Corrigé

Exercice 1 :

L'expression de la force : $\vec{F} = b\cos(\omega t)\vec{\imath}$

Le vecteurs accélération : d'après le PFD : $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{b\cos(\omega t)\vec{\imath}}{m}$

Vecteur vitesse : $\vec{v}(t) = \int \vec{a}\,dt = \int \frac{b\cos(\omega t)}{m} dt\,\vec{\imath} = \frac{b}{m}\int \cos(\omega t)\,dt\,\vec{\imath} = \frac{b}{m\omega}\sin(\omega t)\,\vec{\imath} + \vec{C}_1$

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{b}{m\omega}\sin(\omega t) + C_{1x}\right)\vec{\imath} + C_{1y}\vec{\jmath}$$

Vecteur position : $\overrightarrow{OM}(t) = \int \vec{v}\,dt = \int \left(\left(\frac{b}{m\omega}\sin(\omega t) + C_{1x}\right)\vec{\imath} + C_{1y}\vec{\jmath}\right)dt = \left(-\frac{b}{m\omega^2}\cos(\omega t) + C_{1x}t\right)\vec{\imath} + C_{1y}t\vec{\jmath} + \vec{C}_2$

$\overrightarrow{OM}(t) = \left(-\frac{b}{m\omega^2}\cos(\omega t) + C_{1x}t + C_{2x}\right)\vec{\imath} + \left(C_{1y}t + C_{2y}\right)\vec{\jmath}$

Si on choisi les conditions aux limites de tel sorte que les constantes d'intégration seront nul (c-à-dire :$\vec{C}_1 = \vec{C}_2 = \vec{0}$)on trouve :

$$\overrightarrow{OM}(t) = -\frac{b}{m\omega^2}\cos(\omega t)\vec{\imath} \rightarrow \vec{a}(t) = -\omega^2\overrightarrow{OM}(t)$$

La quantité de mouvement : $\vec{P}(t) = m\vec{v}(t) = \left(\frac{b}{\omega}\sin(\omega t) + mC_{1x}\right)\vec{\imath} + mC_{1y}\vec{\jmath}$

Exercice 2 :

1. La valeur moyenne de la force gravitationnelle entre le Soleil et la Terre.

$$F_{S,T} = G\frac{M_S M_T}{r_{S,T}^2} \Rightarrow F_{S,T} = 6.67\ 10^{-11}\frac{m^3}{kg\ s^2}\frac{1.99\ 10^{30} * 5.98\ 10^{24}}{(1.495\ 10^{11})^2}\frac{kg^2}{m^2}$$

$$F_{S,T} = 3.551\ 10^{22}\ N$$

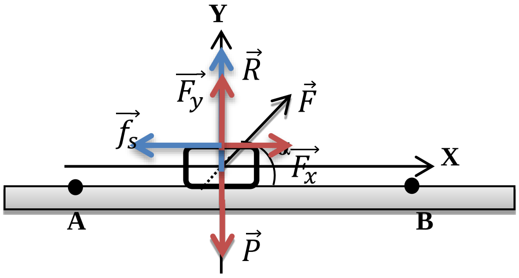
2. La valeur moyenne de la force gravitationnelle entre la Lune la Terre.

$$F_{L,T} = G\frac{M_L M_T}{r_{L,T}^2} \Rightarrow F_{L,T} = 6.67\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}\frac{7.36\ 10^{22} * 5.98\ 10^{24}}{(3.84\ 10^8)^2}\ \frac{kg^2}{m^2}$$

$$F_{L,T} = 1.99\ 10^{20}\ N$$

Exercice 3 :

Partie 1: A l'équilibre



1. Représentation des forces agissant sur la boite (voir la figure)
2. En appliquant le PFD sur la boite :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\,\vec{a} = \vec{0}\left(\vec{a} = \vec{0} : en\ équlibre\right) \Rightarrow \vec{F} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{f_s} = \vec{0}$$

3. La projection de l'équation vectorielle sur les axes (OX) et (OY)

$$\begin{cases} (OX):\ F_x - f_s = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ (OY):\ R + F_y - P = 0 \ldots\ldots\ldots & (2) \end{cases}$$

4. La valeur minimale de la force d'entrainement F_{min}

De (1) : $F_x = f_s = 8.66\,N \Rightarrow\ (F_x)_{min} = 8.66N$

$F_x = F\cos\theta \Rightarrow F = \frac{F_x}{\cos\theta} \Rightarrow F_{min} = \frac{(F_x)_{min}}{\cos\theta} = 10.38\,N$

5. Le coefficient de frottement statique μ_s

On a: $f_s = \mu_s R \Rightarrow \mu_s = \frac{f_s}{R}$

De (2) : $R = P - F_y = mg - F\sin\theta$

D'où : $\mu_s = \frac{f_s}{mg - F\sin\theta} \Rightarrow \mu_s \cong 0.2$

Partie 2 : En mouvement

Supposons que $(F = 12N) > F_{min}$

1. L'accélération a de la boite :

En appliquant le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\,\vec{a} \Rightarrow \vec{F} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{f_s} = m\,\vec{a}$$

Par projection :

$$\begin{cases} (OX):\ F_x - f_c = m\,a\ \Rightarrow\ a = \dfrac{F_x - f_c}{m} = \dfrac{F\cos\theta - \mu_c R}{m} \\ (OY):\ R + F_y - P = 0 \Rightarrow\ R = P - F_y = P - F\sin\theta \end{cases} \Rightarrow a = \frac{F\cos\theta - \mu_c(P - F\sin\theta)}{m}$$

$$\cong 1.22\,m.s^{-2}$$

2. Nature du mouvement

La trajectoire est rectiligne (suivant l'axe OX), et l'accélération constante $(a > 0)$, donc le mouvement est rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

3. Les expressions de sa vitesse $v(t)$ et son équation horaire $x(t)$

$$v(t) = a\,t + v_0 \Rightarrow v(t) = 1.22\,t \qquad x(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0\,t + x_0 \Rightarrow x(t) = 0.61\,t^2$$

4. Le temps t_b nécessaire à la boite pour qu'elle atteigne le point B

$$AB = \frac{1}{2}a{t_b}^2 = 0.61\, t^2 \Rightarrow t_b = \sqrt{\frac{AB}{0.61}} \cong 2.8\, s$$

Exercice 4 :

1. Représenter et écrire les différentes forces agissant sur le paquet :

Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

La réaction du plan incliné (force normale) : $\vec{R}$

Les forces de frottements cinétiques : $\vec{f_c} = -\mu_c \vec{R}$

2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_c} = m\vec{a}$$

3. Projeter cette équation vectorielle selon les deux axes X et Y, pour trouver les deux équations scalaires qui régissent le mouvement du paquet :

L'axe (OX) est parallèle au plan et l'axe (OY) lui est perpendiculaire.

$$\begin{cases} (OX) : \ P_x - f_c = ma_x \\ (OY) : R - P_y = ma_y \end{cases}$$

4. En déduire les expressions de la force de frottement et de la force normale (réaction) en fonction de m, g, μ_c et α :

Le mouvement s'effectue suivant l'axe (OX), par conséquent : $a_y = 0$; $a_x = a$

$$(OY): R - P_y = ma_y = 0 \Rightarrow R = P_y = mg\cos\alpha$$

$$f_c = \mu_c R = \mu_c mg\cos\alpha$$

5. L'expression de l'accélération a du paquet :

$$(OX) : \ P_x - f_c = ma \Rightarrow a = \frac{P_x - f_c}{m} = \frac{mg\sin\alpha - \mu_c mg\cos\alpha}{m} = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)$$

La trajectoire et l'accélération est constante et positive, par conséquent, le mouvement du paquet est rectiligne uniformément accéléré.

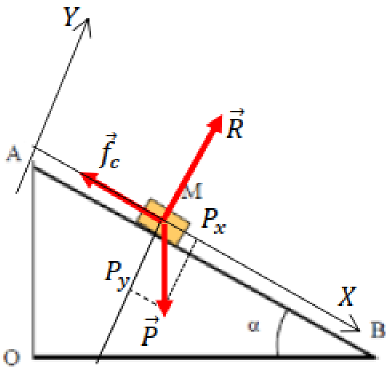
En déduire celle de sa vitesse $v(t)$:

$$v(t) = at + v_0$$

Condition initiale : $v(t=0) = 0 = v_0$

Par conséquent :

$$v(t) = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)t$$



6. Donner l'équation horaire $x(t)$ du paquet :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

On prend le point comme origine des distances :

$$x(t=0) = x_A = 0 = x_0$$

Par conséquent :

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)t^2$$

7. Le temps nécessaire au paquet pour qu'il atteigne le point B ?

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2}h$$

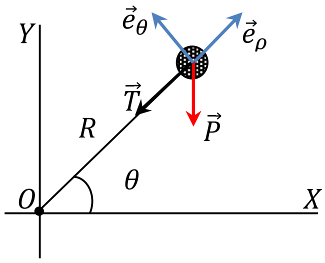
$$AB = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)t_{AB}^2 \Rightarrow t_{AB} = \frac{2AB}{g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}h}{g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)}$$

<u>Applications numériques :</u>

$$h = 4m\,;\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (\alpha = 45°)\,; g = 9.81\ m.s^{-2}\ ;\ \mu_c = 0.5$$

<u>Exercice 5 :</u>

1. Schéma et bilan de forces



2. L'expression de $\vec{a}(M)$dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Dans notre cas on a

$$\rho = R \rightarrow \dot{\rho} = 0 \rightarrow \ddot{\rho} = 0$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

3. l'équation vectorielle du mouvement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

4. Projection de l'équation vectorielle sur les deux axes de la base :

Projection sur $\vec{e}_\rho$:

$$-Psin\theta - T = ma_\rho \rightarrow -mgsin\theta - T = ma_\rho$$

$$-mgsin\theta - T = -mR\dot{\theta}^2 = -\frac{mv^2}{R} \rightarrow mgsin\theta + T = \frac{mv^2}{R}$$

Projection sur $\vec{e}_\theta$:

$$-Pcos\theta = ma_\theta \rightarrow gcos\theta = R\ddot{\theta} = a = \frac{dv}{dt}$$

5. l'équation obtenue suivant$\vec{e}_\theta$ décrit le mouvement. L'équation suivant $\vec{e}_\rho$ nous permet de déterminer la tension du fil T.

6. la tension du fil :

$$mgsin\theta + T = \frac{mv^2}{R} \rightarrow T = \frac{mv^2}{R} - mgsin\theta$$

7. La vitesse minimale v_{min} pour que la balle reste en trajectoire circulaire :

D'après la question précédente : $T = \frac{mv^2}{R} - mgsin\theta$

Pour $\theta = \pi/2$: $T = \frac{mv^2}{R} - mg$. Le fil reste tendu $T \geq 0 \rightarrow \frac{mv^2}{R} - mg \geq 0 \rightarrow v \geq \sqrt{gR} \rightarrow v_{min} = \sqrt{gR}$