Université A. Mira de Bejaia
Faculté de Technologie
Département Génie Electrique L2(ELT+ELM) +Ingénieur

Année universitaire :2023/2024
Durée : 1h30min

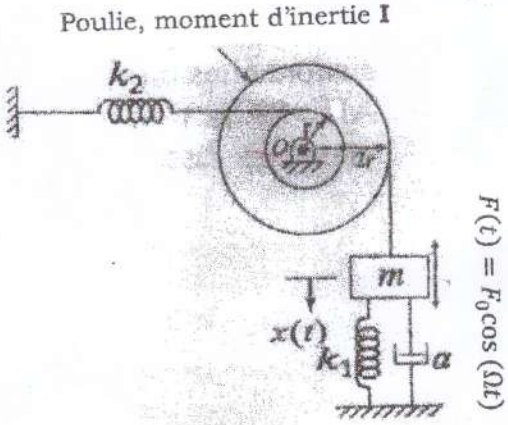
EXAMEN FINAL DE PHYSIQUE 3

Exercice 01 (4,5 points)

1. Ecrire l'équation différentielle du mouvement des systèmes forcés.
2. Trouver la solution $x_P(t)$ en régime permanent pour une excitation constante : **F(t)=F₀**
3. Pour une excitation sinusoïdale : $F(t) = F_0 cos\Omega t$
   a. Définir la résonance et donner dans ce cas la pulsation **Ω** et la phase **φ** pour $\frac{\lambda}{\omega_0} \ll 1$.
   b. Trouver la condition sur α pour que l'oscillateur peut atteindre la résonance.
   c. Que devient l'état de l'oscillateur si $\lambda = 0$. Comment s'appelle ce phénomène.
   d. Donner l'intervalle appartient la pulsation de résonance Ω_R .
   e. Quelle est la valeur de **A** aux pulsations de coupure.

Exercice 2 (9,5 points)

Soit le schéma ci-contre, d'un système forcé, les deux ressorts sont déformés à l'équilibre ($x = 0$).



1. Déterminer l'énergie potentielle U et donner sa forme simplifiée en utilisant la condition d'équilibre.
2. Déterminer l'énergie cinétique T, le Lagrangien $\mathcal{L}$ ainsi que la fonction de dissipation D.
3. Montrer que l'équation du mouvement de la masse m s'écrit :

$$\left(\frac{I}{2r} + 2mr\right)\ddot{x} + 2\alpha r\dot{x} + \left(2k_1 r + \frac{k_2 r}{2}\right)x = 2rF_0 cos\Omega t$$

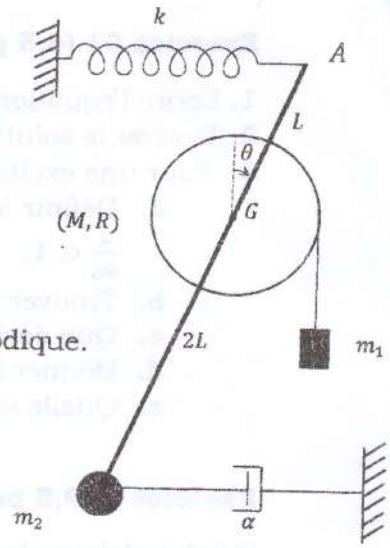
4. Donner la solution $x_T(t)$ en régime transitoire lorsque $k_1 = 1000N/m$, $k_2 = 500N/m$, $\alpha = 500N.s/m$, $m = 10kg$, $r = 5cm$, $I = 1kg.m^2$, $F_0 = 50N$
5. Quelle est la valeur de l'amplitude du mouvement après un temps $\tau = 0{,}611s$.
6. Donner la solution $x_P(t)$ en régime permanent (préciser l'amplitude A et la phase φ)
7. Vérifier si la valeur de α donnée ci-dessus, l'oscillateur peut atteindre la résonance.
8. Pour $\alpha = 1N.s/m$, calculer le facteur de qualité Q et la bande passante B.
9. Calculer $A(\Omega_R) et\ A(\omega_0)$, comparer les deux résultats. Comment justifier ça mathématiquement. Tracer $A(\Omega)$ et B dans le même graphe.

Exercice 3 (6 points)

Un disque de masse M et de rayon R, qui peut tourner sans frottement autour d'un axe fixe (G) passant par son centre, est reliée à par un fil sans masse et inextensible à une masse ponctuelle m_1. Une tige indéformable, sans masse de longueur $3L$ solidaire à ce disque est retenue à son extrémité supérieure par un ressort horizontal de longueur à vide l_0 et une constante de raideur k à une distance L de l'axe de rotation (G).

Cette tige porte à son extrémité inférieure une masse m_2 à une distance $2L$ du centre de disque G subissant l'effet d'un amortisseur de coefficient α.(voir le schéma ci-dessous).

A l'équilibre, la tige est verticale et le ressort est allongé d'une distance x_0.



1. Si $m_1 = m_2 = m$, $M=2m$ et $L=2R$, écrire l'énergie potentielle U.
2. Déterminer la condition d'équilibre, ensuite montrer qu'après simplification, l'énergie potentielle peut s'écrire :
$U = 2mgR\theta^2 + 2kR^2\theta^2 + C^{st}$.
3. Montrer que l'expression de l'énergie cinétique est : $T = 9mR^2\dot{\theta}^2$
4. Trouver la fonction de dissipation D
5. Ecrire l'équation différentielle du mouvement.
6. Quelle est la condition sur α pour avoir un régime pseudo-périodique.

On donne le moment d'inertie de disque : $I = \frac{1}{2}MR^2$

EXO 1 (Questions de cours) (1)

(1) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{a}$ (0,5)

(2) - Excitation constante : $F(t) = F_0 \Rightarrow$ la réponse constante $x_p(t) = C$

alors : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{a}$ (0,75)

$\Rightarrow 0 + 0 + \omega_0^2 C = F_0/a \Rightarrow \boxed{C = \frac{F_0}{a\omega_0^2}}$

d'où : $\boxed{x_p(t) = \frac{F_0}{a\omega_0^2}}$

(3) a- résonance : (Def) (0,25)

à la résonance : $\Omega = \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

pour : $\frac{1}{\omega_0^2} \ll 1$ ($\frac{1}{\omega_0}$ est négligeable devant 1) $\Rightarrow$ (0,25) $\Omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2}$

$\Rightarrow \boxed{\Omega_R \simeq \omega_0}$ car $\frac{1}{\omega_0} \to 0$ (0,25)

- pour $\Omega_R \simeq \omega_0 \Rightarrow \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$

b/ $1 < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2a} < \sqrt{\frac{b}{2a}}$ (0,5)

$\Rightarrow \alpha < 2a\sqrt{\frac{b}{2a}}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha < \sqrt{2ab}}$

c/ Si $\lambda = 0$: à la résonance

$\Omega = \Omega_R = \omega_0$ (0,5)

$A(\omega_0) \longrightarrow \infty \Rightarrow$ L'oscillateur

Atteint l'état critique (la rupture)

le phénomène s'appelle la résonance (0,5)

maximale.

d/ d'une manière générale

$\Omega_R \in [0, \omega_0]$ (0,5)

e/ aux pulsations de coupure :

$A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ (0,5)

Exo 2 : (3)

1- Energie potentielle : (1,75)

$U = U_{K_1} + U_{K_2} + U_m$:

$= \frac{1}{2} K_1 d_1^2 + \frac{1}{2} K_2 d_2^2 - mgh.$

x_0 : - Allongement de ressort K_1 à l'équilibre.

x'_0 : " " " K_2 " "

$U = \frac{1}{2} K_1 (x + x_0)^2 + \frac{1}{2} K_2 (x' + x'_0)^2 - mgx.$

D'après le schéma : $\begin{cases} x = 2r\theta \Rightarrow \frac{x}{2} = r\theta \\ x' = r\theta \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{2} = x'}$

$U = \frac{1}{2} K_1 (x + x_0)^2 + \frac{1}{2} K_2 \left(\frac{x}{2} + x'_0\right)^2 - mgx$

La condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$

$\frac{\partial U}{\partial x} = K_1 (x + x_0) + \frac{K_2}{2}\left(\frac{x}{2} + x'_0\right) - mg$

$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} \Rightarrow \boxed{K_1 x_0 + \frac{K_2}{2} x'_0 = mg}$

L'énergie potentielle simplifiée :

$$U = \frac{1}{2}K_1 x^2 + \frac{1}{8}K_2 x^2 + \text{Ste}$$

Où : $\text{Ste} = \frac{1}{2}K_1 x_0^2 + \frac{1}{2}K_2 x_0'^2$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\left(K_1 + \frac{K_2}{4}\right)x^2 + \text{Ste}}$$

2/ Energie cinétique = 0,75

$$T = T_{disque} + T_m$$

$$= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

On a : $x = 2r\theta \Rightarrow \theta = \frac{x}{2r} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{2r}}$

$$T = \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{4r^2} + m\right)\dot{x}^2$$

* Lagrangien : ~~$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{4r^2} + m\right)\dot{x}^2 -$~~

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{4r^2} + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left(K_1 + \frac{K_2}{4}\right)x^2 + \text{Ste}$$

0,25

* Fonction de dissipation : $\boxed{D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2}$ 0,5

3/ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t)$ (5)

$\Rightarrow \left(\left(\frac{I}{4r^2} + m\right)\ddot{x} + \left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right)x = -\alpha\dot{x} + F(t)\right) \times 2r$

$\Rightarrow \left(\frac{I}{2r} + 2mr\right)\ddot{x} + 2\alpha r\dot{x} + \left(2k_1 r + \frac{k_2 r}{2}\right)x = 2rF(t)$

4-/

$\Rightarrow 11\ddot{x} + 50\dot{x} + 112{,}5x = 0{,}1 F_0 \cos \Omega t$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{50}{11}\dot{x} + \frac{112{,}5}{11}x = \frac{F_0 \cos \Omega t}{110}$ (1,25)

$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{a}\cos \Omega t$

Avec : $\begin{cases} 2\lambda = \frac{50}{11} \Rightarrow \lambda = 2{,}27\ s^{-1} \\ \omega_0^2 = \frac{112{,}5}{11} \Rightarrow \omega_0 = 3{,}20\ rad/s \\ a = 110\ kg \end{cases}$

4/ $x(t) = ?$

$\lambda^2 - \omega_0^2 = 5{,}15 - 10{,}22 = -5{,}07 < 0 \Rightarrow$

La nature du régime est pseudo-périodique (0,75)

$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) = Ae^{-2{,}27t}\cos\left(\sqrt{5{,}07}t + \varphi\right)$

5- pour $t = 0{,}611s \Rightarrow \boxed{A(t) = Ae^{-2{,}27 \times 0{,}611} = \frac{A}{4}}$ (05)

6- $x_p(t) = ?$ (1) (6)

$x_p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$

où : $A = \dfrac{F_0/a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} = \dfrac{0,45}{\sqrt{(10,22 - \Omega^2)^2 + 20,6\alpha\Omega^2}}$

$\varphi = -\arctg\left(\dfrac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = -\arctg\left(\dfrac{4,54\,\Omega}{10,22 - \Omega^2}\right)$

7/ $\lambda < \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{11} < \dfrac{3,20}{\sqrt{2}}$ (0,5)

$\Rightarrow \alpha < \dfrac{3,20 \times 11}{0,05\sqrt{2}} = 498\ N.s/m$

pour $\alpha = 500\ N.s/m > \alpha_{max} = 498\ N.s/m \Rightarrow$

L'oscillateur ne peut atteindre la résonance.

8/ : pour $\alpha = 1\ N.s/m$. (0,75)

$\lambda = \dfrac{\alpha}{M} = \dfrac{0,05}{11} = 0,004545^{-1}$

* facteur de qualité : $Q = \dfrac{\omega_0}{2\lambda} = \dfrac{3,20}{0,009} = 355,55$

* Bande passante $= \Omega_{c_2} - \Omega_{c_1} = 2\lambda$

$= 0,009\ rad/s$

9- $A(\Omega_R)$, $A(\omega_0)$.

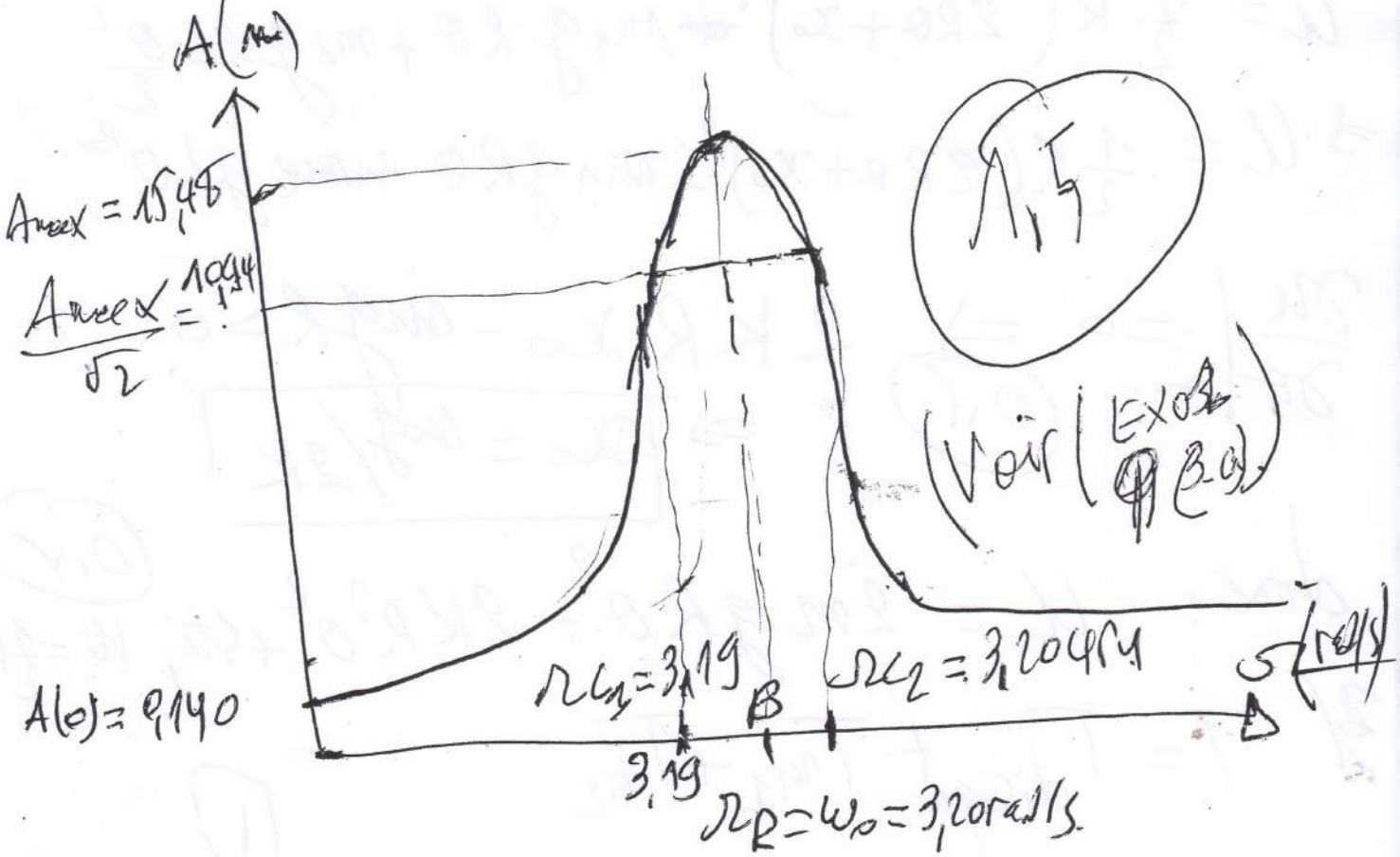
7

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{10{,}22 - 0{,}0000405}$$

$$\simeq \omega_0 = 3{,}20 \text{ rad/s}$$

$$A(\Omega_R) = A(\omega_0) = \cancel{\frac{0{,}45}{14{,}528} = 0{,}0309} \text{ m}$$

$$\Rightarrow A(\omega_0) = \frac{0{,}45}{2 \times 0{,}00454 \times 3{,}20} = 15{,}48 \text{ m}$$



1,5

(Voir (Exo 2 (3.a))

$$\Omega_{C_1} = \omega_0 - \lambda = 3{,}20 - 0{,}00454 = 3{,}195 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{C_2} = \omega_0 + \lambda = 3{,}20 + 0{,}00454 = 3{,}20454 \text{ rad/s}$$

$$A(\infty) = 0 .$$

EXO3 :

1/ $U = U_K + U_{m_1} + U_{m_2}$.

$= \frac{1}{2}K(x+x_0)^2 - m_1 g h_1 + m_2 g h_2$.

(1) D'après le schéma on a :

$x = L\theta = 2R\theta$.

$h_1 = R\theta$, $h_2 = 2L(1-\cos\theta)$

pour $\theta << 1 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$ et $1-\cos\theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$

$U = \frac{1}{2}K(2R\theta + x_0)^2 + m_1 g R\theta + m_2 g 2L\frac{\theta^2}{2}$.

$\Rightarrow U = \frac{1}{2}K(2R\theta + x_0)^2 - m_1 g R\theta + m_2 g L\theta^2$

$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow$ (0,5) $2KRx_0 - mgR = 0$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = mg/2K}$

donc : $U = 2mgR\theta^2 + 2KR^2\theta^2 + \text{Ste}$; $\text{Ste} = \frac{1}{2}Kx_0^2$ (0,5)

2/ $T = T_{\text{disque}} + T_{m_1} + T_{m_2}$

(1) $T = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1(L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2$

pour la masse m_2, on peut écrire : $\begin{cases} T_{m_2} = \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 \\ \text{ou} \\ T_{m_2} = \frac{1}{2}m_2 V_{m_2}^2 \end{cases}$

(9)

$$T = \frac{1}{2}\left(mR^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(m(2L)^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$= mR^2\dot{\theta}^2 + 8mR^2\dot{\theta}^2 \quad / \quad \boxed{L = 2R}$$

$$\Rightarrow T = 9mR^2\dot{\theta}^2.$$

4- $D = \frac{1}{2}\alpha V_{m_2}^2 = \frac{1}{2}\alpha\left(2L\dot{\theta}\right)^2 = 8\alpha R^2\dot{\theta}^2.$ (0,5)

5- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

(0,5)

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(18mR^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}\left(4KR^2\theta^2 + 4mgR\theta^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow 18mR^2\ddot{\theta} + 16\alpha R^2\dot{\theta} + (4KR + 4mg)R\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{8\alpha}{9m}\dot{\theta} + \frac{2(KR+mg)}{9mR}\theta = 0.$$ (0,5)

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Avec : $\begin{cases} 2\lambda = \frac{8\alpha}{9m} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4\alpha}{9m} & (0,25) \\ \omega_0^2 = \frac{2(KR+mg)}{9mR} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{?} & (0,25) \end{cases}$

6- $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ (0,5) $\Rightarrow \alpha < \frac{3}{4}\sqrt{\frac{(KR+mg)m}{R}}$ (0,5)