Interrogation N°1

Durée : 30 mn

Nom :.................................... Prénoms :.......................................Groupe :B1

Exercice N°1 :

Dans la base orthonormée $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les 3 vecteurs suivants : $\vec{A}(3,2,1)$, $\vec{B}(0,-4,4)$ *et* $\vec{C}(1,0,x)$. Calculer x pour que les 3 vecteurs $\vec{A},\vec{B}$ et $\vec{C}$ soient coplanaires (appartiennent à un même plan).

Exercice N°2 : Un bateau prend la mer en direction du nord-ouest (60°) à la vitesse de 4 km/h par rapport à l'eau. Le mouvement du bateau par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l'ouest à la vitesse de 5 km/h. Calculer la vitesse et la direction du courant.

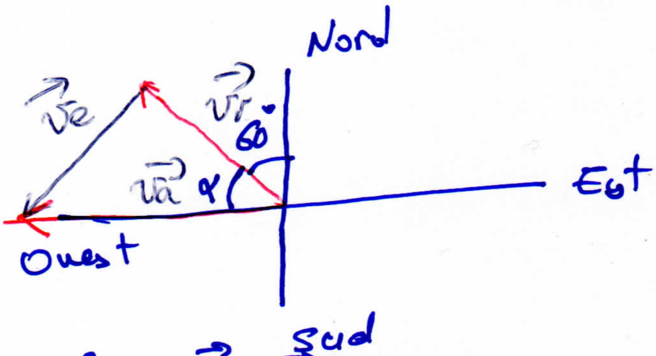
Exercice 1 : $\vec{A}(3,2,1)$, $\vec{B}(0,-4,4)$, $\vec{C}(1,0,x)$.

Les 3 vecteurs sont coplanaires ⇒ Ils ne peuvent pas former un volume ⇒ $V = 0$. ⇒ $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = 0$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 3(-4x) - 2(-4) + 1(+4) = 0$$

$$\Rightarrow -12x + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Exercice 2 :



$\alpha = 30°$

$v_r = 4\,km/h$

$v_a = 5\,km/h$

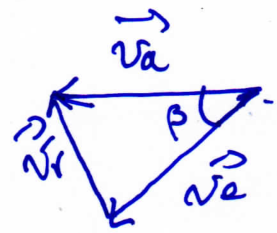
$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$

$\Rightarrow \vec{v_e} = \vec{v_a} - \vec{v_r} \Rightarrow v_e^2 = v_a^2 + v_r^2 - 2\,\vec{v_a}\cdot\vec{v_r}$

$\Rightarrow v_e^2 = 25 + 16 - 2 . 5 . 4 . \cos 30° = 6,35$

$\Rightarrow v_e = 2,52\,km/h$

Direction : Soit $\beta = (\vec{v_a}, \vec{v_e})$



$\vec{v_r} = \vec{v_a} - \vec{v_e}$

$\Rightarrow v_r^2 = v_a^2 + v_e^2 - 2 v_a . v_e . \cos\beta$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{v_a^2 + v_e^2 - v_r^2}{2\, v_a v_e} = \frac{25 + 6,35 - 16}{2 \times 2,52 \times 5} = 0,61 \Rightarrow \beta = 50,7°$$

Interrogation N°1 (/7.5)

Durée : 30 mn

Nom :....................................... Prénoms :.......................................Groupe :.....B3.............

Exercice N°1 : Soit un vecteur $\overrightarrow{V} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ suivant les coordonnées cartésiennes. Convertir ce vecteur en coordonnées polaires ?

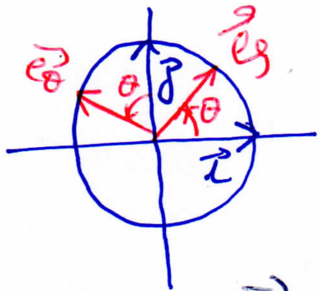
Exercice N°2 : Dans un repère cartésien (O, x, y), muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un point M en mouvement tel que :

$$\overrightarrow{OM} = (1 + \cos t)\vec{\imath} + \sin t\ \vec{\jmath}$$

1)- Déterminer la nature de la trajectoire de M ?

2)- Exprimer le vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes et déterminer son module

REPONSE



Exercice 1 : $\vec{V} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$

$$\begin{cases} \vec{e_\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta\,\vec{e_\rho} = \sin\theta\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin^2\theta\,\vec{\jmath} \\ \cos\theta\,\vec{e_\theta} = -\sin\theta\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos^2\theta\,\vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \vec{\jmath} = \sin\theta\,\vec{e_\rho} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\cos\theta\,\vec{e_\rho} = -\cos^2\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \sin\theta\,\vec{e_\theta} = -\sin^2\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{e_\rho} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

Donc $\vec{V} = 2(\cos\theta\,\vec{e_\rho} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}) - 3(\sin\theta\,\vec{e_\rho} + \cos\theta\,\vec{e_\theta})$

$$\boxed{\vec{V} = (2\cos\theta - 3\sin\theta)\,\vec{e_\rho} + (-2\sin\theta - 3\cos\theta)\,\vec{e_\theta}}$$

Exercice 2 : $\overrightarrow{OM} = (1+\cos t)\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}$

(1) $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

Equation d'un cercle de centre (1,0) et de rayon R=1

(2) $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{\jmath}$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$

Interrogation N°1

Durée : 30 mn

Nom :.. Prénoms :..Groupe :....B7.............

Exercice : Soit un mobile M en mouvement tel que :

$$\overrightarrow{OM} = 3\cos 2t\,\vec{\imath} + 3\sin 2t\,\vec{\jmath} + (8t-4)\vec{k}$$

1)- Déterminer la nature de la trajectoire de M dans l'espace (O, x, y, z) ?

2)- Exprimer $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques et déterminer leur module ?

3)- Trouver $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans la base locale$(\overrightarrow{u_n},\overrightarrow{u_t})$?

REPONSE

1

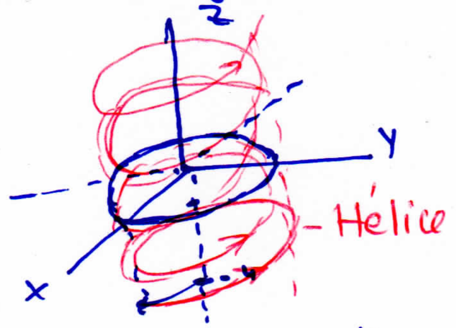
$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \\ z = 8t-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9\cos^2 2t \\ y^2 = 9\sin^2 2t \\ z = 8t-4. \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=9$$

Dans le plan (XOY), la trajectoire de M est le cercle de centre O et de rayon $\rho = 3$ m

Suivant (Oz), la trajectoire est une droite (mvt rectiligne):

$$z = 8t-4.$$

Dans l'espace, le mvt de M est hélicoïdal. Sa trajectoire est une hélice (suivant Oz)



2 $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{e_\rho} + (8t-4)\vec{k}$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 3\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + 8\vec{k}$$

$$= 3\cdot\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + 8\vec{k} = 6\overrightarrow{e_\theta} + 8\vec{k}$$

$$\theta = 2t \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 2$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{36+64} = 10\ m/s$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -12\overrightarrow{e_\rho} \Rightarrow \|\vec{a}\| = 12\ m/s^2$$

3

$$\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_t} = 10\,\overrightarrow{u_t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\overrightarrow{u_t} + v\cdot\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$

$$\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} = \vec{0} \Rightarrow a_t = 0\ m/s^2$$

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = a^2 = 144\ m^2/s^4$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_n} = 12\,\overrightarrow{u_n}$$

$$\begin{cases} \vec{v} = 10\,\overrightarrow{u_t} \\ \vec{a_t} = \vec{0} \\ \vec{a_n} = 12\,\overrightarrow{u_n} \end{cases}$$