

Série de TD n°1

Exercice 1 :

1. Les formules suivantes sont-elles valides dimensionnellement ? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

$$(a) F = m \frac{v}{R}$$

Où F est une force, v est une vitesse et R une longueur.

$$(b) P = \rho g h_1 + h_2 \cdot F$$

Où P est une pression, g est l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 sont des hauteurs, F est une force et ρ la densité volumique.

2. Etablir l'équation aux dimensions de la constante de gravitation G , sachant que la force gravitationnelle appliquée entre deux planètes est donnée par $F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$, F la force, m_1 et m_2 la masse la planète 1 et 2 et d la distance entre les deux planètes. Quelle est son unité en SI.

Exercice 2 :

La période T d'un satellite terrestre ayant un mouvement circulaire autour de la terre peut dépendre, a priori, de la masse M_T de la Terre, du rayon R du cercle décrit et de la constante de la gravitation universelle G . On peut faire l'hypothèse que la période T a pour expression : $T = K M_T^a R^b G^c$ T où K est une constante sans dimension. Déterminer, par une analyse dimensionnelle, les valeurs de a , b etc. En déduire l'expression de la formule de la période T .

Exercice 3 :

On considère, dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} ; \vec{V}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{k} ; \vec{V}_3 = \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

- 1- Calculer leurs modules.
- 2- Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = 3\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 - 4\vec{V}_3$ et $\vec{w} = \|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\|^2$.
- 3- Déterminer la composante du vecteur unitaire porté par le vecteur \vec{V}_1 . Montrer qu'elles représentent les cosinus des angles (α, β, γ) que fait le vecteur \vec{V}_1 avec les axes Ox, Oy et Oz .
- 4- Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.
- 5- Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.
- 6- Trouver la composante de la projection de \vec{V}_3 suivant la direction de \vec{V}_1 .
- 7- Calculer le produit mixte $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.
- 8- Vérifier que $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$.

Exercice 4 :

Soit les fonctions vectorielles de la variable réelle t suivantes :

$$\vec{r}_1(t) = (3t^2)\vec{i} - (2t^2)\vec{j} + (t + 1)\vec{k}$$

$$\vec{r}_2(t) = \cos(\omega t)\vec{i} - \sin(\omega t)\vec{j} + e^{-\alpha t}\vec{k}$$

Où α et ω sont des constantes réelles positives. Calculer :

1. Leurs dérivées première et seconde par rapport à t ainsi que leurs modules.
2. L'intégrale $\vec{u}_1(t) = \int \vec{r}_1(t)dt$, sachant que pour $t = 0$, on a $\vec{u}_1(t = 0) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Exercice 5 :

- Calculer le gradient du champ scalaire suivant :

$$U(x, y, z) = 2x^2yz + xyz$$

Evaluer $\overrightarrow{\text{grad}}U$ au point $M(1, -1, 2)$.

- Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x, y, z) = (x^3y - 2xz)\vec{i} + (y^3z - 2yx)\vec{j} + (z^3x - 2zy)\vec{k}$$

- Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{W}(x, y, z) = (2xy)\vec{i} + (xy^2 + 1)\vec{j} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$$

Corrigé

Exercice 1 :

1- Homogénéité des formules :

Formule (a) :

$$F = ma \Rightarrow [F] = [m][a] = MLT^{-2} \dots (1)$$

$$F = \frac{mv}{R} \Rightarrow [F] = \frac{[m][v]}{[R]} = \frac{MLT^{-1}}{L} = MT^{-1} \dots (2)$$

Cette loi n'est pas homogène puisque (1) \neq (2).

Rectification :

$$MLT^{-2} = (MT^{-1}) \cdot \left(\frac{L}{T}\right)$$

Donc, on peut écrire :

$$F = \frac{mv}{R} v'$$

Où v' a la dimension d'une vitesse.

Formule (b) :

$$P = \rho g h_1 + h_2 \cdot F \Rightarrow [P] = [\rho][g][h_1] = [h_2][F]$$

$$P = \frac{F}{s} \Rightarrow [P] = \frac{[F]}{[s]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} \dots (1)$$

$$[\rho] = \left[\frac{m}{V}\right] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3} ; [g] = [a] = LT^{-2} ; [h_1] = L \Rightarrow [\rho][g][h_1] = ML^{-1}T^{-2} \dots (2)$$

$$[h_2][F] = LMLT^{-2} = ML^2T^{-2}$$

Cette équation n'est pas homogène : (1) = (2) \neq (3)

Pour rectifier cette formule, il faut multiplier le deuxième terme de la somme avec paramètre de dimension L^{-3} (inverse d'un volume). Par exemple :

$$P = \rho g h_1 + \frac{h_2 \cdot F}{V}$$

2- Les dimensions en unités de la constante de gravitation :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \Rightarrow G = \frac{F d^2}{m_1 m_2} \rightarrow [G] = \frac{[F][d]^2}{[m_1][m_2]} = \frac{MLT^{-2}L^2}{MM} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

Son unité SI est : $kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$

Exercice 2 :

On a :

$$T = K m^a R^b G^c \Rightarrow [T] = [k] \cdot [m]^a [R]^b [G]^c$$

Sachant que :

$$[T] = T, [k] = 1, [m] = M, [R] = L \text{ et } [G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

Il s'en suit que :

$$T = M^{a-c}L^{b+3c}T^{-2c}$$

Par identification, on obtient le système d'équations linéaires suivant !

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + 3c = 0 \\ -2c = 1 \end{cases}$$

Sa résolution, donne les valeurs des paramètres a, b et c :

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = 3/2 \\ c = -1/2 \end{cases}$$

Donc, on peut écrire l'équation :

$$T = k \frac{R^{3/2}}{(mg)^{1/2}} = K \sqrt{\frac{R^3}{Gm}} \quad (K = 2\pi)$$

Exercice 03 :

1- Les modules :

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\|\vec{V}_3\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

2- Les composantes :

$$3\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 - 4\vec{V}_3 = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 - 4\vec{V}_3 = 8\vec{i} + 17\vec{j} - 26\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\|^2 &= (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) = (-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = (-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

3- Vecteur unitaire :

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

Les cosinus directeurs :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{i}}{\|\vec{V}_1\| \|\vec{i}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = u_{Ax}; \quad \cos \beta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{j}}{\|\vec{V}_1\| \|\vec{j}\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = u_{Ay}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{k}}{\|\vec{V}_1\| \|\vec{k}\|} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = u_{Az}$$

4- Le produit scalaire : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 14$

L'angle entre les deux vecteurs :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|} = \frac{14}{15} \rightarrow \alpha = 21.04^\circ = 0.367 \text{ rad}$$

5- Le produit vectoriel :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

La surface du parallélogramme :

$$S = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \sqrt{16^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29}$$

6- La composante de la projection :

$$\vec{V}_3 \cdot \vec{u}_A = (\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \right) = 1/3$$

7- Produit mixte :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}) = 3$$

Double produit vectoriel :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 21\vec{i} - 9\vec{j} - 22\vec{k}$$

8- Vérification de la relation : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$

$$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -20\vec{i} - 13\vec{j} - 15\vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -20 & -13 & -15 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 70\vec{j} - 46\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 = (2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-5) + (-2) \cdot 3) \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = 14 \cdot \vec{V}_3 = 14\vec{i} - 70\vec{j} + 42\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = \vec{V}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{k} - (14\vec{i} - 70\vec{j} + 42\vec{k}) = -11\vec{i} + 70\vec{j} - 46\vec{k}$$

Alors :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$$

Exercice 4 :

Les première et seconde dérivées et leurs modules :

$$\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} = (6t)\vec{i} - (4t)\vec{j} + \vec{k} ; \left\| \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \right\| = \sqrt{52t^2 + 1}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = 6\vec{i} - 4\vec{j} ; \left\| \frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} \right\| = \sqrt{52}$$

$$\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} = -\omega \sin(\omega t)\vec{i} - \omega \cos(\omega t)\vec{j} - \alpha e^{-\alpha t}\vec{k} ; \left\| \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} \right\| = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2 e^{-2\alpha t}}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cos(\omega t)\vec{i} + \omega^2 \sin(\omega t)\vec{j} + \alpha^2 e^{-\alpha t}\vec{k} ; \left\| \frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} \right\| = \sqrt{\omega^4 + \alpha^4 e^{-2\alpha t}}$$

L'intégrale :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1(t) &= \int \vec{r}_1(t) dt = \int [(3t^2)\vec{i} - (2t^2)\vec{j} + (t+1)\vec{k}] dt \\ &= \left(\int (3t^2) dt \right) \vec{i} - \left(\int (2t^2) dt \right) \vec{j} + \left(\int (t+1) dt \right) \vec{k} \\ &= (t^3)\vec{i} - \left(\frac{2}{3}t^3 \right) \vec{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t \right) \vec{k} + \vec{C}_1 \end{aligned}$$

Condition initiale :

$$t = 0 \Rightarrow \vec{u}_1(t = 0) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \vec{C}_1$$

On a finalement :

$$\int \vec{r}_1(t) dt = (t^3 + 1)\vec{i} - \left(\frac{2}{3}t^3 + 1 \right) \vec{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1 \right) \vec{k}$$

Exercice 5 :

La gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = (4xyz + yz)\vec{i} + (2x^2z + xz)\vec{j} + (2x^2y + xy)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(M) = \overrightarrow{\text{grad}}U(1, -1, 2) = -10\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

La divergence :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 3(x^2y + y^2z + z^2x) - 2(x + y + z)$$

Le rotationnel :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot} W} = \vec{\nabla} \wedge \vec{W} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial W_z}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= 0\vec{i} - 3z^2\vec{j} + (y^2 - 2x)\vec{k} \end{aligned}$$