Université A. Mira de Bejaia
Département de Technologie
1ère Année Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Année Universitaire 2023-2024

Examen de l'analyse 1 — Parcours Ingénieur — Durée :1h30

Remarque *Les étapes nécessaires de la résolution seront prises en compte.*

Exercice 1 (7 points).

On considère la suite $(U_n), n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$U_0 = \frac{3}{2}, \qquad U_{n+1} = \frac{1+2U_n}{2+U_n}.$$

1. Calculer : $U_1,\ U_2$.
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.
3. Montrer que (U_n) est décroissante.
4. Déduire que la suite (U_n) converge vers un réel λ, déterminer cette limite λ.
5. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, $SupE$, $InfE$, $MaxE$, $MinE$ de l'ensemble suivant : $E = \{\, U_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 2 (7 points).

Soient $a\ et\ b$ deux nombres réels. On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\,, & si \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+x}\,, & si \quad x > 0. \end{cases}$$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer b pour que f soit continue sur D_f.
3. Déterminer $a\ et\ b$ pour que f soit dérivable sur D_f.
4. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation : $x + e^x = 0$ admet au moins une racine réelle sur $]-1,0[$.

Exercice 3 (6 points).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire les expressions suivantes sans valeur absolue :
   $f(x) = -2 + |x^2 - 1|, \qquad g(x) = |x - 2| + |x + 1|.$
2. Evaluer les expressions suivantes : $E\left(\frac{-1}{2}\right), \quad E(-\pi), \quad E\left(2\sqrt{3}\right)$.
   (où $E(x)$ *la partie entière de* x).
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $E(x-1) = 1, \ \ 3 + 2E(1-x) = 0.$

Bonne chance
Pr. BOUKOUCHA

—————— **Corrigé de l'Examen de l'Analyse I** ——————

Exercice 1. ***Solution.***

1) Calculons: U_1 , U_2. 0,5

$$U_1 = \frac{1+2U_0}{2+U_0} = \frac{1+2\left(\frac{3}{2}\right)}{2+\frac{3}{2}} = \frac{8}{7}, \qquad U_2 = \frac{1+2U_1}{2+U_1} = \frac{1+2\left(\frac{8}{7}\right)}{2+\frac{8}{7}} = \frac{23}{22}.$$

0,5

2) Montrons que : $P(n) : [\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1]$.

On utilise le raisonnement par récurrence:

- Pour $n = 0$, *on a:* $U_0 = 2 > 1$, *d'où* $P(0)$ *est vraie.* 0,5

- On démontre que: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*

On suppose que $P(n)$ *est vraie à un rang n fixé, c'est à dire:*

$$U_n > 1, \text{ (l'hypothèse de la récurrence)},$$

et on démontre que $P(n+1)$ *est vraie c'est à dire:* $U_{n+1} > 1$. 1

$$On\ a : U_{n+1} = \frac{1+2U_n}{2+U_n} = \frac{(2+U_n)+(U_n-1)}{2+U_n} = 1 + \frac{\overbrace{2(U_n-1)}^{(+)}}{3+U_n} > 1$$

car, $(U_n - 1)$ *est positif d'après hypothèse de récurrence.*

Donc, $P(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.

3) Montrons que (U_n) ***est décroissante.***

$$On\ a : U_{n+1} - U_n = \frac{1+2U_n}{2+U_n} - U_n = \frac{(1+2U_n)-(2+U_n)U_n}{2+U_n} = \frac{1-U_n^2}{2+U_n}$$

$$= \frac{(1+U_n)\overbrace{(1-U_n)}^{(-)}}{2+U_n} < 0, \text{ (car, } U_n > 1).$$

1

On a: $U_{n+1} - U_n < 0$, *d'où la suite* (U_n) *est décroissante.*

4) Déduisons que la suite (U_n) ***converge vers un réel*** λ.

On a: La suite (U_n) *est décroissante est minorée par* 1, *donc la suite* (U_n) *converge vers un réel* λ.

0,5

Déterminons λ la limite de la suite (U_n) :

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lambda$. *Donc,*

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2U_n}{2+U_n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \frac{1+2\left(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\right)}{2+\left(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n\right)}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1+2\lambda}{2+\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ ou \\ \lambda = -1 \text{ rejeté car: } U_n > 1. \end{cases}$$

1

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$.

5) Déterminons (s'ils existent) : les majorants, les minorants, $\sup E$, $\inf E$, $\max E$, $\min E$ ***de ensemble suivant:***

$$E = \{U_n\ ,\ \ n\in\mathbb{N}\}.$$

On a : $E = \{U_n\ ,\ \ n\in\mathbb{N}\} = \{U_0\ ,U_1\ ,U_2\ ,.......\ ,U_n\ \}$.

La suite (U_n) *est décroissante est converge vers* 1, *donc on a:* $\forall n\in\mathbb{N}$: $\underbrace{\frac{3}{2}}_{U_0} \geq U_n > 1$. 0,5

Donc, Les majorants de E sont : $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ 0,25 *Les minorants de E sont :* $]-\infty,1]$ 0,25

0,25 $\sup E = \frac{3}{2}$, $\inf E = 1$, 0,25 $\max E = \frac{3}{2}$ 0,25 *Le plus petit élément de E : n'existe pas.* 0,25

Min E

Exercice 2. *Solution.*

1) Le domaine de définition de la fonction f est: $D_f =]-\infty,0]\cup]0,+\infty[= \mathbb{R}$. 0,5

2) ***Continuité de f sur*** D_f :

Sur $]-\infty,0[$, *la fonction f est continue car* $x \longmapsto ax+b$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *en particulier f est continue sur* $]-\infty,0[$. 0,25

Sur $]0,+\infty[$, *la fonction f est continue car* $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}-\{-1\}$, *en particulier f est continue sur* $]0,+\infty[$. *Donc il nous rèste d'étudier la continuité de f en* 0 : 0,25

On a: $f(0) = a\times 0 + b = b$.

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{1+x} = 1, \qquad \lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} ax+b = b.$$

0,25 0,25

0,5

f *est continue en* 0 *si et seulement si:* $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = f(0) \iff b = 1.$

Donc, f *est continue sur* D_f *si et seulement si* $b = 1.$ 0,5

3) Dérivabilité de f ***sur*** D_f :

Sur $]-\infty, 0[$, *la fonction* f *est dérivable car* $x \longmapsto ax + b$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *en particulier* f *est dérivable sur* $]-\infty, 0[$. 0,25

Sur $]0, +\infty[$, *la fonction* f *est dérivable car* $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R} - \{-1\}$, *en particulier* f *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *.Donc il nous rèste d'étudier la dérivabilité de* f *en* 0 : 0,25

Dérivabilité de f *en* 0 :

Si $b \neq 1$, f *n'est pas dérivable en* 0 *car elle n'est pas continue en* 0.

Donc Posons $b = 1$, *donc* $f(0) = 1$.

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{1 - 1 - x}{x(1+x)} = \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{-1}{1+x} = -1 = f'_d(0).$$ 0,5

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{ax + 1 - 1}{x} = a = f'_g(0).$$ 0,5

Donc, f *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $f'_d(0) = f'_g(0)$, *d'où* $a = -1$. 0,5

Alors, f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $b = 1$ *et* $a = -1$. 0,5

4) Montrons que l'équation $x + e^x = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $]-1, 0[$.

Posons : $f(x) = x + e^x$ *sur* $[-1, 0]$.

La fonction $x \mapsto x + e^x$ *est continue sur* $]-1, 0[$ 0,5

$f(-1) = -1 + e^{-1} = -1 + \dfrac{1}{e} = -0,63 < 0$

$f(0) = 0 + e^0 = 1 > 0$ 0,5

La fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue sur* $]-1, 0[$ *et* $f(-1) f(0) < 0$, *d'après théorème des valeurs intermédiaires il exsite* $c \in]-1, 0[$ *tel que* $f(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $x + e^x = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $]-1, 0[$. 1

Exercice 3. ***Solution.***

1) Ecrivons l'expression de: $f(x) = -2 + |x^2 - 1|$ *sans valeur absolue.*

On a: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si \quad x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ -x^2 - 1 & si \quad x \in [-1, 1] \end{cases}$

1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x^2-1 \rvert$		x^2-1	0	$-x^2+1$	0	x^2-1	
$f(x)$		x^2-3		$-x^2-1$		x^2-3	

Ecrivons l'expression de: $g(x) = |x-2| + |x+1|$ *sans valeur absolue.*

On a:

$$g(x) = \begin{cases} -2x+1 \; si & x \in]-\infty, -1] \\ 3 \quad si & x \in [-1, 2] \\ 2x-1 \quad si & x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

1

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$
$g(x)$	$-2x+1$		3		$2x-1$

2) Evaluons les expressions:

$$E\left(\frac{-1}{2}\right) = E(-0,5) = -1, \qquad E(-\pi) = E(-3,14) = -4, \qquad E\left(2\sqrt{3}\right) = E(3,46) = 3$$

0,5 0,5 0,5

2) Résolvons l'équation: $E(x-1) = 1$.

$$On\ a: E(x-1) = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x-1 < 1+1$$
$$\Leftrightarrow 2 \leq x < 3.$$

1

Donc, l'ensemble des solutions est: $[2, 3[$.

Résolvons l'équation suivante: $3 + 2E(1-x) = 0$.

$$On\ a: 3 + 2E(1-x) = 0 \Leftrightarrow E(1-x) = -\frac{3}{2}$$

Contradiction car $E(1-x)$ *est un nombre relatif c'est à dire:* $E(1-x) \in \mathbb{Z}$.

Donc, l'ensemble des solutions est vide.

1,5