Corrigé de la série sur les intégrales impropres

Ex 1 (Critère de primitive)

1.)

*) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(3x+2)^3}dx$. La fct $x \longmapsto \frac{1}{(3x+2)^3}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le pt incertain est $+\infty$. prenons $t \in [0, +\infty[$. Donc

$$\int_0^t \frac{1}{(3x+2)^3}dx = \int_0^t (3x+2)^{-3}dx = \frac{1}{3}\int_0^t 3(3x+2)^{-3}dx$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{-3+1}(3x+2)^{-3+1}\Big]_0^t = \frac{-1}{6} \times \frac{1}{(3x+2)^2}\Big]_0^t$$

$$= \frac{-1}{6}\left(\frac{1}{(3t+2)^2} - \frac{1}{4}\right).$$ Passons à la limite ($t \to +\infty$)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{6}\left(\frac{1}{(3t+2)^2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}.$$ Donc converge.

**) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x}dx$. La fct $x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Le pt incertain est $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

prenons $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Donc

$$\int_0^{t} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_0^{t} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|\Big]_0^{t}$$

$$= -\ln|\cos t| + \ln|\overset{1}{\cos 0}| = -\ln|\cos t|.$$

$\lim\limits_{t \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} (-\ln|\cos t|) = +\infty$. Donc diverge.

2) *) $\int_0^{+\infty} (x+2)\,e^{-2x}\,dx$. Le pt incertain est $+\infty$.

par parties : $\begin{cases} u = x+2 \\ v' = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{cases}$

Donc $\int_0^{+\infty} (x+2)\,e^{-2x}\,dx = \frac{-(x+2)e^{-2x}}{2}\Big|_0^{x \to +\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$

$$= \frac{-(x+2)e^{-2x}}{2}\Big|_0^{x \to +\infty} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^{x \to +\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-(x+2)}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) - \left(-1 - \frac{1}{4}\right)$$

$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Donc converge.

*) $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$. Le pt incertain est $x_0 = 0$.

par Partie : $\begin{cases} U = \ln(x+1) \\ V' = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = \frac{1}{x+1} \\ V = -\frac{1}{x} \end{cases}$.

Donc $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x+1)}{x}\Big]_{x \overset{>}{\to} 0}^{1} + \int_0^1 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$.

On a $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x+1)}{x}\Big|_{x \overset{>}{\to} 0}^{1} + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -\frac{\ln(x+1)}{x}\Big|_{x \overset{>}{\to} 0}^{1} + \ln|x|\Big|_{x \overset{>}{\to} 0}^{1} - \ln(x+1)\Big|_0^1$$

$$= -\ln 2 + \underbrace{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(x+1)}{x}}_{=1} + \cancel{\ldots} - \underbrace{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x}_{=+\infty} - (\ln 2 - \ln 1)$$

$= +\infty$. Donc diverge

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$$

3.) *) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$. Le pt incertain est $+\infty$.

Faisons un changement de variable, on pose $y = e^x$

$\Rightarrow dy = e^x\,dx$. Avec $\begin{cases} x = 0 \\ x \to +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y \to +\infty \end{cases}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{e^x+3} = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y+3} = \ln(y+3)\Big|_1^{y\to+\infty} =$

$\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \ln(y+3) - \ln 4 = +\infty \Rightarrow$ diverge.

*) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$. Le pt incertain est $x = 1$.

Faisons un changement de variable, on pose $y = \ln x$

$\Rightarrow dy = \frac{1}{x}\,dx$. Avec $\begin{cases} x = e \\ x \to 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y \to 0 \end{cases}$.

Donc $\displaystyle\int_1^{e} \frac{3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = 3\int_1^{e} \frac{\frac{1}{x}\,dx}{\sqrt{\ln x}} = 3\int_0^{1} \frac{dy}{\sqrt{y}} =$

$\displaystyle 6\sqrt{y}\Big|_{y \overset{>}{\to} 0}^{1} = 6(1-0) = 6$. Donc converge.

Ex 2.

I) (Critère de comparaison).

*) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3+1}\,dx$. Le pt incertain est $+\infty$.

on a $\ln x < x$, $\forall x \geq e$. on aura alors $\frac{\ln x}{x^3+1} < \frac{x}{x^3+1} < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$

on a $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est convergente (intégrale de type Rieman avec $\alpha = 2 > 1$)

. Donc par le critère de comparaison on a :

$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3+1}\,dx < \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, on déduit

alors que $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3+1}\,dx$ converge.

*) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\cos x}\,dx$. Le pt incertain est $+\infty$.

on a $\frac{1}{2+\cos x} \geq \frac{1}{3}$, $\forall x \in [0, +\infty[$.

[6]

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\cos x}\,dx \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}x \Big|_0^{x\to+\infty} = +\infty$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\cos x}\,dx$ diverge (Critère de comparaison).

II/ (Critère d'équivalence).

•) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^5+3x+9}\,dx$. Le pt incertain est $+\infty$ et $\dfrac{x^2+5}{x^5+3x+9}$ est positive sur $[1,+\infty[$.

On a $\dfrac{x^2+5}{x^5+3x+9} \sim \dfrac{x^2}{x^5} = \dfrac{1}{x^3}$, i.e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+5}{x^5+3x+9}}{\frac{1}{x^3}} = 1.$$ Maintenant, puisque

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ est convergente (Intégrale de type Riemann avec $\alpha = 3 > 1$)

on dit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^5+3x+9}\,dx$ converge par le critère d'équivalence.

••) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln(\sin x)\,dx$. Le pt incertain est $x = 0$.

On a $-\ln(\sin x) \sim -\ln x$ qd $x \to 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(\sin x)}{-\ln x} = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln x \, dx = x - x\ln x \Big|_{x \xrightarrow{>} 0}^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(par parties)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2} - \underbrace{\lim_{x\to 0} x - x\ln x}_{=0}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \ln\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln \sin(x)\, dx$ converge par le critère de comparaison.

III) Critère d'Abel.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$$

Le pt incertain est $x_0 = 0$.

On pose $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}y^{-3/2}dy$

On a $\begin{cases} x = 1 \\ x \xrightarrow{>} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y \to +\infty \end{cases}$. Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)dx = \int_{+\infty}^1 y\cos(y) \times \frac{-1}{2}y^{-3/2}dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(y)}{\sqrt{y}}\,dy.$$ Le pt incertain est $+\infty$.

Appliquons le critère d'Abel

on a $y \longmapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$ est décroissante

avec $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} = 0$, et

$$\int_1^t \cos(y)\,dy = |\sin(t) - \sin(1)| \leq$$

$$|\sin(t)| + |\sin(1)| \leq 2,$$

$\forall\, t \in [1, +\infty[$. Donc

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy$ est convergente $\Longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$

est convergente