Université de Bejaia **29.01.2024**
Département GE

Examen final
UEF 2312

Exercice (10pts): **On considère un système définie dans l'espace d'état.**

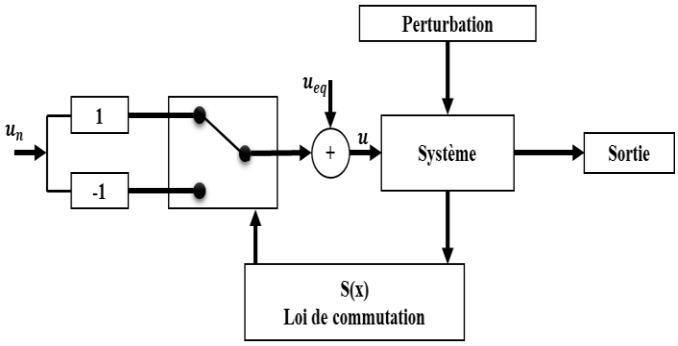
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

L'équation suivante présente la surface de glissement $S(x) = \alpha^T x$ $\quad \alpha^T = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

- **Déterminer l'expression de la commande par le mode glissant u(t) qui vérifie les conditions de stabilité et de convergence en se basant sur la fonction de Lyapunov suivante :**

$$F(x) = \frac{1}{2} S^2(x)$$

On introduit une constante $M_1 > 0$ pour régler le temps de réponse



2) On considère le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1)$$

On définit la surface de glissement sous forme : $S(x) = a\, x_1 + x_2 = \alpha^T x(t)$
On désire calculer la commande par mode de glissement, tel que les pôles du système en BF sont :
P1=0, P1=0.5

1) ***Calculer les gains du retour d'état***
2) **Calculer la pente de la surface de glissement a**

Exercice 2(10pts) : On souhaite appliquer une commande prédictive généralisée (GPC) à un MCC dont le modèle d'état est comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\, x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad avec \quad A = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1)$$

Avec : $x_1 = i : le\ courant\ d'induit$

$x_2 = \Omega : la vitesse\ de\ rotation$

1) ***Déterminer le degré relatif de la sortie y(t):***
2) ***Calculer les prédictions de y et sa référence à partir de l'expansion en série de Taylor, qui est exprimée par les dérivées de Lie.***
3) ***Calculer la commande optimale qui optimise la fonction de coût suivante :***

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \int_0^T [y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)]^T \, [y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)] d\tau$$

T **: le temps de prédiction**

Bon courage

Exercice (10pts)

- conditions de stabilité et de convergence en se basant sur la fonction de Lyapunov.

$$\boldsymbol{F(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{S}^2(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{F(x)} > 0 \qquad et \qquad \dot{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) < 0 \qquad (\mathbf{1}\boldsymbol{pts})$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}[\,\boldsymbol{Ax(t)} + \boldsymbol{Bu(t)}] - - - - - - - - - - - - - - \ (\mathbf{1}\boldsymbol{pts})$$

Pour assurer la stabilité il faut vérifier :$\dot{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}).\dot{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0}$

$$\begin{cases} si \quad S(x) < 0 \quad => \dot{S}(x) = \alpha^{\mathrm{T}}\, Ax(t) + \alpha^{\mathrm{T}}Bu(t) > \ 0 \\ si \quad S(x) > 0 \quad => \dot{S}(x) = \alpha^{\mathrm{T}}\, Ax(t) + \alpha^{\mathrm{T}}Bu(t) < \ 0 \end{cases} (\mathbf{1}\boldsymbol{pts})$$

On introduit une constante $M_1 > 0$pour régler le temps de réponse

$$\begin{cases} si \quad S(x) < 0 \quad => \dot{S}(x) = \alpha^{\mathrm{T}}\, Ax(t) + \alpha^{\mathrm{T}}Bu(t) \geq M_1 > \ 0 \\ si \quad S(x) > 0 \quad => \dot{S}(x) = \alpha^{\mathrm{T}}\, Ax(t) + \alpha^{\mathrm{T}}Bu(t) \leq -M_1 < \ 0 \end{cases} \qquad (\mathbf{1}\boldsymbol{pts})$$

Pour satisfaire ces conditions, on détermine la commande u(t) de manier à avoir

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{Ax(t)} + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bu(t)} + \boldsymbol{sign}\ (\boldsymbol{s})\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{1}\boldsymbol{pts}) \qquad)$$

On tire la commande

$$\boldsymbol{u(t)} = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x(t)} - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{sign}(\boldsymbol{S})\mathrm{k}^{\mathrm{T}} = \frac{\alpha^{\mathrm{T}}A}{\alpha^{\mathrm{T}}B} \qquad M = \frac{M_1}{\alpha^{\mathrm{T}}B}(\mathbf{1}\boldsymbol{pts})$$

2) On considère le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A\,x(t)} + \boldsymbol{Bu(t)} \\ \boldsymbol{y(t)} = \boldsymbol{Cx(t)} \end{cases} \quad \boldsymbol{avec} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} - \mathbf{1} \\ \mathbf{5} - \mathbf{10} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{1})$$

On définit la surface de glissement sous forme

$$S(x) = \mathrm{a}\, x_1 + x_2 = (a \quad 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x(t)}$$

$$\boldsymbol{u(t)} = -\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x(t)} - \boldsymbol{M}.\boldsymbol{sign}(\boldsymbol{S})\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}} \qquad \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a} \quad \mathbf{1})\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{5} & -\mathbf{10} \end{pmatrix} = (\mathbf{5} - \mathbf{a} - \mathbf{10})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a} \quad \mathbf{1})\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{k}_{\mathbf{1}} \quad \boldsymbol{k}_{\mathbf{2}}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}(\mathbf{5} \qquad -\mathbf{a} - \mathbf{10}) = \left(\frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{a}} - \mathbf{1} - \mathbf{10/a}\right)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_{\mathbf{1}} = \dfrac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{a}} \\ \boldsymbol{k}_{\mathbf{2}} = -\mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{a}} \end{cases} - - - - - - - - - (\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$$

$$\boldsymbol{k}_{\mathbf{2}} = -\mathbf{1} - \mathbf{2}\boldsymbol{k}_{\mathbf{1}}$$

Présentation d'état du Système en BF en mode glissant

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

Sans le chattering on aura un système linéaire commande par un régulateur à retour d'état $-\mathrm{k}^{\mathrm{T}}x(t)$.

$u(t) = -\mathrm{k}^{\mathrm{T}}x(t) - M.sign(S) = -\mathrm{k}^{\mathrm{T}}x(t)$

On remplace dans l'équation d'état :

$$\boldsymbol{\dot{x}(t) = Ax(t) - B\mathrm{k}^{\mathrm{T}}x(t) = [A - B\mathrm{k}^{\mathrm{T}}]x(t) - - - - - - - - (1pt)}$$

$$\boldsymbol{A - B\mathrm{k}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 5 - 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (k_1 k_2) = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 5 - 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & k_1 k_2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 - 1 - k_2 \\ 5 - 10 \end{pmatrix}}$$

On calcule les valeurs propres (pôles)

Det[PI-$(\boldsymbol{A - B\mathrm{k}^{\mathrm{T}}})] = \boldsymbol{0}$

PI-$(\boldsymbol{A - B\mathrm{k}^{\mathrm{T}}}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P0} \\ \boldsymbol{0P} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{-k_1} & \boldsymbol{-1-\ k_2} \\ & \boldsymbol{5 - 10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{P + k_1 1 + k_2} \\ \boldsymbol{-5} & \mathbf{P + 10} \end{pmatrix}$

Det (PI- $(A - B\mathrm{k}^{\mathrm{T}})] = (\boldsymbol{P + k_1})(\boldsymbol{P} + 10) + 5(\boldsymbol{1 + k_2})$

$= P^2 + (10 + k_1)P + 10k_1 + 5 + \boldsymbol{-5 - 10k_1} = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{P} + (10 + k_1)]=0$

$$\boldsymbol{la\ solution} : \begin{cases} \boldsymbol{P_1 = 0} \\ \boldsymbol{P_2} = -(10 + k_1) \end{cases} \quad - - - - - - - \quad (\boldsymbol{1pt})$$

Le choix de la dynamique en BF : $\begin{cases} \boldsymbol{P_1 = 0} \\ \boldsymbol{P_2 = -0.5} \end{cases}$

Calcul du coefficient du retour d'état

$$\boldsymbol{P_2} = -10 - k_1 \ \ \boldsymbol{donc} \quad \begin{cases} k_1 = -\boldsymbol{P_2} - 10 = -9.5 \\ \\ \boldsymbol{k_2 = -1 - 2k_1 = -20} \end{cases} - - - - - - - - (\boldsymbol{1pt})$$

Calcul du coefficient de la surface de glissement

$$\begin{cases} \boldsymbol{k_1} = \dfrac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{a}} a = \dfrac{5}{k_1} \\ a = \dfrac{5}{\boldsymbol{-9.5}} = -0.526 \end{cases} - - - - - - - - -(\boldsymbol{1pt})$$

Exercice 2 (10pts)

1) **Le degré relatif de la sortie y(t)(3pts)**

$y(t) = h(x) = x_2 \qquad\qquad x = (x_1 x_2)^T$

$\dot{y}(t) = L_f h(x) = x_1 - x_2$**--------------------------(0.5pts)**

Ledegrérelatifdelasortie$\rho > 1$(0.5pts)

On calcule la deuxième dérivée :

$\ddot{y}(t) = -11x_1 + 10u$**---------------------------(1pts)**

Le degré relatif de la sortie y= Ω est$\rho = 2$:---------------------------(1pts)

2) **Calculer la prédiction de y et sa référence à partir de l'expansion en série de Taylor, qui est exprimée par les dérivées de Lie. (2pts)**

Le degré relatif de la sortie y= Ω est$\rho = 2$:

$$y(t+\tau) = y(t) + \tau\dot{y}(t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix}$$:---------------------(1 pt)

$$y_{ref}(t+\tau) = T(\tau)Y_{ref}(t) ------------------(1\ \text{pt})$$

3) **Calculer la commande optimale qui optimise la fonction de coût: (5pts)**

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}[Y_{ref}(t) - Y(t)]^T \int_0^{T_p} T(\tau)^T T(\tau) d\tau \left[Y_{ref}(t) - Y(t)\right] ---------- (1\text{pts})$$

$$avec: \begin{cases} M_0 = y_{ref} - x_2 \\ M_1 = \dot{y}_{ref} - (x_1 - x_2) \\ M_2 = \ddot{y}_{ref} + 11x_1 \\ G = 10 \end{cases}$$ --------------------------(1pts)

$$\int_0^{T_p} \begin{bmatrix} 1 \\ \tau \\ \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix} d\tau = \int_0^{T_p} \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ \tau & \tau^2 & \frac{\tau^3}{2} \\ \frac{\tau^2}{2} & \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^4}{4} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T_p & \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{6} \\ \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{3} & \frac{T_p^4}{8} \\ \frac{T_p^3}{6} & \frac{T_p^4}{8} & \frac{T_p^5}{20} \end{bmatrix} ------------- (1\text{pts})$$

La condition nécessaire à satisfaire pour trouver la commande optimale est la suivante :

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u} = 0 \qquad ------------ (1\text{pts})$$

$$u = -1/G\left(\frac{10}{3T_p^2}M_0 + \frac{5}{2T_p}M_1 + M_2\right) ------------------ (1\text{pts})$$