Questions de cours : (voir le cours)

1. Sur ①

2. Sur ①

3. Sur ③

Exo 1

1. La nature des séries numériques suivantes :

* $\sum_{n>0} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+2}}$; $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n+2}}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(\ldots}}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ La CN n'est pas vérifiée, donc la sé[rie]

$\sum_{n>0} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+2}}$ ne conv pas.

** $\sum_{n>0} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

En appliquant le critère de Cauchy, on

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ldots$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n}$

donc la série $\sum_{n>0} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ conv.

1,5

2- Montrons que les séries suivantes sont conv

* $\sum_{n\geq 0} e^n \left(\frac{2}{7}\right)^n = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2e}{7}\right)^n$ est une séri

géométrique de raison $r = \frac{2e}{7}$ et |

donc elle est convergente et a pour (1)

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2e}{7}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \ldots$$ (0,5)

$$\boxed{S = \frac{1}{1-\frac{2e}{7}}}$$ (1)

** $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ (2)

(Voir le TD Série N°01)

Exo 2

$$f_n(x) = \frac{e^{-2nx}}{2n+1}, \quad x\in\mathbb{R}, \ n\in\mathbb{N}$$

(a) La convergence simple et uniforme ...

- La convergence simple :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-2nx}}{2n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si} \ldots \\ +\infty & \text{si} \ldots \end{cases}$$ (0,...)

Donc f_n converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle $f\equiv 0$. (1)

- Etudions la convergence uniforme :

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\geq 0}\left|\frac{e^{-2nx}}{2n+1}-0\right|$$

$$= \frac{e^{-2n(0)}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

1

Donc f_n converge uniformément vers $f\equiv 0$ sur $\mathbb{R}_+$

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g_n(x)$ avec

$$g_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-2nx}}{2n+1}, \; x\in\mathbb{R}, \; n\in\mathbb{N}.$$

2- Montrons que $\sum g_n(x)$ conv simplement sur $\mathbb{R}$

2,1 Si $\underline{x=0}$ $\quad g_n(0) = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 0,5 et $\sum_{n\geq 0} g_n(0) = \sum$

est une série alternée 0,5 convergente en vertu du critère des séries alternées, en effet,

$$V_n = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{0,5} \quad \text{et } (V_n) \text{ est décroissante}$$

car $V_{n+1}-V_n = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)}$

Si $\underline{x>0}$

$$\sum_{n\geq 0} g_n(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{e^{-2nx}}{2n+1}$$

$$\left|\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} e^{-2(n+1)x}}{2(n+1)+1} \times \frac{2n+1}{(-1)^n e^{-2nx}}\right|$$

$$\left|\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}\right| = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) e^{-2x} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}$$

On déduit que la série $\sum_{n\geq 0} g_n(x)$ conv abs
donc elle conv $, \forall x > 0.$

1

3. La conv normale de la série $\sum_{n\geq 0} g_n$

$$\sup_{x\geq 0} |g_n(x)| = \sup_{x\geq 0} \left|\frac{(-1)^n e^{-2nx}}{2n+1}\right|$$

$$= \frac{1}{2n+1}$$

et $\sum_{n\geq 0} \sup_{x\geq 0} |g_n(x)| = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}$ div

1

Série de Riemann avec $\alpha = 1$.

Donc $\sum_{n\geq 0} g_n$ ne conv pas normalement sur $\mathbb{R}^+$

0,5