


Chapitre 3


Champ et potentiel électriques créés par des distributions de charges

I. Champ électrique créé par des distributions de charges

Une **distribution continue** de charge est un modèle utilisé pour décrire mathématiquement la répartition de la charge au sein d'un objet macroscopique. Bien que la charge électrique soit quantifiée, c'est-à-dire qu'elle se présente sous forme de multiples entiers de l'unité de charge, il est souvent plus pratique de la traiter comme une distribution continue. Cela facilite le calcul du **champ électrique** généré par l'objet chargé. En fonction de la forme et des dimensions de l'objet créant le champ électrique, on peut distinguer trois types de densité de charge :

- ❖ **Densité linéique de charge λ** : elle est défini comme la densité de charge par unité de longueur. Elle s'utilise pour décrire la charge que possède un objet qui a une longueur très grande par rapport à ses deux autres dimensions ; un **fil chargé** par exemple. $dq = \lambda dl$ 

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \text{ en (C/m).}$$

- ❖ **Densité surfacique de charge σ** : c'est la densité de charge par unité de surface. C'est la densité de charge que possède un corps plat ; un **disque** ou un **tube** chargé en surface par exemple. $dq = \sigma dS$ 

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \text{ en (C/m}^2\text{)}$$

- ❖ **Densité volumique de charge ρ** : c'est la densité de charge par unité de volume. Elle s'utilise lorsque les trois dimensions de l'objet sont relevantes; pour calculer le champ électrique d'une **sphère chargée** par exemple.

$$\rho = \frac{dq}{dV} \text{ en (C/m}^3\text{)}$$

$$dq = \rho dV$$



Le champ créé par une distribution continue de charge est déterminé en calculant le champ électrique élémentaire $d\vec{E}(M)$ créé par un élément de charge ($dq = \lambda dl, \sigma.dS$ ou $dq = \rho.dV$), puis **en faisant ensuite l'intégrale pour toute la distribution**.

$$\vec{E}(M) = \oint_{\text{distribution}} d\vec{E}(M)$$

avec $d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \vec{u}$

✓ Exemple 1 :

Calculez le champ électrostatique créé par un fil conducteur de longueur infinie et de densité linéique de charge λ en un point M situé à une distance D du fil.

Solution ;

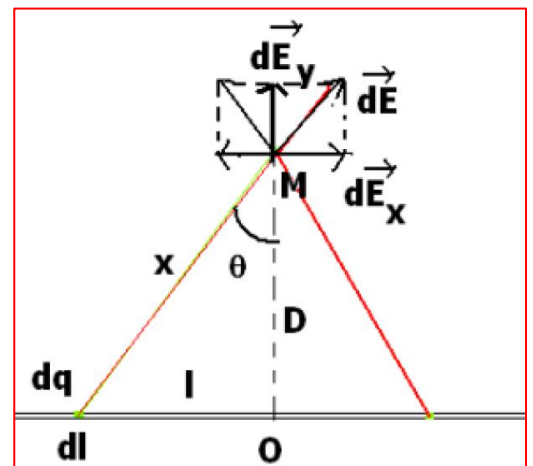
La charge dq située sur la distance dl va créer au point M le champ élémentaire $d\vec{E}(M)$:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

Le champ total est :

$$\vec{E} = \sum d\vec{E} = \sum d\vec{E}_x + \sum d\vec{E}_y$$

Pour raison de symétrie on a :



$$\sum d\vec{E}_x = \vec{0}$$

Le champ résultant est donc dirigé suivant (Oy) et vaut :

$$E = \sum dE_y = \int dE_y$$

Comme $E_y = dE \cos \theta$, on obtient:

$$E = \int \frac{k dQ \cos \theta}{x^2} = \int \frac{k \lambda dl \cos \theta}{x^2}$$

D'autre part: $x = \frac{D}{\cos \theta}$ et $l = D \tan \theta$

Donc : $dl = \frac{D}{\cos^2 \theta} d\theta$

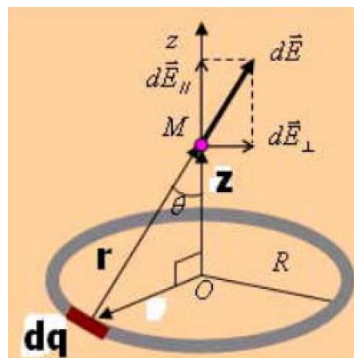
Pour décrire tout le fil (de $-\infty$ à $+\infty$) on doit varier θ de $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$.

Finalement:

$$E = \int \frac{k \lambda dl \cos \theta}{x^2} = \int \frac{k \lambda}{\left(\frac{D}{\cos^2 \theta}\right)} \left(\frac{D d\theta}{\cos^2 \theta}\right) \cos \theta = \frac{k \lambda}{D} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{2k\lambda}{D}$$

✓ Exemple 2 : Champ créé par une couronne chargée linéairement

Un anneau circulaire de centre O et de rayon R est uniformément chargé avec une densité linéique de charge $\lambda > 0$. Déterminer le champ électrostatique créé par cet anneau en un point M de l'axe (Oz) .



Soit un élément de longueur dl qui porte la charge $dq = \lambda dl$. Soit M un point de l'axe (Oz) tel que $OM = z$.

Le champ créé au point M par cet élément est :

$$dE(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ Avec } dq = \lambda dl$$

Ce champ est composé de 2 champs: un perpendiculaire à l'axe (Oz) et l'autre, parallèle à (Oz)

$$\vec{dE}(M) = \vec{dE}_\perp(M) + \vec{dE}_\parallel(M)$$

On remarque que, en raison de symétrie de la distribution, la résultante des champs perpendiculaires à l'axe Oz est nulle. Donc, le champ résultant au point M est dirigé suivant Oz tel que :

$$E(M) = \sum dE_\parallel = \int dE(M) \cos\theta = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)} \cos\theta$$

Or :

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Donc :

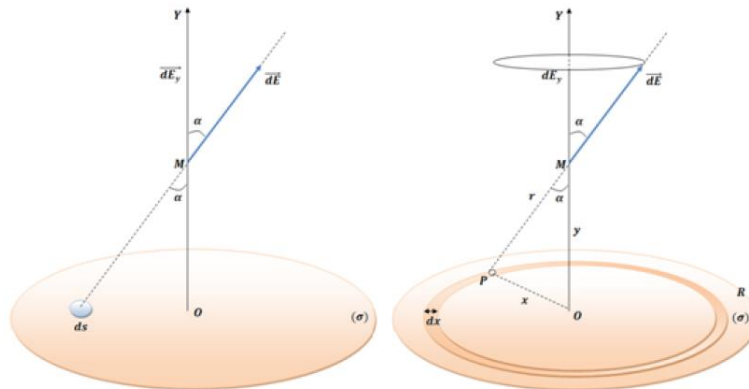
$$E(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)\sqrt{z^2 + R^2}} \oint dl$$

L'intégrale sur toute la distribution est : $\oint dl = 2\pi R$

Finalemment : $E(M) = E(z) = \frac{\lambda z}{2\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}$

✓ Exemple 3 : Champ créé par une distribution surfacique de charge

Considérons un disque circulaire de rayon R qui est uniformément chargé avec une densité surfacique de charge constante. Nous allons calculer le champ électrique en un point M situé sur l'axe de révolution du disque.



Ce disque, de surface $S = \pi R^2$, possède une charge électrique totale Q . Contrairement à une charge ponctuelle, cette charge est uniformément répartie sur l'ensemble de la surface du disque. La loi de Coulomb s'applique à une charge ponctuelle q située en un point M . Pour déterminer le champ produit par cette distribution continue de charges, nous commencerons par analyser le champ engendré par une charge élémentaire dq associée à un élément de surface élémentaire dS , où $dq = \sigma dS$. Ce champ sera désigné comme un champ élémentaire, noté $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = k \cdot dq / r^2 \vec{u}$$

Pour des raisons de symétrie, le champ est porté par l'axe (Oy) , en conséquence :

$$dE_y = dE \cdot \cos\theta$$

Formons maintenant une couronne circulaire, d'épaisseur dx et de rayon intérieur x , cette couronne n'est que la surface obtenue en faisant subir à ds une rotation autour de OM . La charge électrique portée par cette couronne est donnée par :

$$dq = \sigma \cdot 2\pi \cdot x \cdot dx$$

La contribution de toutes les charges élémentaires de la couronne au champ \vec{E} est la même :

$$dE_y = k \frac{\sigma \cdot 2\pi \cdot x \cdot dx}{r^2} \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ce qui donne:

$$dE_y = k \frac{\sigma \cdot 2\pi \cdot x \cdot dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\theta$$

Pour balayer toute la surface du disque, il suffit de faire varier le rayon x de la couronne depuis le centre du disque O à R . Maintenant, on peut obtenir le champ total en sommant dE_y pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et R .

$$E = \int_0^R dE_y = 2k\pi\sigma y \int_0^R \frac{x \cdot dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0} [(x^2 + y^2)^{-1/2}]_{x=0}^{x=R}$$

On trouve finalement :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{(R^2 + y^2)^{1/2}} \right]$$

Cas particulier :

- Pour trouver le champ créé par un plan infini, on fait tendre le rayon du disque vers l'infini(∞), et on trouve :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- Pour trouver le champ créé au centre du disque, on remplace y par 0, et on trouve :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Dans les 2 cas, le champ est indépendant des variables x et y .

II. Potentiel électrique créé par des distributions de charges

Le potentiel électrique créé au point M par une distribution de charges est donné par l'expression suivante :

$$V(M) = \int dV(M) = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

L'intégration se fait sur toute la distribution (linéique, surfacique ou volumique).

Pour une distribution surfacique de charges :

$$V(M) = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma dS}{r} + V_0$$

Pour une distribution linéique de charges:

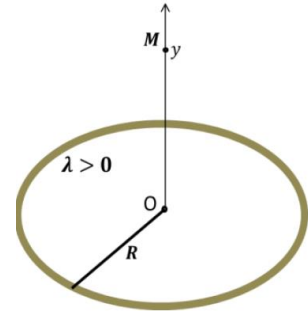
$$V(M) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dl}{r} + V_0$$

Pour une distribution volumique de charges :

$$V(M) = \iiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dV}{r} + V_0$$

Exemple :

Un anneau de centre O et de rayon R , porte une charge q répartie uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$.
Calculer le potentiel crée au point M de l'axe Oy et situé à la distance y de O .

**Solution :**

Soit un élément de longueur dl qui porte la charge $dq = \lambda dl$, et soit un point M de l'axe Oy tel que $OM = y$.

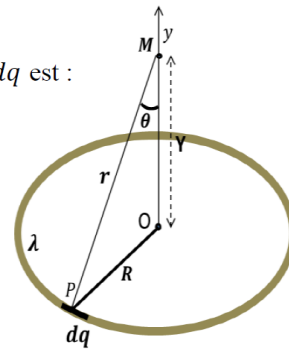
Le potentiel élémentaire au point M créé par une charge élémentaire dq est :

$$dV = K \frac{dq}{r}$$

Avec : $dq = \lambda dl$, $r = \sqrt{R^2 + y^2}$ et $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$D'où : V(M) = \int_0^{2\pi R} K \frac{\lambda dl}{r} = \left[K \frac{\lambda}{r} + C \right]_0^{2\pi R} = \frac{K 2\pi R}{r} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

**Calcul du potentiel à partir du champ et inversement**

Nous avons vu que le champ électrostatique dérive d'un potentiel et que ces deux grandeurs sont liées par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \text{ ou encore } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons calculé le potentiel électrostatique en un point M de l'axe Oz ($OM = z$) créé par un anneau circulaire de centre O et de rayon R qui porte une charge q répartie uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$.

L'expression du potentiel est :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

A partir de $V(M)$ on calcule les composantes de $\vec{E}(M)$. On constate que $V(M)$ ne dépend que de la variable z . On trouve :

- $E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 0$ car $V(M)$ ne dépend pas de x .
- $E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ car $V(M)$ ne dépend pas de y .
- $E_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$ car $V(M)$ ne dépend que de z

Remarque :

$$\Rightarrow E(0) = 0 \quad \text{et} \quad V(0) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \text{Pour } z \gg R, \text{ on a : } E(z) \approx \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z^2} \quad \text{et} \quad V(z) \approx \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z}$$

$$\Rightarrow \text{Pour } z = r \text{ et } \lambda = \frac{q}{2\pi R} \text{ on a : } E(z) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{et} \quad V(z) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

C'est comme si la charge totale se trouvait concentré au centre O.

Fin du Chapitre 3