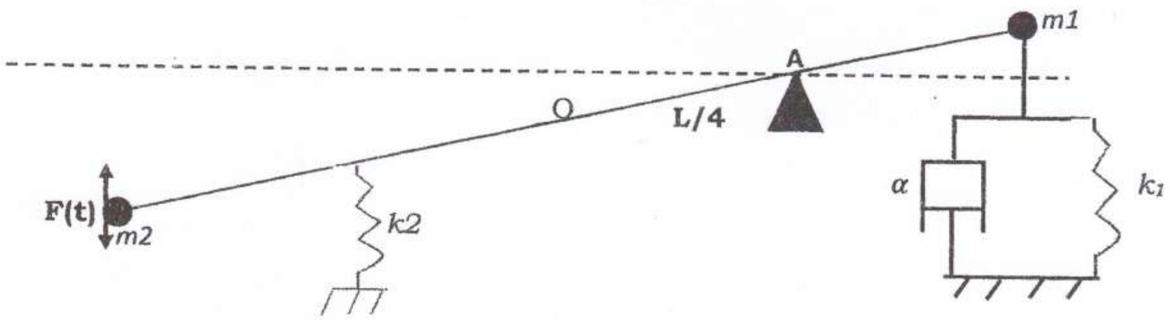
Série de TD N°4 de physique 3

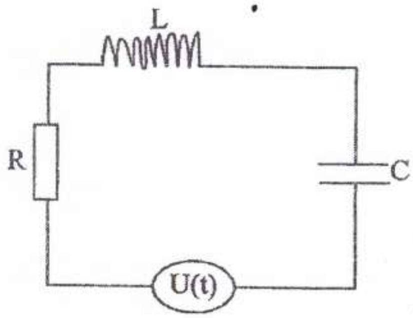
Soit le système mécanique suivant comprenant entre autres une tige de langueur L et de masse négligeable qui porte à ses extrémités deux masses ponctuelles m_1, m_2. On la fixe à deux bâtis par l'intermédiaire de deux ressorts de masses négligeables et de raideurs k_1, k_2 et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α comme le montre la figure ci-dessous. Le système peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par A tel que : OA=L/4. Le système subit une force extérieure F(t) verticale et sinusoïdale appliquée à la masse m_2

1. Etablir l'équation différentielle régissant les petites oscillations pour $k_1 = k_2 = k$ et $m_1 = m_2 = m$.
2. Donner l'expression de la solution générale $\theta(t)$, que devient cette solution après un temps suffisamment grand et trouver les expressions de l'amplitude A et la phase φ.
3. Déterminer la pulsation de résonance Ω_R.
4. Déterminer la bande passante B pour un amortissement faible ($\lambda \ll \omega_0$)



Exo2

1. Etablir l'équation différentielle en courant puis en charge du circuit oscillatoire électrique de la figure ci-contre.

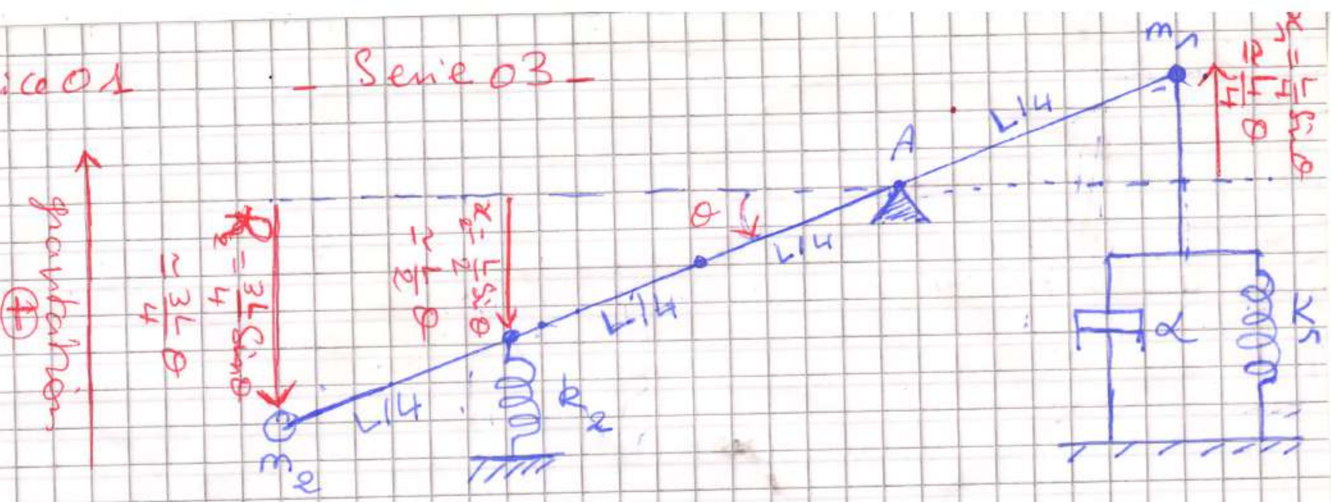


On donne : $R = 80\Omega, L = 10H, C = 0,005\,F, U_0 = 53V,$

$U(t) = U_0 \cos(\Omega t)$.

2. Calculer la période propre T_0 et le coefficient d'amortissement λ.
3. Déterminer la solution en régime transitoire, et en déduire sa pseudo-pulsation ω.
4. Déterminer la solution en régime permanent. (Préciser son amplitude A et sa phase φ).
5. Quelle est la condition sur la valeur de R pour qu'il y ait résonnance. Vérifier, pour la valeur de R donnée au-dessus, si l'oscillateur peut atteindre la résonnance.
6. Donner le schéma équivalent mécanique de circuit et déduire son impédance mécanique.

Exercice 01 — Serie 03 —



1. * Energie potentielle :

$$\mathcal{U} = U_{k_1} + U_{k_2} + U_{m_1} + U_{m_2}$$

$$= \frac{1}{2}k_1(x_1 + x_{01})^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 + x_{02})^2 + m_1 g x_1 - m_2 g h$$

Pour $k_1 = k_2$ et $m_1 = m_2$:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{4}\theta + x_{01}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\theta + x_{02}\right)^2 - mg\frac{L}{2}\theta \quad (*)$$

* Condition d'equilibre : Trouver x_{01} et x_{02}

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = \frac{kL}{4}\left(\frac{L}{4}\theta + x_{01}\right) + \frac{kL}{2}\left(\frac{L}{2}\theta + x_{02}\right) - mg\frac{L}{2}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \frac{kL}{4}x_{01} + \frac{kL}{2}x_{02} - mg\frac{L}{2} = 0$$

$$\Rightarrow k\left(\frac{x_{01}}{2} + x_{02}\right) = mg$$

$$(*) \Rightarrow \mathcal{U} = \frac{1}{2}k\left(\frac{L^2}{16}\theta^2 + \frac{L^2}{4}\theta^2\right) + \frac{L}{2}\theta\,\underbrace{k\left(\frac{x_{01}}{2} + x_{02}\right)}_{mg} - mg\frac{L}{2}\theta + C^{ste}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{U} = \frac{5}{32}kL^2\theta^2 + C^{ste}}$$

* Energie Cinétique

$$T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{h}^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{L}{4}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{3L}{4}\dot{\theta}\right)^2$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{5}{16}mL^2\dot{\theta}^2}$$

* F^{ct} de dissipation :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_{m_1}^2 = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{L}{4}\dot{\theta}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{32}\alpha L^2\dot{\theta}^2}$$

* Lagrangien :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{5}{16}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{5}{32}kL^2\theta^2 + C^{ste}$$

* Eqs. de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} + \mathcal{M}(F(t))$$

$$\left.\frac{5}{8}mL^2\ddot{\theta} + \frac{5}{16}kL^2\theta = -\frac{\alpha}{16}L^2\dot{\theta} + F(t)\frac{3L}{4}\right\} \times \frac{1}{\frac{5}{8}mL^2}$$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\alpha}{10m}}_{2\lambda}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{k}{2m}}_{\omega_0^2}\theta = \frac{F_0}{\underbrace{\frac{5}{6}mL}_{a}}\cos\Omega t$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{F_0}{a}\cos\Omega t, \text{ avec } \begin{cases} \lambda = \dfrac{\alpha}{20m} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{2m}} \\ a = \dfrac{5}{6}mL \end{cases}$$

2. Solution générale : $\theta(t) = \theta_T(t) + \theta_p(t)$.

Sol. générale = Sol. transitoire + Sol. particulière

$$\theta(t) = \theta_T(t) + \theta_p(t)$$

Après un temps suffisamment long : $\theta_T(t) \longrightarrow 0$

$$\theta(t) \simeq \theta_p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi_h)$$

avec . $A(\Omega) = \dfrac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} = \dfrac{6F_0/5mL}{\sqrt{\left(\frac{k}{2m} - \Omega^2\right)^2 + \frac{\alpha^2\Omega^2}{100m^2}}}$

et . $\tan\varphi = \dfrac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = -\dfrac{\Omega\,\alpha/10m}{\left(\frac{k}{2m} - \Omega^2\right)}$

3- Pulsation de résonance Ω_R

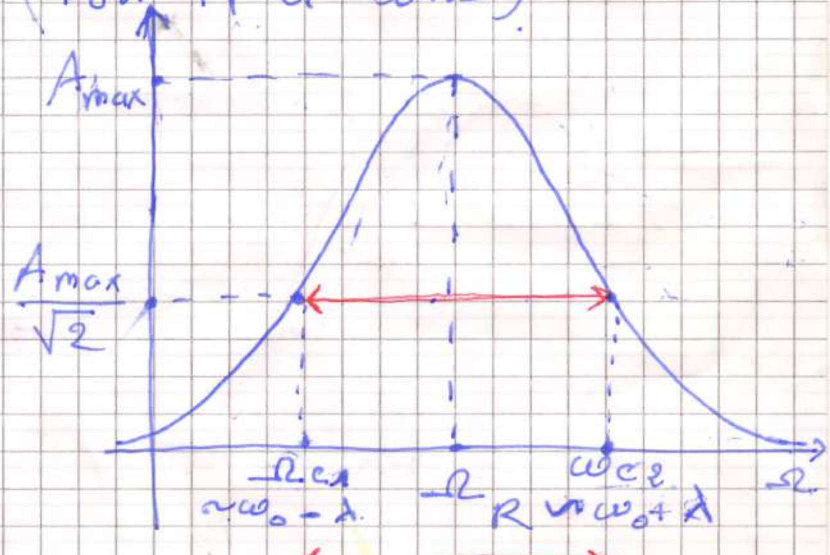
$$\frac{\partial A(\Omega)}{\partial \Omega} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\frac{k}{2m} - \frac{\alpha^2}{200m^2}}$$

4- Cas $\lambda \ll \omega_0$ (Voir TP et cours)

Pulsations de coupures :

$\Omega_{c1} \simeq \omega_0 - \lambda$. (basse)

$\Omega_{c2} \simeq \omega_0 + \lambda$ (haute)



B : bande passante

Bande passante :

$B = \Omega_{c2} - \Omega_{c1} = 2\lambda$.

$$\boxed{B = \frac{\alpha}{10m}}$$

Exo 02

1- $u = u_R + u_L + u_C$

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$\left.\begin{array}{l} i = \frac{dq}{dt} \\ \int i\,dt = q \end{array}\right\} \Rightarrow u = R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt} + \frac{q}{C} = u_0 \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\lambda}\dot{q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} q = \frac{u_0}{L}\cos \Omega t$$

2- $$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{u_0}{L}\cos \Omega t$$

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5.10^{3}.10}} = 4,47$ rad/s
- $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 1,4$ s
- $2\lambda = \frac{R}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{R}{2L} = \frac{80}{20} = 4\ s^{-1}$.

L'eq. devient

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = \frac{u_0}{10}\cos \Omega t.$$

3-

$$S_{\text{générale}} = S_{\substack{\text{Transitoire} \\ \text{(homogène)}}} + S_{\substack{\text{permanente} \\ \text{(particulière)}}}$$

$$q(t) = q_T(t) + q_p(t)$$

* Solution transitoire : $u(t) = 0$

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 0$$

$\lambda = 4 < \omega_0 = 4{,}47 \Rightarrow$ régime pseudo-périodique.

$$q(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

Pulsation pseudo-périodique :

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{20 - 16} = 2 \text{ rad/s}$$

$$\boxed{q(t) = A e^{-4t} \cos(2t + \varphi)}$$

4- Solution permanente : $u(t) \neq 0$ et $t >> 0$

$Q(t) \simeq Q_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$, Ω = pulsation d'excitation.

$$A(\Omega) = \frac{u_0 / a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} = \frac{u_0/10}{\sqrt{(20 - \Omega^2)^2 + 64\,\Omega^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{-8\Omega}{20 - \Omega^2} \Rightarrow \varphi = -\arctan\left(\frac{8\Omega}{20-\Omega^2}\right)$$

5- Condition de résonance :

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \quad \left(\frac{\partial A(\Omega)}{\partial \Omega} = 0\right)$$

Pour qu'il y ait résonance :

$$\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \Rightarrow \lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow \frac{R}{2L} < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow R < 2L\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

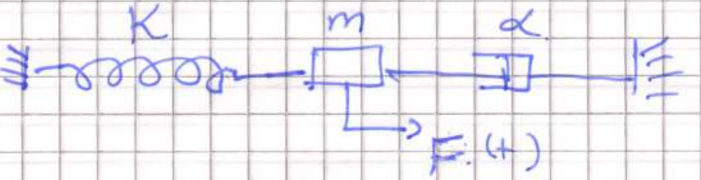
$$\Rightarrow R < R_{max} = 63{,}25\ \Omega$$

Pour $R = 80 > R_{max} \Rightarrow$ L'oscillateur ne peut pas atteindre la résonance.

6- * Schéma mécanique équivalent.

Analogie Mécanique - électricité :

Mécanique	Electricité
$x(t)$	$Q(t)$
m	L
α	R
K	$\frac{1}{C}$
$F(t)$	$U(t)$
$v(t)$	$i(t)$



* Impédance électrique :

$$Z_e = \frac{U(t)}{i(t)} = \frac{Ri + L\frac{di}{dt} + \int \frac{1}{C} i\,dt}{i(t)}$$

avec $\underline{i}(t) = i_0 e^{j\Omega t} \Rightarrow \underline{Z}_e = \frac{Ri + jL\Omega i + \frac{1}{Cj\Omega} i}{i}$

$$\Rightarrow \underline{Z}_e = R + j\left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)$$

* Impédance mécanique : Par analogie

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{v}(t)} = \alpha + j\left(m\Omega - \frac{K}{\Omega}\right)$$