Université Abderrahmane Mira Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

2023-2024

Examen de Maths1
(Durée 1h30mn)

Exercice n°1.(**5 pts**)

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Montrer par contraposition que :

$$(xy \neq 1 \;\text{ et }\; x \neq y) \Longrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$$

Exercice n°2.(**10 pts**)

I. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y - 3k$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0.

II. On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

1. Calculer $f(\{1,5\})$, $f([0,1])$, $f^{-1}(\{-1\})$ et $f^{-1}([0,\infty[)$.
2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Donner les intervalles I et J pour lesquels la fonction $f : I \longrightarrow J$ soit bijective. Déterminer l'application réciproque f^{-1} dans ce cas.

Exercice n°3.(**5 pts**)

1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{e^x - 1}$

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{1 + x^2} & \text{si } x \leq 0, \\ \ln(a + x^2) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$

Bon courage

Université de A/MIRA de Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie $1^{\text{ère}}$ année

Année universitaire : 2023/2024
MATHS1

Corrigé de l'examen

Exercice n°1 .(5 pts)

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Posons : $P(n)$: "$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".

Pour $n = 1$: on a $1^2 = 1$, d'autre part, $\quad \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$.
par suite $P(0)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ est vraie, pour n et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a
$P(n+1)$: "$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$" ?
On a

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}, \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}
$$

donc $P(n+1)$ est vraie.
Par suite, daprés le principe de la récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}^* : P(n)$ est vraie.

2) Montrons par contraposition que : $(xy \neq 1 \ \text{ et } \ x \neq y) \Longrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$.
Ça revient à montrer que : $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \Longrightarrow (xy = 1 \ \text{ ou } \ x = y)$
on a

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} &\Longrightarrow xy^2 + xy + x = x^2y + xy + y, \\
&\Longrightarrow xy^2 - x^2y + x - y = 0, \\
&\Longrightarrow xy(y-x) - (y-x) = 0, \\
&\Longrightarrow (xy-1)(y-x) = 0, \\
&\Longrightarrow (xy = 1) \text{ ou } (x = y).
\end{aligned}
$$

D'où le résultat par le principe de contraposée :
$(xy \neq 1 \ \text{ et } \ x \neq y) \Longrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$.

Exercice n°2 .(10 pts)
I)$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y - 3k$.

1) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, en effet ;
- Soit $x \in \mathbb{Z}$ on a
$x = x - 3 \times 0$ donc $\exists k = 0 \in \mathbb{Z}$ tel que $x\mathcal{R}x$.
$\mathcal{R}$ est donc réflexive.

- Soient $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y - 3k,$
$\Longrightarrow y = x - 3(-k),$
$\Longrightarrow y = x - 3k' \ (k' = -k \in \mathbb{Z}).$
donc $y\mathcal{R}x$, $\mathcal{R}$ est donc Symétrique.

- Soient $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \text{ et} \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 3k \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \ldots (1) \\ \text{ et} \\ y = x - 3k' \quad (k' \in \mathbb{Z}) \quad \ldots (2) \end{cases}$
on remplace (2) dans (1), on obtient
$x = z - 3(k + k') \Rightarrow x = z - 3k'' \quad (k'' = k + k' \in \mathbb{Z}).$
$\mathcal{R}$ est donc transitive.
Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2) La classe de 0 :
$\dot{0} = \{x \in \mathbb{Z} \ /x\mathcal{R}0\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 0 - 3k \ /k \in \mathbb{Z}\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} : x = 3k' \ /k' \in \mathbb{Z}\}$
$= \{\ldots, -6, -3, 0, +3, +6, +9, \ldots\}.$

II) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = x^2 - 6x + 9.$

1)• $f(\{1, 5\}) = \{f(1), f(5)\} = \{4\}.$
• $f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [4, 9].$
• $f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R} \ /f(x) = -1\},$
$= \{x \in \mathbb{R} \ /x^2 - 6x + 9 = -1\},$
$= \emptyset.$
• $f^{-1}([0, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R} \ /f(x) \geq 0\},$
$= \{x \in \mathbb{R} \ /(x - 3)^2 \geq 0\} = \mathbb{R}.$

2)- f n'est pas injective, car d'aprés 1) $f(1) = f(5) = 4$ mais $1 \neq 5$.
- f n'est pas surjective, car d'aprés 1) $y = -1$ n'admet aucun antécédent par l'application f.
- f n'est pas bijective, car elle n'est ni injective ni surjective.

3)Soit$y \in J$.
$y = f(x) \Rightarrow y = (x - 3)^2 \Rightarrow y \in [0, +\infty[.$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - y = 0.$
$\Delta = 6^2 - 4(9 - y)4y.$
$\Delta \geq 0$ pour $y \in [0, +\infty[$. l'équation $y = f(x)$ admet 2 solutions x_1, x_2 :
$x_1 = \frac{6-2\sqrt{y}}{2} = 3 - \sqrt{y} \leq 3$
$x_2 = \frac{6+2\sqrt{y}}{2} = 3 + \sqrt{y} \geq 3.$
Il suffit de prendre :
$I =]-\infty, 3]$ ou $I = [3, +\infty[et J = [0, +\infty[$ pour que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective.
$f^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow [3, +\infty[$
$y \longmapsto f^{-1}(y) = 3 + \sqrt{y}.$
Ou bien
$f^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow]-\infty, 3]$
$y \longmapsto f^{-1}(y) = 3 - \sqrt{y}.$

Exercice n˚3 .(5 pts)
1)a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = +\infty \times 0$ FI.
On a

$\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1.$ ($y=\frac{1}{x}$)

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x-1} = \frac{0}{0}$ FI.

La règle de l'hopital $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0.$

2) $f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{1+x^2} & \text{si } x \leq 0, \\ \ln(a+x^2) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

La valeur de a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?

f est continue sur $]-\infty, 0]$ car $f(x) = 1+\sqrt{1+x^2}$ (somme de deux fonctions continues).

f est continue sur $[0, +\infty[$ car $f(x) = \ln(a+x^2)$ (composée de deux fonctions continues).

Au point 0 ? $f(0) = 2$

$\lim_{x\to 0^<} f(x) = \lim_{x\to 0^<} 1+\sqrt{1+x^2} = 2 = f(0)$ donc f est continue à gauche de 0.

$\lim_{x\to 0^>} f(x) = \lim_{x\to 0^>} \ln(a+x^2) = \ln a$

f est continue à droite de 0 $\Leftrightarrow \ln a = 2$ donc $a = e^2$.

Pour la valeur $a = e^2$, f est continue sur $\mathbb{R}$.