L_2 Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département d'Automatique, Télécommunications et d'Electronique
® 2023–2024
Durée : 01H30

✠–Examen Final de Mathématiques 3–✠

Exercice 1 **(10.00 points)** :

1. Calculer les intégrales simples suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\, dx, \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 x^2 \ln(x^2+1)\, dx.$$

2. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

$$I_3 = \int_{2024}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{(x-1)^{2024}}\right) dx, \quad \text{et} \quad I_4 = \int_2^{+\infty} \sin(x^2)\, dx.$$

3. Déterminer la nature des séries numériques dont les termes généraux sont les suivants :

$$U_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}, \quad \text{et} \quad V_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Exercice 2 **(10.00 points)** :

I. Soit $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x \geq y \geq 0;\ \ x^2+y^2 \leq 1\}$.
- Tracer le domaine D_1.
- Calculer $I_1 = \int\int_{D_1} \sin(x^2+y^2)\, dxdy$.

II. Soit le domaine $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x \geq 0;\ \ 2x^2 \leq y \leq 3\}$.

1. Tracer le domaine D_2.
2. Calculer l'aire de D_2.

III. Soient $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$, et
$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \ z \geq 0,\ \ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

1. Calculer les intégrales triples suivantes :

$$J_1 = \int\int\int_{V_1} x^2 z\, dxdydz, \quad \text{et} \quad J_2 = \int\int\int_{V_2} \ln(x^2+y^2+z^2+1)\, dxdydz.$$

Bonne Chance

© Mr Zioui\& Mr Boualem

Exo1 :

1.

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$

1,5 pts

$$I_2 = \int_0^1 x^2 \ln(x^2+1)\,dx$$

$$u(x) = \ln(x^2+1) \Rightarrow u'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$v'(x) = x^2 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$I_2 = \left[\left(\frac{1}{3}x^3\right)\ln(x^2+1)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\int_0^1 x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - x + \arctan(x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\left[-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}$$

2 pts

2-

$$I_3 = \int_{2024}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{(x-1)^{2024}}\right)dx \quad (PS : +\infty)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{(x-1)^{2024}}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{2024}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{2024}}$$

$$\int_{2024}^{+\infty} \frac{1}{x^{2024}}\,dx$$ converge (Int de Riemann, $\alpha = 2024$)

1,5 pts

D'après le critère d'équivalence

$$\int_{2024}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{(x-1)^{2024}}\right) dx$$ converge.

---

* $$I_4 = \int_{2}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$$

On pose : $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$x = 2 \Rightarrow t = 4$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$

2 pts

$$I_4 = \int_{4}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\,dt$$

La fct $t \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$ continue décroissante

sur $[4, +\infty[$ et $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} = 0$

$$\left|\int_{4}^{x} \sin(t)\,dt\right| = |\cos(4) - \cos(x)| \leq |\cos(4)| + |\cos x|$$
$$\leq 1 + 1 = 2$$

Donc d'après le critère d'Abel $\int_{2}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ converge.

③

$$u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{(n+2)}(n+3)}{(n+1)\cancel{n!}} \times \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{(n+2)}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n+3}{(n+1)^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2} = 0 < 1$$

1,5 pts

D'après le critère d'Alambert la série $\sum u_n$ converge

$$v_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\lim \sqrt[n]{v_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

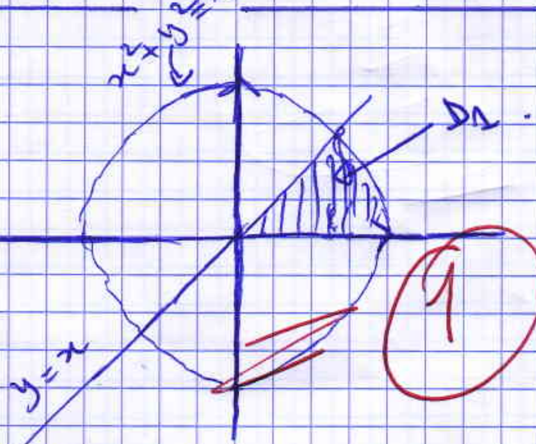
1,5 pts

D'après le critère de cauchy, la série $\sum v_n$ converge

EX 02

I -

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y \geq 0 ; x^2+y^2 \leq 1\}$



1 pts

$$I_1 = \iint_{D_1} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad |J| = r$$

$0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

$$I_1 = \int_0^1 r\sin(r^2)\, dr \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

2 pts

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos(r^2)\right]_0^1 \times \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(1) - \cos(0)\right) \times \frac{\pi}{4}$$

$$= +\frac{\pi}{8}\left[1 - \cos(1)\right]$$

II -

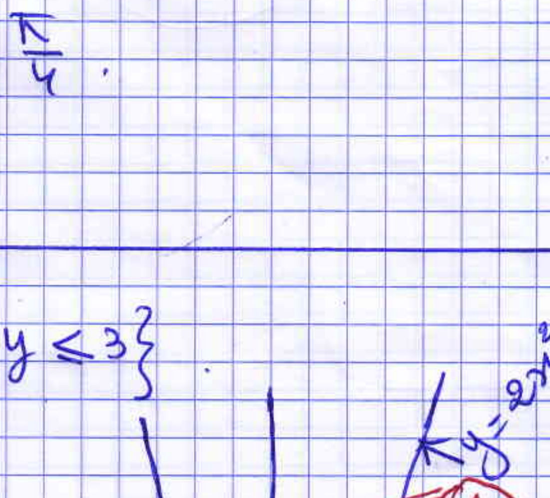
$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 ; 2x^2 \leq y \leq 3\}$

$$\text{Aire}(D_2) = \iint_{D_2} dx\, dy \quad \underset{=}{u.a}$$

$$= \int_0^{\sqrt{3/2}} \left[\int_{2x^2}^{3} dy\right] dx$$

1 pts

$$= \int_0^{\sqrt{3/2}} (3 - 2x^2)\, dx = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\ u.a$$



1 pts

$J_1 =$

II - coordonnés cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad |J| = r \qquad \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ r^2 \le z \le 1 \end{array}$$

$$J_1 = \iiint r^2\cos^2\theta \, z \, r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{r^2}^1 r^3 z \, dz \right] dr \times \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

2 pts

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^3 \left[z^2\right]_{r^2}^1 dr \times \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos(2\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^3(1-r^4)\, dr \times \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{8}r^8\right]_0^1 \times [2\pi]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{8}\right][2\pi] = \frac{\pi}{16}$$

$J_2 = ?$, coordonnés sphériques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ x = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \qquad |J| = r^2\cos\varphi$$

2 pts

$0 \le r \le 1$; $0 \le \theta \le 2\pi$ et $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$J_2 = \iiint \ln(r^2+1) \cdot r^2 \cos\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^1 r^2 \ln(r^2+1)\, dr}_{} \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi$$

(5) $$= I_2 \times [2\pi] \times [1] = \left(\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}\right) 2\pi$$