Chapitre 2

Champ électrostatique

1. Champ de scalaires et champ de vecteurs

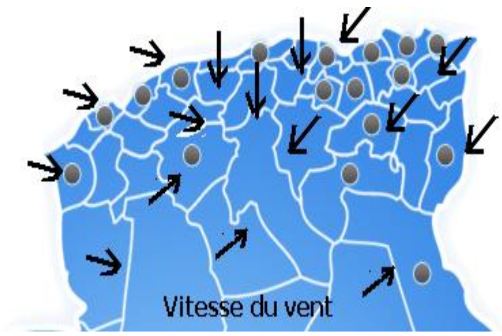
Si à tout point de l'espace $M(x,y,z)$ on associe une fonction scalaire (nombre) $F(x,y,z)$, on dit qu'on a créé un champ de scalaires.

Exemples : température (T) , pression, masse volumique (ρ), ………..etc.

Si à tout point de l'espace $M(x,y,z)$ on associe une fonction vectorielle (vecteur) $\vec{V}(x,y,z)$, on dit qu'on a créé un champ de vecteurs.

Exemples : vitesse du vent $\vec{v}$, accélération de la pesanteur $\vec{g}$, force $\vec{F}$,…………etc.

Champ de scalaires (Température T (°C))



Champ de vecteurs (vitesse de vent $\vec{v}$)

2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Soient 2 points M1 et M2 distants de r . On place une charge q_1 (positive) au point M1 et une charge q_2 (positive) au point M2.

La charge q_1 exerce sur la charge q_2 la force répulsive $\vec{F}_{1/2}$.

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\,\vec{u}_{12} = q_2\left(\frac{kq_1}{r^2}\,\vec{u}_{12}\right)$$

Simultanément, la charge q_2 exerce sur la charge q_1 la force répulsive $\vec{F}_{2/1}$.

$$\vec{F}_{2/1} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\,\vec{u}_{21} = q_1\left(\frac{kq_2}{r^2}\,\vec{u}_{21}\right)$$

Maintenant on ôte la charge q_1 et on la remplace par une charge q_3 (positive).

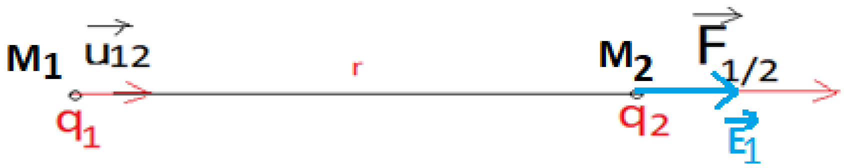
La force exercée par la charge q_1 sur la charge q_3 est :

$$\vec{F}_{1/3} = \frac{kq_1q_3}{r^2}\,\vec{u}_{12} = q_3(\frac{kq_1}{r^2}\,\vec{u}_{12})$$

On constate que dans les expressions des forces $\vec{F}_{1/2}$ et $\vec{F}_{1/3}$ il y a un terme commun ($\frac{kq_1}{r^2}\,\vec{u}_{12}$)qui ne dépend que de la charge q_1 et de la distance r entre les 2 points M1 et M2. Il est dû uniquement à la charge q_1.

Comme le terme ($\frac{kq_1}{r^2}\,\vec{u}_{12}$) est une grandeur vectorielle, on le remplace par $\vec{E}_1$:

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{r^2}\,\vec{u}_{12}$$



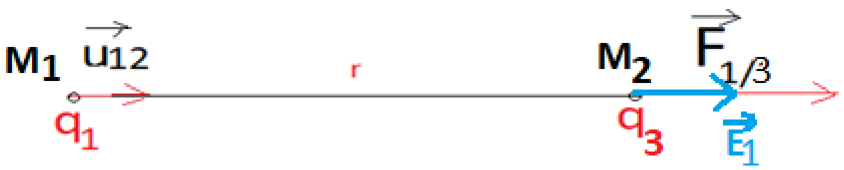
$\vec{E}$ est le champ électrostatique créé par la charge q_1 au point M2.

Si on place la charge q_2 au point M2, la force exercée par q_1 sur q_2 est :

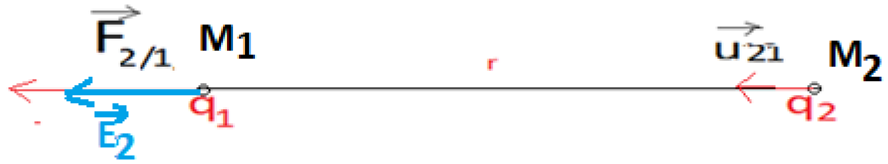
$$\vec{F}_{1/2} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\,\vec{u}_{12} = q_2\;\vec{E}_1 \Rightarrow \vec{F}_{1/2} = q_2\;\vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{F}_{1/2}\,/q_2$$

De même, la force exercée par q_1 sur q_3 est :

$$\vec{F}_{1/3} = q_3\;\vec{E}_1$$



De son côté, la charge $q_2$va créer au point M1 un champ électrostatique $\vec{E}_2$:



$$\vec{F}_{2/1} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\,\vec{u}_{21} = q_1\left(\frac{kq_2}{r^2}\,\vec{u}_{21}\right) = q_1\vec{E}_2$$

$$\vec{E}_2 = \frac{kq_2}{r^2}\,\vec{u}_{21}$$

$\vec{E}_2$ est le champ électrostatique créé par au point M$_1$.

De même, la force exercée par q_2 sur q_1 est :

$$\vec{F}_{2/1} = q_1\ \vec{E}_2$$

En résumé, le champ électrostatique $\vec{E}$ ne dépend que de la valeur de q et de la distance au point M. La connaissance de $\vec{E}$ en un point donné nous permet de calculer facilement la force électrostatique $\vec{F}$ exercée sur une charge quelconque q placée au point M.

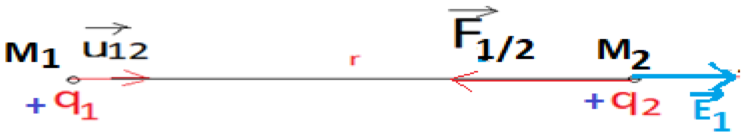
Sens de $\vec{E}$:

On place aux points M1 et M2 les charges q_1 et q_2.

- Si $q_1\,(+)$ et $q_2\,(+)$:

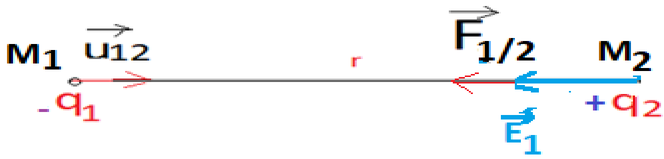
$\vec{F}_{1/2} = q_2\ \vec{E}_1$: comme q_2 est positive (force répulsive), la force et le champ sont dans le même sens.

- Si $q_1\,(+)$ et $q_2\,(-)$:



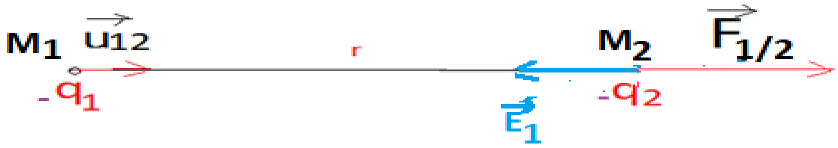
$\vec{F}_{1/2} = q_2\ \vec{E}_1$: comme q_2 est négative (force attractive) , la force et le champ sont dans des sens opposés.

- Si $q_1\,(-)$ et $q_2\,(+)$:



$\vec{F}_{1/2} = q_2\ \vec{E}_1$: Comme q_2 est positive (force attractive), la force et le champ sont dans le même sens.

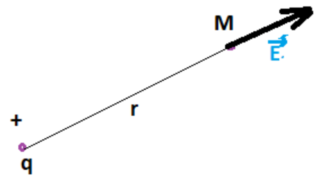
- Si $q_1\,(-)$ et $q_2\,(-)$:



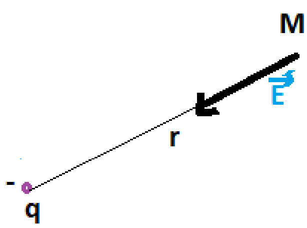
$\vec{F}_{1/2} = q_2\ \vec{E}_1$: Comme q_2 est négative (force répulsive), la force et le champ sont dans des sens opposés.

Conclusion :

Si *q* est positive, le champ $\vec{E}$ est orienté loin de cette charge.

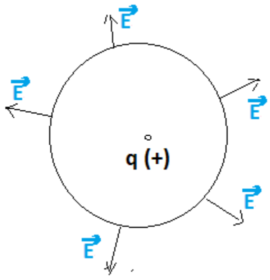


Si *q* est négative, le champ $\vec{E}$ est orienté vers cette charge.

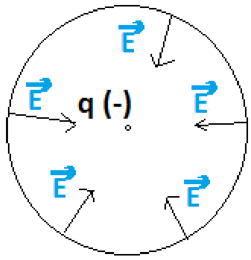


Remarque :

Si la distance à la charge (distance r entre M et) est constante (cercle ou sphère), le module du champ est toujours constant mais reste toujours soit orienté vers le centre de la charge (si elle est négative) , soit s'éloigne du centre de la charge (si elle est positive) . En d'autre terme, le champ est toujours perpendiculaire au cercle dont le centre est la charge.



Charge positive $E = kq/r^2 = Cte$



Charge négative $E = k|q|/r^2 = Cte$

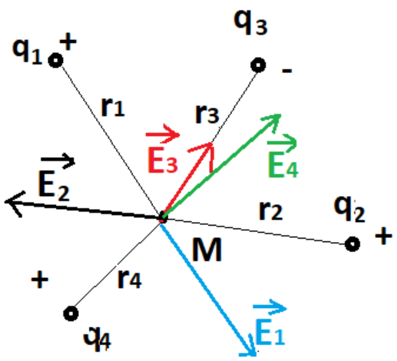
Unité du champ :

$$F = q\,E \Longrightarrow E = \frac{F}{q} \Longrightarrow [E] = \frac{N}{C}\ (Newton\ par\ Coulomb).$$

$\vec{E}$ est donc la force exercée par unité de charge.

3. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges

Soit un ensemble de charges ponctuelles q_1,q_2, q_3 et q_4 . Pour tracer les vecteurs-champs on considère les signes suivants : $q_1(+)$, $q_2\ (+)$, q_3 (-)et $q_4\ (+)$.

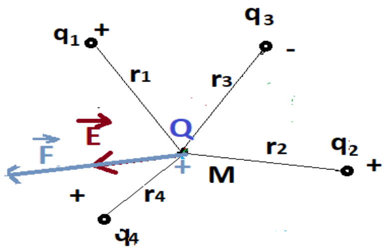


Le champ résultant créé au point M par ces charges est :

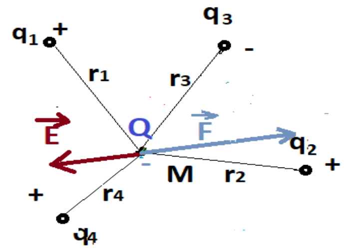
$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + \vec{E_4} = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{k\,q_i}{r_i^2}\,\vec{u_i} = \sum_{i=1}^{i=4} \vec{E_i}$$

C'est le principe de superposition. Si on place au point M une charge Q, la force exercée par ces 4 charges sur Q est : $\vec{F} = Q\,\vec{E}$

La force $\vec{F}$ est dans le même sens que $\vec{E}$ si Q est positive.
La force $\vec{F}$ est dans le sens opposé à $\vec{E}$ si Q est négative.



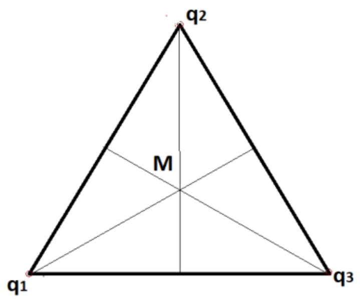
Q positive



Q négative

Exemple :

1. Déterminer le champ électrostatique créé au centre d'un triangle équilatéral (les angles et les côtés sont égaux) de côté a = 1 m par 3 charges électriques ponctuelles situées à ses sommets. On donne : $q_1 = -1nC \quad , q_2 = 2nC \quad et\ q_3 = +3nC$.



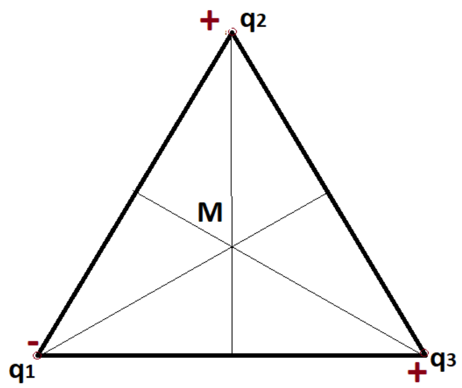
2. Quelle est la force électrostatique exercée par ces 3 charges sur en électron qui se trouve au centre de ce triangle ?

Réponse

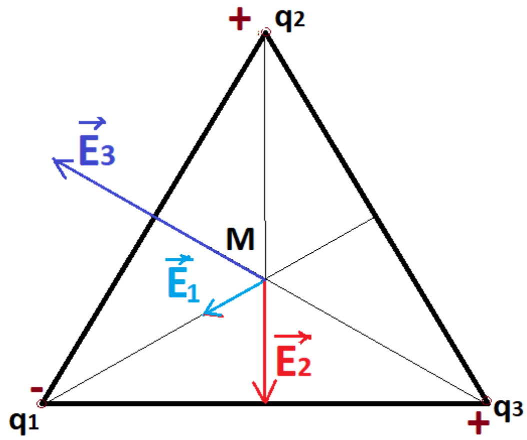
Première question :

Pour répondre correctement à ce type d'exercices il faut suivre les étapes suivantes.

1. **Affecter les signes aux charges (+ ou -).**

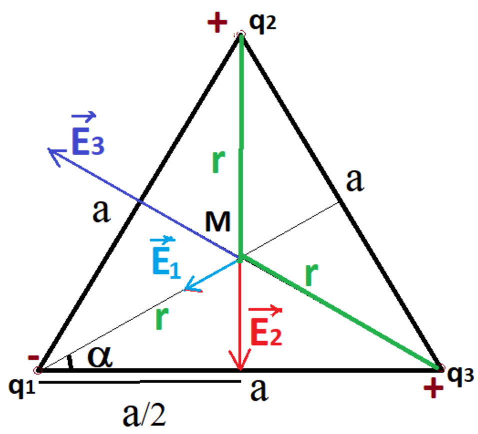


2. **Tracer les vecteurs-champs électrostatique en respectant la loi de Coulomb.**



3. **Calculer le module de chaque champ.**

On calcule d'abord la distance r ente le centre et chacune des charges.



$$On\ a : cos\ \alpha\ =\ cos\ 30\ =\ (a/2)/r\ =\ \sqrt{3}/2$$

$$\Longrightarrow r = a\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ m$$

Les modules sont :

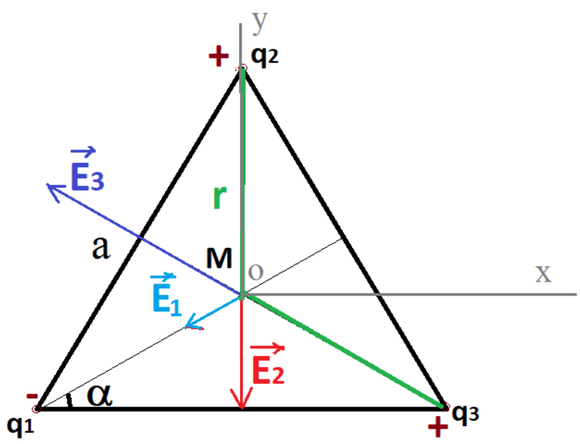
$\|\vec{E}_1\| = E_1 = k|q_1|/r^2 = 27$ N/m

$\|\vec{E}_2\| = E_2 = k|q_2|/r^2 = 54$ N/m

$\|\vec{E}_3\| = E_3 = k|q_3|/r^2 = 81$ N/m

On constate que : $E_1 = \frac{1}{2}E_2 = \frac{1}{3}E_3$

4. **On choisit une base (Oxy) dont l'origine O coïncide avec le centre M.**



5. **On calcule les composantes $\overrightarrow{Ex}$ et $\overrightarrow{Ey}$ de $\vec{E}$ en appliquant le principe de superposition et les projections sur les axes Ox et Oy .**

$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} = \vec{Ex} + \vec{Ey} = Ex\vec{\imath} + Ey\vec{\jmath}$

Les projections sur Ox donnent :

$$Ex = -E_1 \cos 30 - E_3\, cos30 = -\frac{27\sqrt{3}}{2} - 81\sqrt{3}/2 = -54\sqrt{3}N/C$$

Les projections sur Oy donnent :

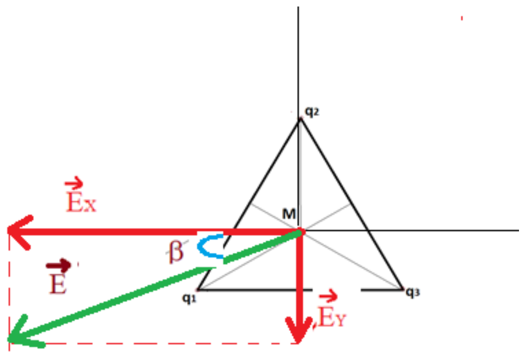
$$Ey = -E_2 - E_1 \sin 30 + E_3\, sin30 = -54 - \frac{27}{2} + \frac{81}{2} = -27\frac{N}{C}$$

6. On calcule le module de $\vec{E}$ et sa direction :

$$\|\vec{E}\| = E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(-54\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{+}(-27)^2} = 97.34\ N/C$$

Pour la direction, elle est donnée par l'angle β avec : $tg\beta = \frac{\|\vec{Ey}\|}{\|\vec{Ex}\|} = \frac{27}{54\sqrt{3}} = 0.288$

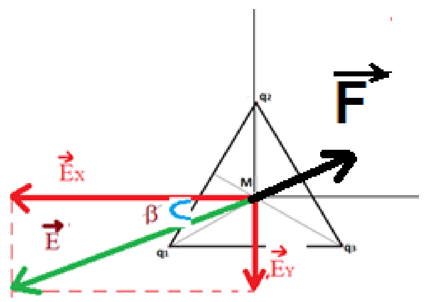
Ce qui donne : $\beta = 16.1$ °.



Deuxième question :

La force électrostatique exercée par ces 3 charges sur en électron qui se trouve au point M est : $\vec{F} = q_e * \vec{E}$ (comme la charge de l'électron est négative, la force F est dans le sens opposé à $\vec{E}$)

Son module est : $\|\vec{F}\| = \| q_e * \vec{E}\|$ = $1.6\ 10^{-19} * 97.34 = 1.55\ 10^{-17}$ N.



4. Champ électrique créé par une distribution continue de charges

Une **distribution continue** de charge est un modèle utilisé pour décrire mathématiquement la répartition de la charge au sein d'un objet macroscopique. Bien que la charge électrique soit quantifiée, c'est-à-dire qu'elle se présente sous forme de multiples entiers de l'unité de charge, il est souvent plus pratique de la traiter comme une distribution continue. Cela facilite le calcul du **champ électrique** généré par l'objet chargé. En fonction de la forme et des dimensions de l'objet créant le champ électrique, on peut distinguer trois types de densité de charge :

Densité linéique de charge λ: elle est défini comme la densité de charge par unité de longueur. Elle s'utilise pour décrire la charge que possède un objet qui a une longueur très grande par rapport à ses deux autres dimensions ; **un fil chargé** par exemple.

$dq = \lambda\, d\ell$

$\boldsymbol{\lambda = \frac{dq}{dl}}$ **en (C/m).**

Densité surfacique de charge σ: c'est la densité de charge par unité de surface. C'est la densité de charge que possède un corps plat ; un **disque** ou un **tube** chargé en surface par exemple.

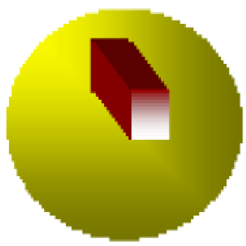
$\boldsymbol{\sigma = \frac{dq}{dS}}$ **en (C/m^2)**

$dq = \sigma\, dS$

Densité volumique de charge ρ: c'est la densité de charge par unité de volume. Elle s'utilise lorsque les trois dimensions de l'objet sont relevantes; pour calculer le champ électrique d'une **sphère chargée** par exemple.

$\boldsymbol{\rho = \frac{dq}{dV}}$ **en (C/m^3)**

$dq = \rho\, dV$



Le champ créé par une distribution continue de charge est déterminé en calculant le champ électrique élémentaire $\boldsymbol{d\vec{E}}(\boldsymbol{M})$créé par un élément de charge $(dq\ = \lambda\ dl, \sigma.dS\ ou\ dq = \rho.dV)$, puis en faisant ensuite l'intégrale pour toute la distribution.

$$\vec{E}(M) = \oint_{distribution} d\vec{E}(M)$$

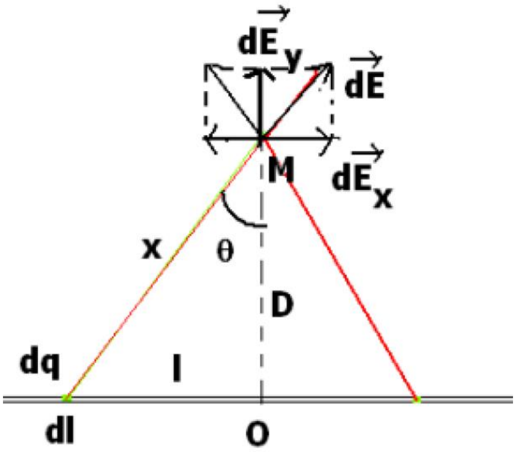
$$avec \quad d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\vec{u}$$

Exemple 1:

Calculez le champ électrostatique créé par un fil conducteur de longueur infinie et de densité linéique de charge λ en un point M situé à une distance D du fil.

Solution ;

La charge dq située sur la distance dl va créer au point M le champ élémentaire $\boldsymbol{d\vec{E}(M)}$:



$$d\vec{E} = d\overrightarrow{E_x} + d\overrightarrow{E_y}$$

Le champ total est :

$$\vec{E} = \sum d\vec{E} = \sum d\overrightarrow{E_x} + \sum d\overrightarrow{E_y}$$

Pour raison de symétrie on a :

$$\sum \boldsymbol{d\overrightarrow{E_x}} = \vec{0}$$

Le champ résultant est donc dirigé suivant (Oy) et vaut :

$$E = \sum dE_y = \int dE_y$$

Comme $E_y = dE \cos\theta$, on obtient:

$$E = \int \frac{kdQ \ \cos\theta}{x^2} = \int \frac{k\lambda dl}{x^2} cos\theta$$

D'autre part: $x = \frac{D}{cos\theta}$ $et\ \ l = Dtg\theta$

Donc :$dl = \frac{D}{cos^2\theta}\ d\theta$

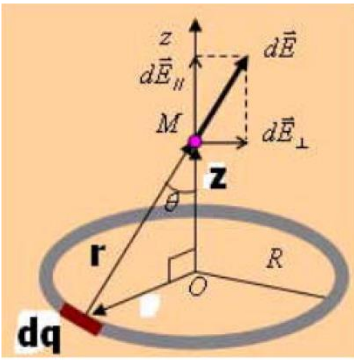
Pour décrire tout le fil (de $-\infty$ à $+\infty$) on doit varier θ de$-\frac{\pi}{2}$jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$.

Finalement:

$$E = \int \frac{k\lambda dl}{x^2} cos\theta = \int \frac{k\lambda}{\left(\frac{D}{cos^2\theta}\right)}\left(\frac{Dd\theta}{cos^2\theta}\right) cos\theta = \frac{k\lambda}{D}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} cos\theta\ d\theta = \frac{2k\lambda}{D}$$

Exemple 2 : Champ créé par une couronne chargée linéairement

Un anneau circulaire de centre O et de rayon R est uniformément chargé avec une densité linéique de charge $\lambda > 0$. Déterminer le champ électrostatique créé par cet anneau en un point M de l'axe (Oz).



Soit un élément de longueur dl qui porte la charge $dq = \lambda\, dl$ *. Soit M un point de l'axe* (Oz) *tel que* $OM = z$ *.*
Le champ créé au point M par cet élément est :

$dE(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ *Avec* $dq = \lambda\, dl$

Ce champ est composé de 2 champs: un perpendiculaire à l'axe (Oz) *et l'autre , parallèle à* (Oz)

$$\overrightarrow{dE}(M) = \overrightarrow{dE_\perp}(M) + \overrightarrow{dE_\parallel}(M)$$

On remarque que , en raison de symétrie de la distribution, la résulante des champs perpendiculaires à l'axe Oz est nulle. Donc, le champ résultant au point M est dirigé suivant Oz tel que :

$$E(M) = \sum dE_\parallel = \int dE(M)\, cos\theta = \int \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)} cos\theta$$

Or : $cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$

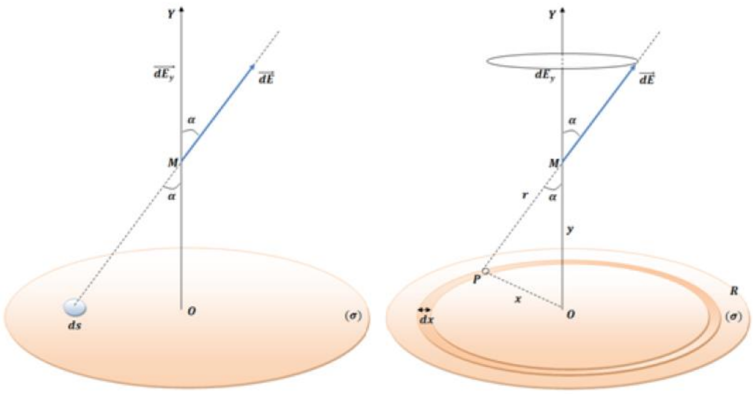
Donc : $E(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\oint dl$

$$L'intégrale\ sur\ toute\ la\ distribution\ est: \oint dl = 2\pi R$$

$$Finalement: \quad E(M) = E(z) = \frac{\lambda z}{2\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Exemple 3 : Champ créé par une distribution surfacique de charge

Considérons un disque circulaire de rayon R qui est uniformément chargé avec une densité surfacique de charge constante. Nous allons calculer le champ électrique en un point M situé sur l'axe de révolution du disque.



Ce disque, de surface $S = \pi R^2$, possède une charge électrique totale Q. Contrairement à une charge ponctuelle, cette charge est uniformément répartie sur l'ensemble de la surface du disque. La loi de Coulomb s'applique à une charge ponctuelle q située en un point M. Pour déterminer le champ produit par cette distribution continue de charge, nous commencerons par analyser le champ engendré par une charge élémentaire dq associée à un élément de surface élémentaire dS, où $dq = \sigma dS$. Ce champ sera désigné comme un champ élémentaire, noté $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = k.dq/r^2\,\vec{u}$$

Pour des raisons de symétrie, le champ est porté par l'axe (Oy), en conséquence :

$$dE_y = dE.cos\theta$$

Formons maintenant une couronne circulaire, d'épaisseur dx et de rayon intérieur x, cette couronne n'est que la surface obtenue en faisant subir à ds une rotation autour de OM . La charge électrique portée par cette couronne est donnée par :

$$dq = \sigma.2\pi.x.dx$$

La contribution de toutes les charges élémentaires de la couronne au champ $\vec{E}$ est la même :

$$dE_y = k\frac{\sigma.2\pi.x.dx}{r^2}\,cos\theta$$
$$cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ce qui donne:

$$dE_y = k\frac{\sigma.2\pi.x.dx}{\sqrt{x^2+y^2}}\,cos\theta$$

Pour balayer toute la surface du disque, il suffit de faire varier le rayon x de la couronne depuis le centre du disque O à . Maintenant, on peut obtenir le champ total en sommant dE_y pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et R.

$$E = \int_0^R dE_y = 2k\pi\sigma y\int_0^R \frac{x.dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\left[(x^2+y^2)^{-1/2}\right]_{x=0}^{x=R}$$

On trouve finalement :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{y}{(R^2+y^2)^{1/2}}\right]$$

Cas particulier :

- Pour trouver le champ créé par un plan infini, on fait tendre le rayon du disque vers l'infini(∞), et on trouve :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- Pour trouver le champ créé au centre du disque, on remplace y par 0, et on trouve :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Dans les 2 cas, le champ est indépendant des variables x et y.

Fin du chapitre 2