

Série N°02

Exercice 1

Un mobile M se déplace suivant une trajectoire rectiligne confondue avec l'axe $X'OX$. A un instant t , sa position est donnée par : $x(t) = -6t^2 + 7t - 2$. Déterminer :

1. Sa vitesse et son accélération.
2. Les instants où il passe par l'origine O .
3. Déterminer l'instant t où le mobile M s'arrête.
4. Les intervalles du temps durant lesquels il se déplace dans le sens des x positifs et négatifs.
5. Les intervalles du temps durant lesquels son mouvement est accéléré et retardé.

Exercice 2

Un point matériel M , se déplaçant dans le plan (Oxy) , est repéré par ses coordonnées cartésiennes:

$$x(t) = t^2 - 1, \quad y(t) = 2t$$

1. Ecrire l'équation cartésienne de la trajectoire de M , puis déterminer sa nature.
2. Donner les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules ;
3. Quelle est la nature du mouvement de M ? Justifier ;
4. Donner les accélérations tangentielle et normale et déduire le rayon de courbure de la trajectoire ;
5. Calculer le sinus de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{ox}, \vec{v})$;

Exercice 3

Dans un plan (OXY) , une particule M est repérée à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ, θ) telles que :

$$\begin{cases} \rho(t) = b \cos(\omega t) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases} \quad \text{où } b \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives.}$$

- 1- Dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule M .
- 2- Toujours dans la même base, déterminer puis représenter les vecteurs position, vitesse et accélération aux instants $t_1 = 0s$ et $t_2 = \frac{\pi}{4\omega} s$.

Exercice 4

Dans le référentiel $\mathcal{R}(OXYZ)$ muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la position du point matériel M est donnée par les équations horaires suivantes d'une hélice:

$$x = R \cos(\omega t) ; y = R \sin(\omega t) ; z = \alpha t$$

Où R, ω et α sont des constantes positives.

1. Donner les coordonnées cylindriques du point matériel M ;
2. Dans la base locale des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$, exprimer les vecteurs, position \overrightarrow{OM} , vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} du point matériel M ;
3. Quel est l'angle formé par les vecteurs, vitesse et accélération ?
4. Calculer l'abscisse curviligne (s) du point M sachant que $s(t=0) = 0$;
5. Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération de M ;
6. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire de M ;
7. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires \vec{u}_t et \vec{u}_n de la base de Frénet.

Exercice 5

Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans le plan. Les équations horaires sont, en coordonnées polaires :

$$r = r_0 e^{\frac{t}{b}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{t}{b}$$

Où r_0 et b sont des constantes positives.

- 1) Calculer le vecteur vitesse de la particule.
- 2) Montrer que l'angle $\alpha = (\vec{v}, \vec{e}_\theta)$ est constant. Que vaut cet angle ?
- 3) Calculer le vecteur accélération de la particule.
- 4) Montrer que l'angle $\beta = (\vec{a}, \vec{u}_n)$ est constant. Que vaut cet angle ?
- 5) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 6

Un nageur plonge d'un point situé sur la rive d'un fleuve et veut atteindre l'autre rive. Pour cela, il nage perpendiculairement au courant avec une vitesse \vec{v}_1 . Sa vitesse par rapport à la terre est \vec{v}_3 et la vitesse du vent est \vec{v}_2 . On demande :

- 1- Identifier chacune des vitesses \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 aux vitesses, absolue \vec{v}_a , relative \vec{v}_r et d'entraînement \vec{v}_e .
- 2- Calculer la vitesse du nageur par rapport à la terre (module et direction). Faites un schéma.
- 3- a- suivant quelle direction le nageur doit-il s'orienter pour qu'il se déplace en ligne droite et perpendiculaire à la rive à la vitesse constante \vec{v}_3 . Faites un schéma.
b- Quelle est alors la vitesse du nageur par rapport à la terre.

A.N.: $v_1=4\text{m/s}$, $v_2=3\text{m/s}$

Exercices supplémentaires

Exercice S1

Une particule P se déplace le long de l'axe x avec l'accélération a donné par :

$$a = 6t - 4 \text{ ms}^{-2}$$

Initialement P est au point $x_0 = 20 \text{ m}$ et se déplace à une vitesse de $v_0 = 15 \text{ ms}^{-1}$ dans le sens négatif de x.

- 1- Trouver la vitesse et le déplacement de P à l'instant t.
- 2- Trouvez le temps et la position de la particule au moment où elle devienne immobile.

Exercice S2

Dans un référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, le vecteur accélération d'un point matériel M est donné par : $\vec{\gamma} = \gamma \vec{j}$ où γ est une constante.

Etablir les expressions des vecteurs vitesse et accélération du point M, sachant qu'à l'instant $t=0$ le point était à l'origine et animé d'une vitesse v_0 dirigée suivant l'axe (Ox).

Exercice S3

Dans un plan OXY , une particule M est repérée à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ, θ)

$$\text{telles que : } \begin{cases} \rho(t) = 1 \\ \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases} \quad \text{où } \alpha \text{ et une constante positive.}$$

- 1- Trouver l'expression de l'équation de la trajectoire de M en coordonnées cartésiennes. Déduire sa nature.
- 2- Dans la base locale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule M . Déduire leurs modules
- 3- Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ de M sachant qu'à l'instant $t=0$ s, $s(0)=0$

Exercice S4

Un point matériel parcourt un cercle de rayon R à la vitesse $v = \alpha t$ où α est une constante positive.

1. Quelle est la relation entre v et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$?
2. Trouver les composantes tangentielle a_t et normale a_n de l'accélération. En déduire la norme du vecteur accélération.
3. Dans la base vectorielle des coordonnées polaires $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$:
 - 3.1. Donner l'expression de \vec{OM} , le vecteur position du point matériel.
 - 3.2. Déduire $\vec{v}(M)$, le vecteur vitesse du point matériel.
 - 3.3. Déterminer l'expression de $\vec{a}(M)$, le vecteur accélération du point matériel. En déduire la norme de ce vecteur. Comparer avec le résultat de 2. Conclure.

Exercice S5

Des flocons de neige tombent verticalement avec une vitesse de $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Avec quelle vitesse et dans quelle direction ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant avec une vitesse de $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Exercice S6

Un bateau prend la mer en direction du Nord 60° Ouest ($N60^\circ O$) à la vitesse de $4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ par rapport à l'eau. La direction du courant d'eau est tel que le mouvement résultant par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l'Ouest à la vitesse de $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau par rapport au sol.