Série de TD N°1 de physique 3

Ex01 :

Un mouvement harmonique est décrit par :

$$x(t) = Xcos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les conditions initiales sont :$x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

1. Calculer Xet φ.
2. Exprimer $x(t)$ sous forme $x(t) = Bcos(\omega_0 t) + Csin(\omega_0 t)$ et en deduire B et C.

Ex02 :

Calculer les dérivées suivantes :

a. $\frac{d}{dt}e^{j(\omega t+\varphi)}$ **b.** $\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \varphi)$ **c.** $\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi)$ **d.** $\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\frac{5}{2}\dot{x} + \frac{3}{2}x)$ **e.** $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{5}{2}\dot{x} + \frac{3}{2}x)$
f. $\frac{d}{dt}(\frac{5}{2}\dot{x}(t) + \frac{3}{2}x(t))$

Ex03

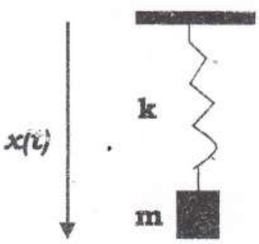
Soient les amplitudes complexes suivantes :

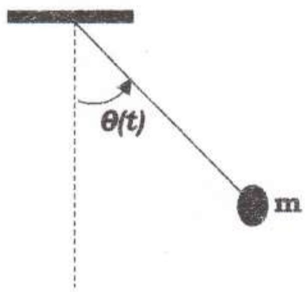
$\underline{A} = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j)(1 + \sqrt{3}j)$ et $\underline{B} = \frac{1+j}{-\sqrt{3}+j}$

1. Exprimer ces amplitudes complexes sous forme : $\underline{A} = a_1 e^{j\varphi_1}$ et $\underline{B} = a_2 e^{j\varphi_2}$
2. Soient les deux mouvements suivants : $x_1(t) = a_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = a_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, déterminer $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Ex04

1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, Trouver les équations différentielles des systèmes suivants :





2. Sans faire de calcul, que devient l'équation différentielle trouvée dans **1** si on a :
   a . Deux ressorts en parallèle.
   b. Deux ressorts en série.

(I)

Solution de la serie 1

Exo 1 :

1. Calculer X, φ :-

$x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

on a : $x(0) = X\cos\varphi = x_0$ — (1)

$\dot{x}(t) = -\omega_0 X \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

on a : $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = -\omega_0 X \sin\varphi$ — (2)

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \Rightarrow tg\varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = -\operatorname{arctg}\left(+\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}\right)}$$

(1) $\Rightarrow \cos\varphi = \frac{x_0}{X} \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{x_0^2}{X^2}$ (3)

(2) $\Rightarrow \sin\varphi = \frac{-\dot{x}_0}{\omega_0 X} \Rightarrow \sin^2\varphi = \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2 X^2}$ — (4)

(3) + (4) $\Rightarrow \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \frac{x_0^2}{X^2} + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2 X^2} = 1$

$\Rightarrow X^2 = x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}$

$$\Rightarrow X = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}.$$

(II)

2 - On a : ~~$\cos(\alpha+\beta)$~~

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$x(t) = X\left[\cos(\omega_0 t)\cos\varphi - \sin(\omega_0 t)\sin(\varphi)\right].$$

$$= B\cos\omega_0 t + C\sin(\omega_0 t)$$

avec : $\boxed{\begin{cases} B = X\cos\varphi \\ C = -X\sin\varphi \end{cases}}$

Exo 2 : - La dérivée totale : $\frac{d}{dt}f(g(t))$

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = \frac{\partial f(g(t))}{\partial g}\cdot\frac{dg(t)}{dt}$$

Exo 3 :

$$\underline{A} = a_1 e^{j\varphi_1} = 2e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

$$\underline{B} = a_2 e^{j\varphi_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{7\pi}{12}}$$

$$x_1(t) + x_2(t) = x(t) = a_1\cos(\omega t + \varphi_1) + a_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = a_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + a_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}$$

(représentation complexe)

III

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = e^{j\omega t}\left(\underbrace{a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2}}_{\underline{C}}\right)$$

$$= \underline{C}\, e^{j\omega t} = C e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$C e^{j\varphi} = \underline{C}$ (Amplitude complexe de la résultante)

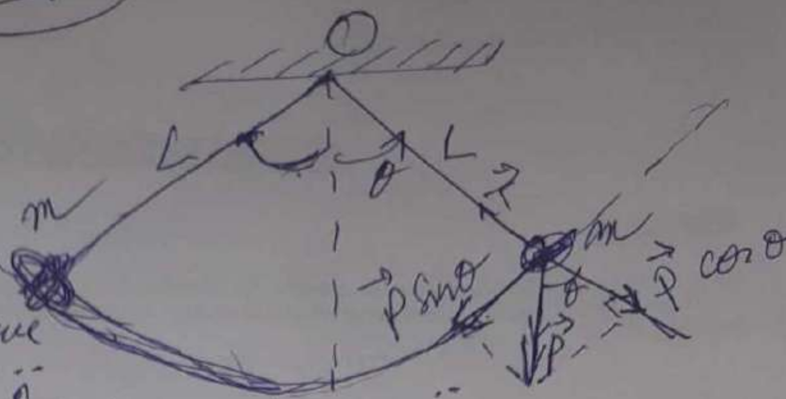
$$\boxed{x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{C} = a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2} = 2e^{j\pi/6} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{7\pi}{12}}$$

et $\begin{cases} C = |\underline{C}| \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\operatorname{Im}(\underline{C})}{\operatorname{Re}(\underline{C})} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1{,}58 \\ \varphi = 11{,}85^\circ \end{cases}$

donc : $\boxed{x(t) = 1{,}58 \cos(\omega t + 11{,}85^\circ)}$

EXO4 : (IV)



principe fondamental de la dynamique

$$\sum \mathcal{M}(\vec{F}) = J\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{T}) = J\ddot{\theta}$$

Suivant le sens de mvt, on a :

$$-P\sin\theta . L = J\ddot{\theta} \; ; \; J = mL^2$$

$$\Rightarrow -mg\sin\theta . L = mL^2\ddot{\theta}$$

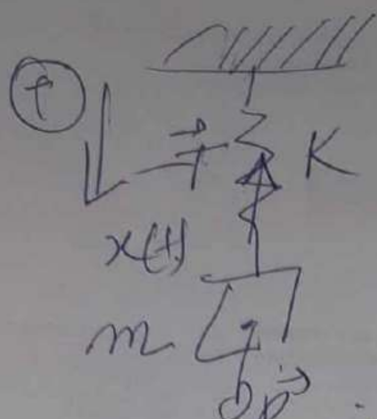
$$\Rightarrow -g\sin\theta = L\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \quad \text{—— (I)}$$

pour $\theta << 1 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$.

$$\text{(I)} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

V



$; \; = T = K x_0$

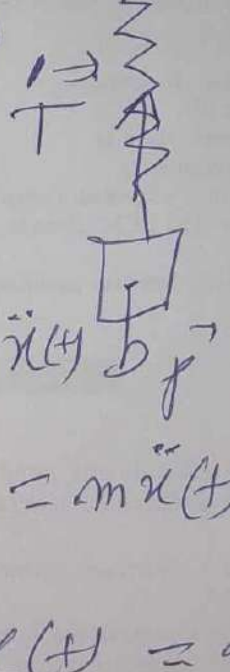
$; \; P = mg$

<u>Au repos</u> : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$$P = T \Leftrightarrow mg = K x_0$$

<u>Au mvt</u>

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$; $\vec{a} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$



$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

$\Rightarrow P - T = ma = m\ddot{x}(t)$

$\Rightarrow mg - K(x_0 + x(t)) = m\ddot{x}(t)$

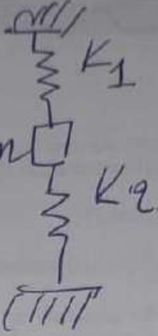
$\Rightarrow \underbrace{(mg - Kx_0)}_{=0} - Kx(t) = m\ddot{x}(t)$

$\Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{K}{m} x(t) = 0$ — II

VI

* - Deux ressort en parallèle.

$K_{eq} = K_1 + K_2$



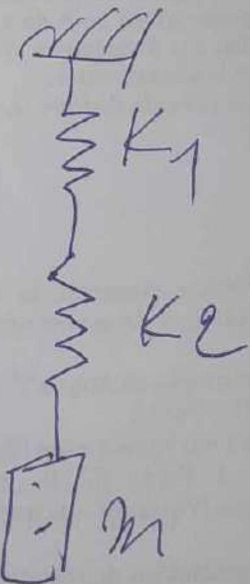
L'eq II $\Rightarrow$

$$\ddot{x}(t) + \frac{K_{eq}}{m} x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{K_1 + K_2}{m} x(t) = 0$$

* Deux ressorts en Serie

$$K_{eq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$



L'eq II $\Rightarrow$

$$\ddot{x}(t) + \frac{K_{eq}}{m} x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}}{m} x(t) = 0$$