Série N°01

Exercice N°1 :

1. Déterminer les dimensions et les unités dans le système international (SI) des grandeurs physiques suivantes : Énergie cinétique, Puissance.

2. La vitesse d'un mobile dans un mieux fluide est donnée par la relation suivante :

$$v = v_0 e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Où $\boldsymbol{v_0}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont des constantes physiques. Trouver la dimension de $\boldsymbol{v_0}$ et $\boldsymbol{\tau}$, ainsi que leurs unités dans le système international.

3. Vérifier l'homogénéité des formules suivantes :

$$x = 3at^2 + vt + h\,; v = gx\cos(\omega t)$$

Où v est une vitesse, a une accélération, t un temps, g l'accélération de la pesanteur, ω une pulsation et , h des distances.

4. On considère un satellite de masse m effectuant une trajectoire circulaire de rayon R autour de la Terre de masse M.Soit T la période de révolution du satellite. Par analyse dimensionnelle, retrouver la 3ème loi de Kepler de la forme :

$$\frac{T^\alpha}{T^\beta} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

G est la constante gravitationnelle dont l'unité dans le système international (SI) est $m^3.\,kg^{-1}.\,s^{-2}$

- Trouver les valeurs de α et β.

Exercice N° 2 :

On considère, dans un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}\ ;\ \vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}\,;\ \vec{V}_3 = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1. Calculer leurs modules.

2. Représenter le vecteur $\vec{V}_1$

3. Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = \vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + 3\vec{V}_3$

4. Déterminer le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1$.

5. Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.

6. Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.

7. Calculer le produit mixte $\vec{V}_1.\,(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

Exercice N° 3 :

1. Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$(x,y,z)= 2x^2yz^3-3x^3y^2z$$

2. Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z)= (x^3y-2xz)\,\vec{\imath} +(y^3z-2yx)\,\vec{\jmath} +(z^3x-2zy)\,\vec{k}$$

3. Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}\,(x,y,z)= (2xy+z^3)\vec{\imath} +(x^2+2y)\vec{\jmath}+(3x\,z^2-2)\vec{k}$$

Exercices supplémentaires

Exercice S1

La masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ d'un cylindre de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{l}$ est donnée par la relation suivante

$$\rho = \frac{m^{\boldsymbol{x}}}{\pi l^{\boldsymbol{y}} R^2}$$

- En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les deux constantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$;
- En déduire l'expression exacte de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

Exercice S2

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : (3,4,−4),B(6,8,3). Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Exercice S3

Soient les vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \vec{V}_2\begin{pmatrix}3\\3\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_3\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$:

1. Représenter dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le vecteur $\vec{V}_1$.
2. Calculer les modules de ces trois vecteurs.
3. Calculer $2\vec{V}_1 - 3\vec{V}_2 + 4\vec{V}_3$.
4. Déduire les expressions des vecteurs unitaires $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des directions de $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.
5. Calculer $\vec{V}_1.\vec{V}_2$, $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$, $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.
6. En considérant l'angle θ compris entre 0 et π, calculer $\cos\theta = \cos(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Calculer les composantes du vecteur $\vec{u}_{23} = \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$. En déduire $\sin\theta$.

Exercice S4

a- Soient les trois points : $A(2,-3)$, $B(3,0)$ et $C(-2,x)$

1. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer x pour que les trois points soient alignés.

b- Déterminer la valeur du nombre a pour laquelle les vecteurs $\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{V}_2 = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ soient perpendiculaires.

Exercice S5

Calculer le module, la première dérivée et la seconde dérivée de la fonction, de la variable t, suivante :

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + 2\right)\vec{\imath} + (e^{-\alpha t})\vec{\jmath} + (\cos(\omega t))\vec{k}(\alpha \ et \ \omega \ sont \ des \ constantes)$$

Calculer l'intégrale $\int \vec{v}(t)dt$ sachant que:

$\vec{v}(t) = (-2t + 3)\vec{\imath} + (3t^2)\vec{\jmath} + (\sin(\omega t) + e^{\alpha t})\vec{k}$ $(\alpha \ et \ \omega \ sont \ des \ constantes)$ sachant que $\vec{v}(0) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

Exercice S6

Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$V(x, y, z) = xyz + xy^2z + xyz^2$$

Calculer la divergence du champ vectoriel suivant:

$$\vec{E}(x, y, z) = (xyz)\vec{\imath} + (x + y + z)\vec{\jmath} + \left(\frac{xy}{z}\right)\vec{k}$$

Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant:

$$\vec{B}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{y}{z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{z}{x}\right)\vec{k}$$