Série de TD n°1 de Physique 1

Exercice 1 :

1. Ecrire l'équation aux dimensions d'une puissance. En déduire son unité dans le système international. quelle est son unité dérivée associée ? quelle est son symbole ? Quelle est son unité dans le système CGS ? Trouver le rapport entre les deux unités d'énergie.
2. L'année lumière est-elle une unité de temps ou de longueur ? quelle est sa valeur en unité SI ? comparer cette valeur à celle de l'unité astronomique couramment utilisée en astrophysique : 1UA = distance terre soleil $\sim 1.5\ 10^{11} m$.
3. Les expressions suivantes (où l_i représente une longueur, m_i une masse et t_i un temps) sont-elles homogènes, c'est-à-dire susceptibles d'être physiquement acceptables ?

$$a)\ m_1^2 - m_2 = m_3^3 \quad b)\ l_1 \sin t_1 = l_2 \sin t_2 \quad c)\ l_1 t_1^2 + \frac{l_2^2 t_2^3}{l_1 t_1} = \frac{l_1 t_1^3}{t_3} \quad d)\ m_1 \cos\left(\frac{l_1 t_2}{t_1 l_2}\right) = l_1 \exp\left(-\frac{t_1}{t_2}\right)$$

4. L'équation d'état d'un gaz parfait est $pV = nRT$, où p est la pression du gaz, V le volume qu'il occupe, n le nombre de mole de gaz et T sa température. Quelle est la dimension de R, constante universelle des gaz parfaits ? Quelle est son unité dans le système international ?
5. On suppose que la fréquence de vibration ν d'une corde tendue ne dépend que de la force de tension T, de la longueur l et de la masse m de cette corde. Déduire, par une analyse dimensionnelle, la loi de variation de cette fréquence en fonction des paramètres à une constante multiplicative k près (sans dimension).

Exercice 2 :

On considère les vecteurs :

$$\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}\ ;\ \vec{B} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\ ;\ \vec{C} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

1. Calculer leur module.
2. Calculer les composantes des vecteurs : $\vec{U} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$; $\vec{V} = \vec{A} + 2\vec{B} - 3\vec{C}$
3. Déterminer les vecteurs unitaires portés par le vecteur $\vec{A}$.
4. Calculer $\vec{A}.\vec{B}$ et $\vec{B} \wedge \vec{C}$.
5. Calculer le produit mixte $\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$ et le double produit vectoriel $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$.
6. Calculer l'angle α que fait le vecteur $\vec{A}$ avec les axes Ox.
7. Calculer l'ange β entre les deux vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Exercice 3 :

1. Soient $\vec{A} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}, \vec{B} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{C} = x\vec{\imath} + \vec{\jmath} + z\vec{k}$ trois vecteurs où x et z sont des nombres réels. Déterminer les valeurs de ces nombres pour que le vecteur $\vec{C}$ soit : a) Parallèle à $\vec{A}$; b) Parallèle à $\vec{B}$; c) Perpendiculaire à $\vec{A}$; d) Perpendiculaire à $\vec{B}$; e) Perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ au même temps.
2. Soit ABC un triangle où $AB = a, AC = b$ et $\alpha = (AB, AC)$. Calculer la longueur du coté BC.
3. Trouver la relation entre les paramètres réels x, y et z pour que les vecteurs suivants appartiennent au même plan :

$$\vec{A} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \ ; \ \vec{B} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k} \ ; \ \vec{C} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

On supposera que ces vecteurs ont la même origine O.

Exercice 4 :

Calculer la première et la seconde dérivée des fonctions vectorielles suivantes de la variable réelle t :

$$\vec{r}(t) = (2t+1)\vec{\imath} + (t^2 - 3t + 7)\vec{\jmath} + (t^3 + t^2 + t + t1)\vec{k}$$

Calculer la première dérivée de la fonction vectorielle suivante et son module :

$$\vec{r}(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\,\vec{\imath} + e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + t^2\vec{k}$$

Calculer $\int \vec{r}(t)dt$.

Exercice 5 :

- Calculer le gradient du champ scalaire suivant :

$$U(x,y,z) = xyz^2 + 3x^2y^4z^3 + 5x^3y^7z^5$$

- Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (xy + xz + yz)\vec{\imath} - (xy^2z^3)\vec{\jmath} - (x^2 + y^2 + z^2)\vec{k}$$

- Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{V}(x,y,z) = 3x^2y\,\vec{\imath} - 2yz^3\vec{\jmath} + x^2y\,\vec{k}$.
- Calculer le Laplacien du champ scalaire $U(x,y,z) = 3x^2y - 2y^2z^3 + x^3z^2$.
- Démontrer les relations suivantes : $div\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \Delta f$; $div\left(\overrightarrow{rot}\vec{V}\right) = 0$

Exercice 6 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = 0 \ ; \ \frac{dv}{dt} + \alpha v = \beta \ ; \ \frac{dv}{dt} + \alpha v^2 = 0$$

Où α et β sont des constantes réelles.

Exercice 7 :

Soient les vecteurs

$$\vec{u}(t) = \cos\theta(t)\,\vec{\imath} + \sin\theta(t)\,\vec{\jmath} \ ; \ \vec{v}(t) = -\sin\theta(t)\,\vec{\imath} + \cos\theta(t)\,\vec{\jmath}$$

1. Calculer leurs modules. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$. Conclure.
2. Calculer :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \ ; \ \frac{d\vec{v}}{dt}$$

3. Soit le vecteur $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}$. Calculer :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \ ; \ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Exercices supplémentaires

Exercice S1

L'analyse dimensionnelle a permis à Geoffrey Ingram Taylor d'estimer en 1950 l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe atomique, alors que cette information était classée top secret. Il lui a suffit pour cela d'observer sur un film d'explosion, imprudemment rendu public par les militaires américains, que la dilatation du champignon atomique suivait la loi expérimentale de proportionnalité :

$$r = K.E^a.\rho^b.t^c$$

Où K est une constant sans dimensions. Le physicien Taylor suppose alors a priori que le processus d'expansion de la sphère de gaz dépend au minimum des paramètres suivants : Le temps t, l'énergie E dégagée par l'explosion, la masse volumique de l'air ρ et le rayon atomique de la sphère r. L'analyse dimensionnelle le conduit alors au rayon de la sphère de gaz à l'instant t. Retrouver la loi de Taylor qui donne l'expression exacte de E.

Exercice S2

1. La pression exercée sur une surface solide est donnée par

$$P = \frac{F}{S}$$

Où F est la force et S la surface du solide. Par une analyse dimensionnelle, trouver la dimension de la pression.

2. La pression hydrostatique sous une colonne de fluide de hauteur h et de masse volumique ρ est donnée par :

$$P = \rho^a g^b h^c$$

Trouver les valeurs de a, b et c par une analyse dimensionnelle. En déduire l'expression exacte de la pression.

Exercice S4

Dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(Oxyz)$, on considère les vecteurs suivants:

$$\vec{V}_1 = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \; ; \; \vec{V}_2 = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k} \; ; \; \vec{V}_3 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k} \; ; \vec{V}_4 = 2\vec{\imath} - \vec{k}$$

1- Représenter les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
2- Calculer le module du vecteur $\vec{V}_1$ et du vecteur $\vec{V}_2$.
3- Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = 3\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 - 4\vec{V}_3$ et $w = \left\|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right\|^2$.
4- Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.
5- Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.
6- Montrer que le vecteur $\vec{V}_3$ est perpendiculaire au plan (P) formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
7- Montrer que le vecteur $\vec{V}_4$ appartient au plan (P).

8- Déterminer le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

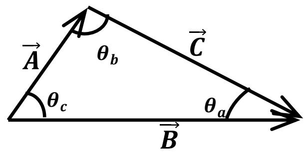
9- Trouver la composante de la projection de $\vec{V}_3$ suivant la direction de $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$.

10- Calculer le produit mixte $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

11- Vérifier que $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3).\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2).\vec{V}_3$.

Exercice S4

Soit un triangle quelconque formé par les trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ respectivement



En utilisant le produit scalaire et le produit vectoriel. Déterminer :

1- la loi des cosinus $\|\vec{A}\|^2 = \|\vec{B}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 - 2.\|\vec{B}\|.\|\vec{C}\|.\cos(\theta_a)$.

2- la loi des sinus $\frac{\|\vec{A}\|}{\sin(\theta_a).} = \frac{\|\vec{B}\|}{\sin(\theta_b).} = \frac{\|\vec{C}\|}{\sin(\theta_c).}$

Exercice S5

Soit le vecteur $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ son module $\|\vec{r}\| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ montrer que:

- $\overrightarrow{grad}(r^2) = 2\vec{r}$
- $\overrightarrow{grad}(1/r) = -\vec{r}/r^3$
- $\overrightarrow{grad}(r^n) = nr^{n-2}\vec{r}$

Exercice S8

Calculer le gradient du champ scalaire suivant :

$$V(x,y,z) = 6xy - 2xz + z$$

Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{E}(x,y,z) = (x^2y)\vec{\imath} + x\vec{\jmath} + (2yz)\vec{k}$$

Quelle est sa valeur au point $P(-3,4,2)$

Calculer $\overrightarrow{rot}(\vec{B})$ puis calculer $\overrightarrow{d\imath v}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right)$du champ vectoriel suivant :

$$\vec{B}(x,y,z) = (x^2y)\vec{\imath} + (y^2z)\vec{\jmath} - (2xz)\vec{k}$$

Corrigé

Exercice 1 :

1- La puissance $P = \frac{w}{t}$, w : le travail fournie, t : le temps

$$[P] = \left[\frac{w}{t}\right] = \frac{[w]}{[t]}$$

Le travail $w = F.d \rightarrow [w] = [F.d] = [F].[d]$

La force $F = ma \rightarrow [F] = [ma] = [m].[a] = MLT^{-2}$

$$[w] = MLT^{-2}.L = ML^2T^{-2}$$

$$[P] = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}$$

L'unité de la puissance en SI est Kgm^2s^{-3} son unité dérivée est le watt son symbole w.

L'unité de la puissance en CGS est gcm^2s^{-3}

Le rapport entre l'unité de la puissance en SI et CGS

$$\frac{Kgm^2s^{-3}}{gcm^2s^{-3}} =.\frac{1000g(100cm)^2s^{-3}}{gcm^2s^{-3}} = 10^7$$

2- Année lumière est une distance, elle représente la distance parcourue par la lumière pendant une année.

$$1 \text{ Année lumière} = 3\ 10^8 * 360 * 24 * 3600 = 9.3312\ 10^{15}\text{m}$$

$$\frac{1 \text{ Année lumière}}{1\text{UA}} = \frac{9.3312\ 10^{15}}{1.5\ 10^{11}} = 6.2208\ 10^4$$

3-

$a)$ $m_1^2 - m_2 = m_3^3$ n'est pas homogène puisque on ne peut additionner ou soustraire que les grandeurs qui ont la même dimension.

$$[m_1^2] = M^2;\ [m_2] = M\ et\ [m_3^3] = M^3$$

$b)$ $l_1 \sin t_1 = l_2 \sin t_2$

$[l_1] = [l_2] = L$; $[t_1] = [t_2] \neq 1$

L'équation n'est pas homogène puisque la dimension des arguments de la fonction sin sont différent de 1.

$c)$ $l_1 t_1^2 + \frac{l_2^2 t_2^3}{l_1 t_1} = \frac{l_1 t_1^3}{t_3}$

L'équation est homogène si $[l_1 t_1^2] = \left[\frac{l_2^2 t_2^3}{l_1 t_1}\right] = \left[\frac{l_1 t_1^3}{t_3}\right]$

$[l_1 t_1^2] = [l_1][t_1^2] = [l_1][t_1]^2 = LT^2$ (1)

De même :

$\left[\frac{l_2^2 t_2^3}{l_1 t_1}\right] = \frac{[l_2^2 t_2^3]}{[l_1 t_1]} = \frac{[l_2]^2 [t_2]^3}{[l_1][t_1]} = LT^2$ (2)

$\left[\frac{l_1 t_1^3}{t_3}\right] = \frac{[l_1 t_1^3]}{[t_3]} = \frac{[l_1][t_1]^3}{[t_3]} = LT^2$ (3)

$(1) = (2) = (3) \rightarrow l'équation\ est\ homogène$

$d)\ m_1 \cos\left(\frac{l_1 t_2}{t_1 l_2}\right) = l_1 \exp\left(-\frac{t_1}{t_2}\right)$

L'équation est homogène si : $\left[m_1 \cos\left(\frac{l_1 t_2}{t_1 l_2}\right)\right] = \left[l_1 \exp\left(-\frac{t_1}{t_2}\right)\right]$

$\left[m_1 \cos\left(\frac{l_1 t_2}{t_1 l_2}\right)\right] = [m_1]\left[\cos\left(\frac{l_1 t_2}{t_1 l_2}\right)\right] = M$ (1)

$\left[l_1 \exp\left(-\frac{t_1}{t_2}\right)\right] = [l_1]\left[\exp\left(-\frac{t_1}{t_2}\right)\right] = L$ (2)

$(1) \neq (2) \rightarrow l'équation\ n'est\ pashomogène$

4-

$$pV = nRT \rightarrow R = \frac{pv}{nT} \rightarrow [R] = \frac{[p][V]}{[n][T]}$$

$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} ML^{-1}T^{-2}$, $[V] = L^3$, $[n] = N$, $[T] = \Theta$

$$[R] = \frac{ML^{-1}T^{-2}L^3}{N\Theta} = \frac{ML^2T^{-2}}{N\Theta}$$

Son unité est $\frac{kgm^2s^{-2}}{mol\ K°} = \frac{joul}{mol\ K°}$

5- On propose d'écrite la fréquence sous la forme

$\nu = k\ T^a l^b m^c$ avec k une constante numérique.

$$[\nu] = [k][T]^a[l]^b[m]^c$$

$\nu = \frac{1}{temps} \rightarrow [\nu] = \frac{1}{T} = T^{-1}$

$$[k] = 1$$

Le tension di fil T, est une force donc sa dimension est $[T] = MLT^{-2}$

$$[l] = L,\ \ [m] = M$$

$$[k][T]^a[l]^b[m]^c = (MLT^{-2})^a L^b M^c = M^{c+a} L^{b+a} T^{-2a}$$

Donc :

$$T^{-1} = M^{c+a}L^{b+a}T^{-2a}$$

Par identification :

$$\begin{cases} c + a = 0 \\ b + a = 0 \\ -2a = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -a = -1/2 \\ b = -a = -1/2 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

$$\nu = k\, T^{1/2} l^{-1/2}\, m^{-1/2} = k\sqrt{\frac{T}{lm}}$$

Exercice 02 :

1. $\|\vec{A}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, $\|\vec{B}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$, $\|\vec{C}\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{34}$
2. $\vec{U} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc,

$$\vec{U} = 9\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

$$\vec{V} = \vec{A} + 2\vec{B} - 3\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = -4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + 8\vec{k}$$

3. $\vec{u} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = 2/\sqrt{14}\,\vec{\imath} + 3/\sqrt{14}\vec{\jmath} - 1/\sqrt{14}\vec{k}$
4. $\vec{A}.\vec{B} = -1$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 9\vec{\imath} + 13\vec{\jmath} - \vec{k}$$

5. $\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 58\, u.v.$

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 9 & 13 & -1 \end{vmatrix} = 10\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - \vec{k}$$

6. $cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{\imath}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{\imath}\|} = 2/\sqrt{14}$
7. $cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} = -2/(\sqrt{14}.\sqrt{17})$

Exercice 3 :

1

- $\vec{A}//\vec{C} \rightarrow \vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{0} \rightarrow \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ x & 1 & z \end{vmatrix} = \vec{0}$

$$\begin{cases} z-3=0 \\ 2z+3x=0 \\ -2-x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

- $\vec{B}//\vec{C} \rightarrow \vec{B}\wedge\vec{C}=\vec{0} \rightarrow \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & z \end{vmatrix} = \vec{0}$

$$\begin{cases} -z-1=0 \\ 2z-x=0 \\ 2+x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

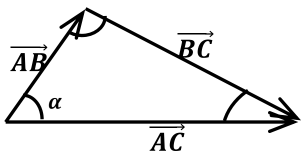
- $\vec{A}\perp\vec{C} \rightarrow \vec{A}.\vec{C}=0 \rightarrow -2x+1+3z=0$ donc toutes les paires (x,y) qui satisfirent cette équation donnent un vecteur $\vec{C}\perp\vec{A}$
- $\vec{B}\perp\vec{C} \rightarrow \vec{B}.\vec{C}=0 \rightarrow 2x-1+z=0$ donc toutes les paires (x,y) qui satisfirent cette équation donnent un vecteur $\vec{C}\perp\vec{B}$
- $\begin{cases} \vec{A}\perp\vec{C} \\ et \\ \vec{B}\perp\vec{C} \end{cases} \rightarrow \vec{C}//\vec{A}\wedge\vec{B} \rightarrow \vec{C}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=0$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath}+8\vec{\jmath}$$

$$\vec{C}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = 4x+8=0 \rightarrow x=-2 \; et \; z \; arbitraire$$

2.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} \rightarrow \left(\overrightarrow{BC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AB}\right)^2-2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$



$$BC^2 = AC^2+AB^2-2.AB.AC.\cos\alpha$$

$$BC = \sqrt{AC^2+AB^2-2.AB.AC.\cos\alpha}$$

3.

Les vecteurs dans le même plan $\rightarrow \vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=0$

$$\vec{B}\wedge\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-z-y)\vec{\imath}+(x-2z)\vec{\jmath}+(2y+z)\vec{k}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = -z-y+x-2z=0 \rightarrow x-y-3z=0$$

Exercice 4 :

Calculer la première et la seconde dérivée des fonctions vectorielles suivantes de la variable réelle t :

$$\vec{r}(t) = (2t+1)\vec{\imath}+(t^2-3t+7)\vec{\jmath}+(t^3+t^2+t+t1)\vec{k}$$

Calculer la première dérivée de la fonction vectorielle suivante et son module :

$$\vec{r}(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\,\vec{\imath}+e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,\vec{\jmath}+t^2\vec{k}$$

Calculer $\int \vec{r}(t)dt$.

$$\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} = 2\vec{i} + (2t-3)\vec{j} + (3t^2+2t+1)\vec{k} \;;$$

$$\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = 2\vec{j} \;+ (6t+2)\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} = (-\alpha e^{-\alpha t}\cos(\omega t) - \omega e^{-\alpha t}\sin(\omega t))\vec{i} + (-\alpha e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \; - \omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t))\vec{j} + 2t\vec{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} = \; (\alpha^2-\omega^2)\cos(\omega t)e^{-\alpha t}\,\vec{i} + (\alpha^2-\omega^2)\sin(\omega t)\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{s}(t) = \int \vec{r}_1(t)dt = \int \left[(2t+1)\vec{i} + (t^2-3t+7)\vec{j} + (t^3+t^2+t+t1)\vec{k}\right]dt$$

$$= \left(\int (2t+1)dt\right)\vec{i} + \left(\int (t^2-3t+7)dt\right)\vec{j} + \left(\int (t^3+t^2+t+1)dt\right)\vec{k}$$

$$= (t^2+t)\vec{i} - \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 7t\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t\right)\vec{k} + \vec{C}_1$$

Pour le deuxième intégral il est relativement complexe aux étudiants de 1ere année je préfère ne pas le faire son résultat est :

$$\vec{s}(t) = \int \vec{r}_2(t)dt = \int \left[e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\,\vec{i} + e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,\vec{j} + t^2\vec{k}\right]dt$$

$$= \left(\int \; e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int \; e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int \; t^2 dt\right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{-\alpha e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2+\omega^2} + \frac{\omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2+\omega^2}\right)\vec{i}$$

$$+ \left(\frac{-\omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2+\omega^2} - \frac{\alpha e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2+\omega^2}\right)\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\vec{k} + \vec{C}_1$$

Exercice 05

$$\overrightarrow{grad}U(x,y,z) = \vec{\nabla}U(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$= (yz^2 + 12x^2y^3z^3 + 15x^2y^7z^5)\vec{i} + (xz^2 + 12x^2y^3z^3 + 35x^3y^7z^4)\vec{j}$$

$$+ (2xyz + 3x^2y^4z^2 + 5x^3y^7z^4)\vec{k}$$

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = y + z - 2xyz^3 - 2z$$

$$\vec{V}(x,y,z) = 3x^2y\,\vec{i} - 2yz^3\vec{j} + x^2y\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{V}(x,y,z) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= (x^2 + 6yz^2)\vec{\imath} - 0\vec{\jmath} + (0 - 3x^2)\vec{k}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \Delta f$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Exercice 6 :

$\frac{dv}{dt} + \alpha v = 0 \ \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\alpha v \rightarrow \frac{dv}{v} = -\alpha dt \rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int -\alpha dt \rightarrow \ln(v) = -\alpha t + c_1 \rightarrow v = c_2 \exp(-\alpha t)$ avec $c_2 = \exp(c_1)$

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = \beta \rightarrow \frac{dv}{dt} = \beta - \alpha v \rightarrow \frac{dv}{\beta - \alpha v} = dt \rightarrow \int \frac{dv}{\beta - \alpha v} = \int dt \rightarrow -\frac{1}{\alpha}\ln(\beta - \alpha v) = t + c$$

$$\beta - \alpha v = c' \exp(-\alpha t) \rightarrow v = \frac{1}{\alpha}(\beta - c' \exp(-\alpha t))$$

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v^2 = 0 \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\alpha v^2 \rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\alpha dt \rightarrow \int \frac{dv}{v^2} = \int -\alpha dt \rightarrow -\frac{1}{v} = -\alpha t + c$$

$$v = \frac{1}{-\alpha t + c'}$$

Exercice 07

$\|\vec{u}(t)\| = \|\vec{v}(t)\| = 1,$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont des vecteurs unitaires et perpendiculaires donc ils forment une base orthonormée.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta(t)\,\vec{\imath} + \dot{\theta}\cos\theta(t)\,\vec{\jmath} = \dot{\theta}\dot{\vec{v}}(t) \quad \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta(t)\,\vec{\imath} - \dot{\theta}\sin\theta(t)\,\vec{\jmath} = -\dot{\theta}(\cos\theta(t)\,\vec{\imath} + \sin\theta(t)) = -\dot{\theta}\vec{u}(t)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\rho\,\vec{u})}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\vec{u} + \rho\,\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u} + \rho\dot{\theta}\vec{v} \qquad \left(\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{u} + \rho\dot{\theta}\dot{\vec{v}}\right) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u} + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{v}$$