainsi que leurs modules.
- L'intégrale $\int \vec{r}_1(t)dt$ sachant que pour $t = 0s$, on a $\vec{r}_{10} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Exercice 05

- Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$U(x,y,z) = 2x^2yz + xyz$$

Evaluer $\overrightarrow{grad}U$ au point $M(1,-1,2)$.

- Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (x^3y - 2xz)\vec{i} + (y^3z - 2yx)\vec{j} + (z^3x - 2zy)\vec{k}$$

- Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\overrightarrow{W}(x,y,z) = (2xy)\vec{i} + (xy^2 + 1)\vec{j} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$$

Corrigé

Exercice 01

I.

1- On a $E = mc^2 \rightarrow [E] = [mc^2] \rightarrow [E] = [m][c]^2$

Le premier terme (à gauche) représente la dimension de l'énergie.
La dimension de l'énergie peut être obtenue partir de la relation physique de l'énergie cinétique :

$$E = E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] \rightarrow [E_c] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2$$

On a : $\begin{cases} [m] = M \\ [v] = LT^{-1} \rightarrow [v]^2 = L^2T^{-2} \\ \left[\frac{1}{2}\right] = 1 \end{cases}$

La dimension de l'énergie $[E] = [E_c] = ML^2T^{-2}$ (1)
La dimension du deuxième terme (à droite) :

$$[m][c]^2 = M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2} \qquad (2)$$

Nous remarquons que les deux équations (1) et (2) ont les mêmes dimensions, d'où l'homogénéité de l'équation.

2. La relation de l'énergie potentielle

$$E = mgh$$

S'écrite en analyse dimensionnelle sous la forme

$$[E] = [mgh] \rightarrow [E] = [m][g][h]$$

Les dimensions de la masse m, l'accélération de la pesanteur g et la hauteur h sont respectivement :

$$\begin{cases} [m] = M \\ [g] = LT^{-2} \\ [h] = L \end{cases}$$

$$[m][g][h] = ML^2T^{-2} \qquad (1)$$

De la question (1) on a $[E] = ML^2T^{-2}$ (2)
Donc, l'équation est homogène.

II. $F = G\frac{m_1m_2}{d^2} \rightarrow G = \frac{F\,d^2}{m_1m_2} \rightarrow [G] = \frac{[F][d]^2}{[m_1][m_2]} = \frac{MLT^{-2}L^2}{MM} = ML^3T^{-2}$ son unitée en SI

$$F = ma \rightarrow [F] = [m][a] = MLT^{-2}$$

Donc :$[G] = \frac{MLT^{-2}L^2}{MM} = ML^3T^{-2}$ son unitée en SI $\frac{kgm^3}{s^2}$

Exercice 2

1- $\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2} \rightarrow [\rho] = [m]^x[\pi]^{-1}[l]^{-y}[R]^{-2} = M^x 1 L^{-y}L^{-2} = M^xL^{-2-y}$

ρ est la masse volumique, sa relation générale est $\rho = \frac{m}{V}$, avec m la masse et V le volume.

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = ML^{-3}$$

Donc, $ML^{-3} = M^xL^{2-y}$. Par identification :

$$\begin{cases} x = 1 \\ -2 - y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}$$

2- $\rho = \frac{m^1}{\pi l^1 R^2} = \frac{m}{\pi l R^2}$

Exercice 03

1. $\|\vec{V}_1\| = \sqrt{41}$; $\|\vec{V}_2\| = \sqrt{29}$; $\|\vec{V}_3\| = \sqrt{35}$
2. Représentation de $\vec{V}_1$
3. $\vec{U} = \vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + 3\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix}$

$$\vec{U} = 14\vec{\imath} - 13\vec{\jmath} + 21\vec{k}$$

4. $\vec{v}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{3}{\sqrt{41}}\vec{\imath} - \frac{4}{\sqrt{41}}\vec{\jmath} + \frac{4}{\sqrt{41}}\vec{k}$

$$\vec{V}_1.\vec{\imath} = V_{1x} = \|\vec{V}_1\|\|\vec{\imath}\| \cos\alpha = \|\vec{V}_1\| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_{1x}}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{3}{\sqrt{41}} = v_{1x}$$

5. $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = -22 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \Rightarrow \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|} = -\frac{22}{\sqrt{1189}}$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} + 20\vec{\jmath} + 17\vec{k}$$

6. L'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs : $S = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \sqrt{612}\ u.s$

7. $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 51$

N.B. On peut aussi calculer $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ ensuite on fait le produit scalaire $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = 120\vec{\imath} + 656\vec{\jmath} - 776\vec{k}$$

Exercice 4:

$$\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} = (6t)\vec{\imath} - (4t)\vec{\jmath} + \vec{k}\ ;\quad \left\|\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\right\| = \sqrt{52t^2 + 1}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = 6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}\ ;\quad \left\|\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2}\right\| = \sqrt{52}$$

$$\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} = -\omega\sin(\omega t)\,\vec{\imath} - \omega\cos(\omega t)\,\vec{\jmath} - \alpha e^{-\alpha t}\vec{k} \;\; ; \;\; \left\|\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}\right\| = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2 e^{-2\alpha t}}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{\imath} + \omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + \alpha^2 e^{-\alpha t}\vec{k} \; ; \;\; \left\|\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2}\right\| = \sqrt{\omega^4 + \alpha^4 e^{-2\alpha t}}$$

$$\int \vec{r}_1(t)dt = \int \left[(3t^2)\vec{\imath} - (2t^2)\vec{\jmath} + (t+1)\vec{k}\right]dt = \left(\int (3t^2)dt\right)\vec{\imath} - \left(\int (2t^2)dt\right)\vec{\jmath} + \left(\int (t+1)dt\right)\vec{k}$$

$$= (t^3)\vec{\imath} - \left(\frac{2}{3}t^3\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\vec{k} + \vec{C}_1$$

Condition initiale :

$$t = 0 \;\Rightarrow \vec{r}_{10} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} = \vec{r}_1(t=0) = \vec{C}_1$$

On a finalement :

$$\int \vec{r}_1(t)dt = (t^3+1)\vec{\imath} - \left(\frac{2}{3}t^3 + 1\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right)\vec{k}$$

Exercice 05

$$\overrightarrow{grad}U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = (4xyz + yz)\vec{\imath} + (2x^2z + xz)\vec{\jmath} + (2x^2y + xy)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}U(M) = \overrightarrow{grad}U(1,-1,2) = -10\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 3(x^2y + y^2z + z^2x) - 2(x+y+z)$$

$$\overrightarrow{rot\vec{W}} = \vec{\nabla}\wedge\vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial W_z}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= 0\vec{\imath} - 3z^2\vec{\jmath} + (y^2 - 2x)\vec{k}$$