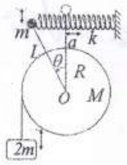
Série de TD N°2 de physique 3

Exo1

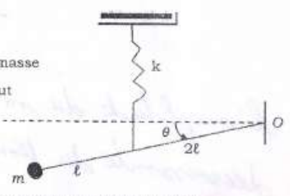
Un disque de rayon R et de masse M peut tourner sans frottement autour de son axe horizontal en O et porte à sa périphérie une masse $2m$.

Une tige de longueur L et de masse négligeable est soudée en O et porte une masse m. A l'équilibre la tige était verticale (représentée en pointillé), et le ressort était allongé d'une distance α.



1. Trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de θ. (θ<<1)
2. Déduire à l'aide de la condition d'équilibre l'allongement α à l'équilibre
3. Pour quelle condition le système aura un mouvement d'oscillation.
4. Trouver l'énergie cinétique T du système.
5. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement du système.

Exo2



Dans le système ci-contre, la tige et le ressort sont de masse négligeable et la masse m est ponctuelle. On néglige tout frottement. La tige, qui est horizontale à l'équilibre, peut tourner librement autour de l'axe passant par le point O. On relâche le système après l'avoir écarté d'un angle θ, suffisamment faible pour admettre l'approximation des faibles angles.

1. Déterminer le nombre de degré de liberté.
2. Trouver l'énergie potentielle U en fonction de θ. Déduire la déformation du ressort à l'équilibre et simplifier U.
3. Trouver l'énergie cinétique T du système.
4. Trouver l'équation du mouvement du système en utilisant le principe de conservation de l'énergie totale.

Série de TD N°3 de physique 3

Exo1

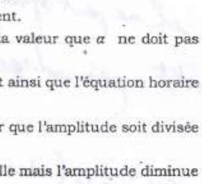
Le mouvement d'un système mécanique linéaire à un degré de liberté est décrit par l'équation différentielle suivante : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$. Où x est le déplacement, et m, α, et k, représentent respectivement la masse, de frottement et la constante de raideur. Ils ont pour valeurs : m=0.5 Kg, α=2 N m^{-1} s, k=12.5 N m^{-1}

1. Ecrire l'équation différentielle sous forme réduite. En déduire les expressions de la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement λ et calculer leurs valeurs. Quelle est la nature du mouvement du système quand il est écarté de sa position d'équilibre.
2. Donner la solution horaire x(t) de l'équation différentielle réduite. Identifier l'amplitude du mouvement du système. Comment sont déterminées les constantes A et φ de l'expression x(t).

Exo2

Un fil inextensible et non glissant, relié au point B et enroulé autour d'un disque, supporte une masse $2m$.

A l'équilibre la tige était verticale et l'allongement du ressort était x_0.

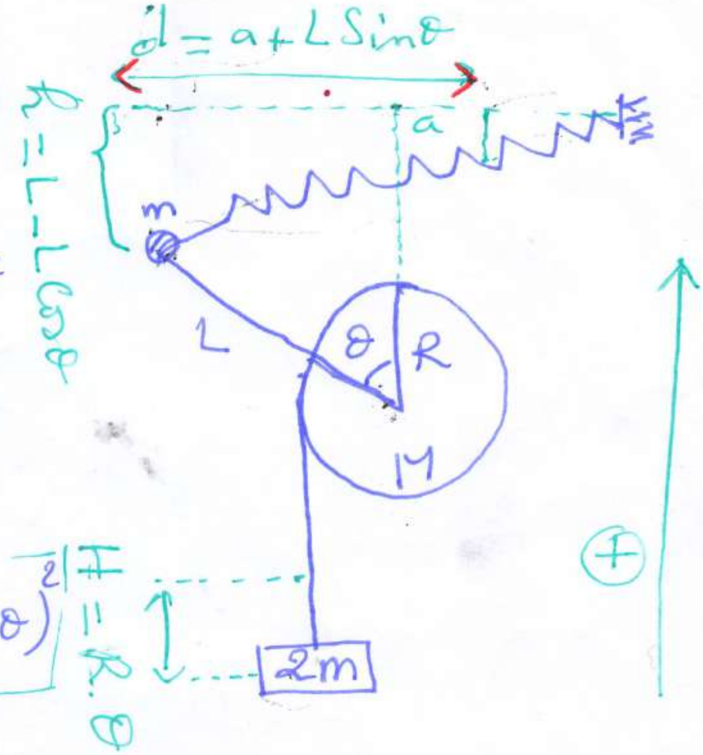


1. Trouver l'Energie potentielle U du système en fonction de θ<<1.
2. Simplifier U à l'aide de la condition d'équilibre.
3. Trouver l'Energie cinétique T et la fonction de dissipation D.
4. Trouver le Lagrangien $\mathcal{L}$ puis l'équation du mouvement.
5. Si m=1Kg, k =20 N m^{-1}, l=1m, g=10 m s^{-2}, trouver la valeur que α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.
6. Pour α = 22 N m^{-1} s, trouver la nature du mouvement ainsi que l'équation horaire θ(t). (Initialement $\theta(0) = 3°, \dot{\theta}(0) = 0$).
7. Pour α = 2N m^{-1} s, trouver le temps τ necessaire pour que l'amplitude soit divisée par 3.
8. En remplaçant le coefficient α par α', le système oscille mais l'amplitude diminue au cours du temps : après 20 oscillations complètes l'amplitude diminue à $\frac{1}{4}$ de sa valeur. Trouver α', .

Indication : pour θ<<1 on a : $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

1- Energie potentielle :

$U = -2mgH - mgh + \frac{1}{2}Kd^2$



$U = -2mgR\theta - mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}K(a+L\sin\theta)^2$

• Pour $\theta \ll 1$ $\begin{cases} \sin\theta = \theta \\ \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases}$

$\boxed{U = -2mgR\theta - mgL\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}K(a+L\theta)^2}$

2- Condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

$\left.-2mgR - mgL\theta + KL(a+L\theta)\right|_{\theta=0} = 0$

$-2mgR + KLa = 0$

$\boxed{a = \frac{2mgR}{KL}}$

3- Condition d'oscillation : $\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} > 0$

$-mgL + KL^2 > 0 \Rightarrow \boxed{KL > mg}$

4- $T = \frac{1}{2}(2m)v_{2m}^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$, $I = \frac{1}{2}MR^2$

$\Rightarrow \boxed{T = m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2}$

5- • Energie potentielle : on remplace a dans U

$U = -\cancel{2mgR\theta} - mgL\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}Ka^2 + \cancel{KaL\theta} + \frac{1}{2}K(L\theta)^2$

$\boxed{U = \frac{1}{2}(KL - mg)L\theta^2 + \underbrace{\frac{1}{2}Ka^2}_{C^{ste}}}$

• Lagrangien :

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(2mR^2 + mL^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(KL - mg)L\theta^2 + c^{ste}$$

• Eq. de mvt :

Euler Lagrange :

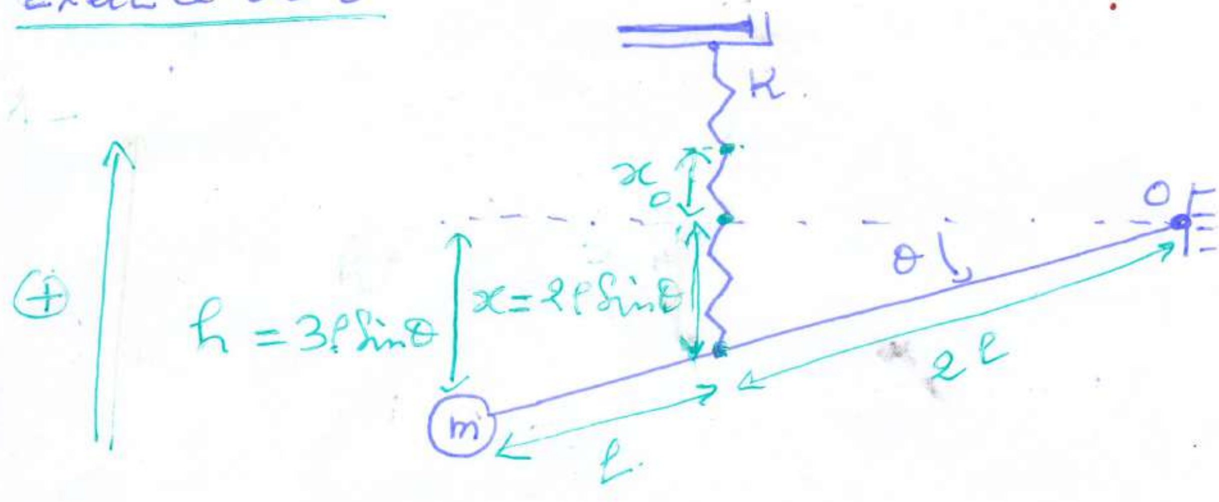
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \qquad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \left(2mR^2 + mL^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(2mR^2 + mL^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = (KL - mg)L\theta \end{cases}$$

$$\left(2mR^2 + mL^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta} + (KL - mg)L\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{(KL - mg)L}{2mR^2 + mL^2 + \frac{1}{2}MR^2}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

Exercice 02 :



1- Nbre de degré de liberté :

$$d = N - r$$

N ≡ nbre de variables indépendantes ou liées :

$$N = (x, \theta) = 2$$

r = nbre de relations reliant les variables :

$$r = (x = 2\ell \sin\theta) = 1$$

finalement, $d = 2 - 1 \Rightarrow \boxed{d = 1}$

2- Energie potentielle :

$$U = -mgh + \frac{1}{2}K(x + x_0)^2$$

$$= -mg\,3\ell\sin\theta + \frac{1}{2}K(2\ell\sin\theta + x_0)^2$$

Pour $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta = \theta$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}K(2\ell\theta + x_0)^2 - 3mg\ell\theta}$$

• Condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 2\ell K\,(2\ell\theta + x_0) - 3mg\ell .$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 2\cancel{\ell} K x_0 - 3mg\cancel{\ell} = 0$$

d'où $\boxed{x_0 = \frac{3mg}{2K}}$

• Simplification de U :

$$U = \frac{1}{2} K (2\ell\theta)^2 + K\,2\ell\theta . x_0 + \frac{1}{2} K x_0^2 - 3mg\ell\theta .$$

$$= 2K\ell^2\theta^2 + \cancel{2K\ell\theta\left(\frac{3mg}{2K}\right)} + \frac{1}{2}K x_0^2 - \cancel{3mg\ell\theta}$$

d'où, $\boxed{U = 2K\ell^2\theta^2 + c^{ste}}$ $\leftarrow \frac{1}{2} K x_0^2$

3- Energie Cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$v_m = \frac{dh}{dt} = \frac{d(3\ell\theta)}{dt} \Rightarrow v_m = 3\ell\dot{\theta} .$$

d'où $\boxed{T = \frac{9}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 .}$

4- Energie totale.

$$E = T + U = \frac{9}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2 + 2K\ell^2\theta^2 + \underbrace{\frac{1}{2}K x_0^2}_{c^{ste}} = c^{ste}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\frac{\partial \dot{\theta}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 4K\cancel{\ell^2}\theta\cancel{\dot{\theta}} + 9m\cancel{\ell^2}\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} = 0.$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{4K}{9m}\theta = 0.$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{4K}{9m}.$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

NB.

$$\frac{df(x,y,z)}{dx} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{E} + \frac{dy}{dx}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\theta} + \frac{dz}{dx}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}}_{\dot{\theta}}$$

$$\frac{dE(t,\theta,\dot{\theta})}{dt} = \cancel{\frac{\partial E}{\partial t}}^{0} + \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}\frac{\partial E}{\partial \theta} + \underbrace{\frac{d\dot{\theta}}{dt}}_{\ddot{\theta}}\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}$$