Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Série N°3 : Séries

Exercice 1

Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

1) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 2) $\sum_{n\geq 0}\ln(1-\frac{2}{n})$ 3) $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n+2}$ 4) $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2}$

Exercice 2

Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(ne^{\frac{1}{n}}-n\right);\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Exercice 3

Montrer que la série de fonctions de terme général f_n défini sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x)=(-1)^n(1-x)x^n$$

Converge absolument et uniformément sur $[0,1]$ mais ne converge pas normalement.

Exercice 4

Etudier la convergence simple, absolue, normal et uniforme des séries de fonctions suivantes sur le domaine $\mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x};\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$$

Exercice 5

Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel, pour tout x réel positif, on pose

$$f_n(x)=x^a e^{-nx}$$

1) Calculer la somme de la série de terme général $f_n(x)$;
2) Montrer que l'on a la convergence normale si a>1 ;
3) Montrer que l'on a pas la convergence uniforme si $a\leq 1$
4) Montrer que l'on a la convergence uniforme sur tout intervalle $[b,+\infty[, b>0$

Exercice 6

Déterminer le rayon et le domaine de convergence des séries entières suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n-1)!}(2x-1)^n;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+3)^{2+n}}{4^{5+n}}$$

Exercice 7

Soient les fonctions T-périodique suivantes définies par :

- $f(x)=\begin{cases}0 & si\ -\pi\leq x<0\\ x & si\ 0\leq x<\pi\end{cases},\ T=2\pi$
- $g(x)=\begin{cases}1 & si\ 0\leq x\leq 1\\ 0 & si\ 1<x<2\end{cases},\ T=2$
- $h(x)=\begin{cases}2+x & si\ -\pi\leq x<0\\ 2-x & si\ 0\leq x\leq\pi\end{cases},\ T=2\pi$

1) Tracer le graphe de chacune des fonctions ;
2) Calculer les coefficients de Fourier associés à chacune des fonctions ;
3) Ecrire le développement en série de Fourier de chacune des fonctions ;
4) Ces séries convergent-elles ?