Chapitre 3

Potentiel électrostatique

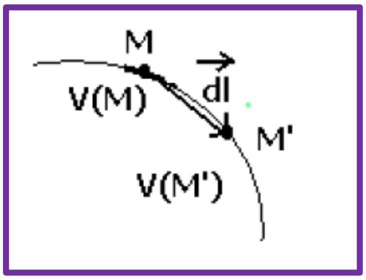
1. Introduction

Nous avons constaté que le calcul de la force et du champ électrostatique présente des défis en raison de leur nature vectorielle. Il est essentiel de prendre en compte le sens, la direction et le module de ces grandeurs à chaque étape du calcul. Pour simplifier cette approche, il est judicieux de remplacer le champ électrostatique $\vec{E}\,(x, y, z)$, qui est une grandeur vectorielle, par une fonction scalaire $V(x, y, z)$. En effet, travailler avec des quantités scalaires facilite considérablement les calculs par rapport à l'utilisation de fonctions vectorielles.

On définit :

- Au point $\boldsymbol{M(x, y, z)}$ on définit un scalaire $\boldsymbol{V(x, y, z)}$
- Au point $\boldsymbol{M'(x', y', z')}$ on définit un autre scalaire $\boldsymbol{V'(x', y', z')}$

La différence entre ces 2 scalaires s'écrit :



$$dV(M) = V'(M) - V(M) = \frac{dV}{dl}.dl = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl}$$

$$dV(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl}$$

Cette expression est obtenue par analogie à la loi de gravitation universelle :

- Force gravitationnelle : $\vec{F} = G\frac{mM}{r^2}\,\vec{u} \Longrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P$ (Newton 1687)
- Force électrique : $\vec{F} = G\frac{QQ'}{r^2}\,\vec{u} = Q'\vec{E} \Longrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ (Poisson 1813)

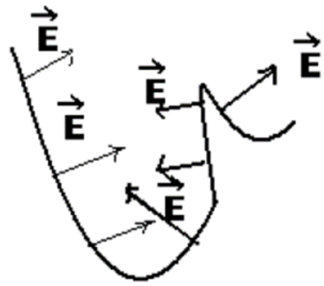
Relation entre le champ et le potentiel

Le potentiel électrostatique est relié au champ électrostatique par la relation :

$$\boldsymbol{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V}$$

Le signe "-" est choisi par convention.

Lorsque le potentiel V augmente le champ électrostatique diminue.



Ligne ou courbe équipotentielle

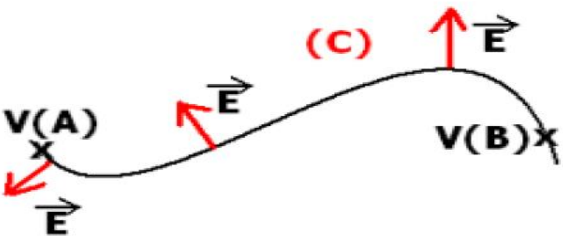
Si sur une courbe (C) on a $= \mathbf{0}$, donc le potentiel est constant sur cette courbe. Cette courbe est dite "***équipotentielle***" et le champ électrique est perpendiculaire à cette courbe $(\vec{E} \perp (C))$.

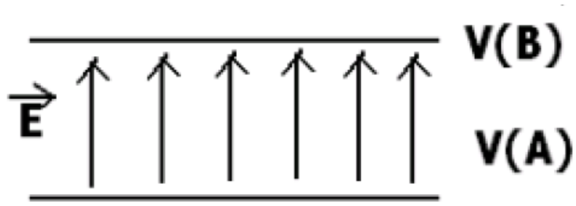
Circulation du champ électrostatique

On appelle la circulation du champ électrostatique $\vec{E}$ le long de la courbe (C) entre les points A et B, l'intégrale suivante :

$$C = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

$$\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)$$



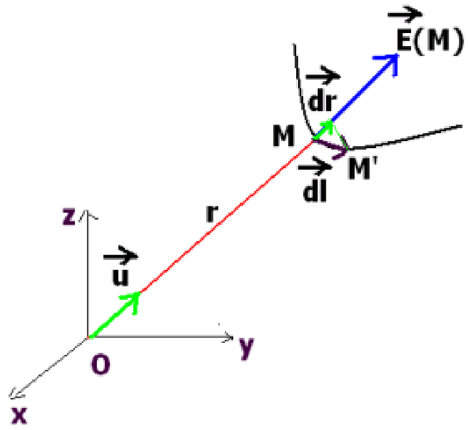


Les lignes de champ vont des régions à grands potentiels vers des régions à faibles potentiels.

Dans notre cas, les lignes de champ vont de A vers B **:**

$\boldsymbol{\vec{E}.\vec{dl} > 0 \Longrightarrow V(A) > V(B)}$

2. Potentiel créé par une charge ponctuelle



Soit une charge ponctuelle Q située au point M d'une courbe (C) et distante de r de l'origine O (donc $OM = r$)

Soit $\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$ (M et M' sont des points très proches sur la courbe (C) .

Le champ électrostatique créé par cette charge au point M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

$$\Longrightarrow dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}.\vec{dl} \quad = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Longrightarrow V(M) = \int -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + cte$$

Le potentiel à l'infini est supposé égal à une constante V_0, donc:

$$V(M) = \int -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

Remarques :

• $V_0 = 0 \; pour \; r = \infty$

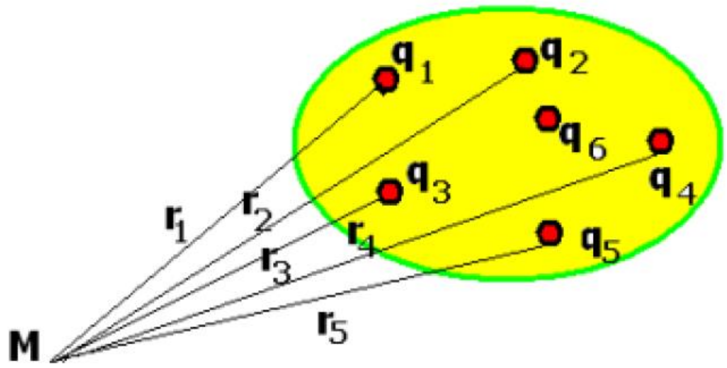
• V se mesure en Volts (V)

• Le potentiel mesure le degré de l'électrification de la substance. Plus le potentiel est grand et plus le nombre de charges contenues dans cette substance est grand. C'est comme en thermodynamique lorsque la température augmente, la quantité de chaleur augmente.

3. Potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles

Soient n charges ponctuelles. Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par ces charges en un point M de l'espace est :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i}(M)$$



Le potentiel créé par ces charges au point M est :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M)$$

Comme la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$ est toujours vérifiée, on aura :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i} + V_0$$

4. Potentiel créé par une distribution continue de charges

Le potentiel électrique créé au point M par une distribution de charges est donné par l'expression suivante :

$$V(M) = \int dV(M) = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \, r}$$

L'intégration se fait sur toute la distribution (linéique, surfacique ou volumique).

Pour une distribution linéique de charges:

$$V(M) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dl}{r} + V_0$$

Pour une distribution surfacique de charges :

$$V(M) = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma\, dS}{r} + V_0$$

Pour une distribution volumique de charges :

$$V(M) = \iiint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dV}{r} + V_0$$

Exemple 1 : Cas de charges discrètes

Soit une charge ponctuelle q placée à l'origine $O(0,0,0)$ de l'espace muni d'une base orthonormée $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Calculer le potentiel créé par q aux points $M_1(1,\sqrt{3}\,,0)$, $M_2(1,-\sqrt{3}\,,0), M_3(-1,\sqrt{3}\,,0)$, et $M_4(-1,-\sqrt{3}\,,0)$.

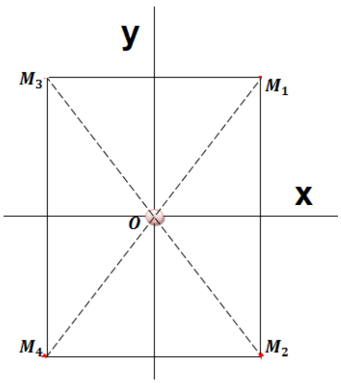
Solution :

$$V_{M_1} = k\frac{q}{OM_1}$$

$$V_{M_2} = k\frac{q}{OM_2}$$

$$V_{M_3} = k\frac{q}{OM_3}$$

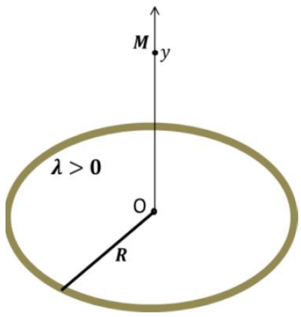
$$V_{M_4} = k\frac{q}{OM_4}$$



$\|\overrightarrow{OM_1}\| = \|\overrightarrow{OM_2}\| = \|\overrightarrow{OM_3}\| = \|\overrightarrow{OM_4}\|=2$

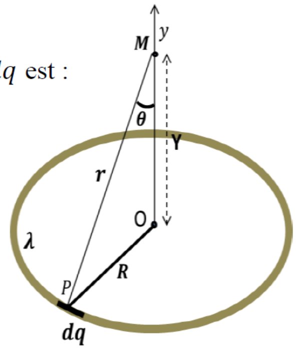
Et $V_{M_1} = V_{M_2} = V_{M_3} = V_{M_4} = kq/2$

Exemple 2 : Cas de distribution continue de charges



Un anneau de centre O et de rayon R, porte une charge q répartie uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$.
Calculer le potentiel crée au point M de l'axe Oy et situé à la distance y de O.

Solution :



Soit un élément de longueur dl qui porte la charge $dq = \lambda dl$, et soit un point M de l'axe oy tel que $OM = y$.

Le potentiel élémentaire au point M créé par une charge élémentaire dq est :

$$dV = K\frac{dq}{r}$$

Avec : $dq = \lambda dl,\ \ r = \sqrt{R^2 + y^2}$ et $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

D'où : $V(M) = \int_0^{2\pi R} K\frac{\lambda dl}{r} = \left[K\frac{\lambda l}{r} + C\right]_0^{2\pi R} = \frac{K2\pi R}{r} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{R^2+y^2}}$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{R^2+y^2}}$$

Calcul du potentiel à partir du champ et inversement

Nous avons vu que le champ électrostatique dérive d'un potentiel et que ces deux grandeurs sont liées par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \text{ ou encore } dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Longrightarrow \begin{cases} E_x = \frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Dans ***l'exemple 2*** ci-dessus, nous avons calculé le potentiel électrostatique en un point M de l'axe Oz $(OM = z)$ créé par un anneau circulaire de centre O et de rayon R qui porte une charge q répartie uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$.
L'expression du potentiel est :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}.\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

A partir de $V(M)$ on calcule les composantes de $\vec{E}(M)$. On constate que V(M) ne dépend que de la variable z. On trouve :

- $E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 0$ car $V(M)$ ne dépend pas de .
- $E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ car $V(M)$ ne dépend pas de .

- $E_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$ car $V(M)$ ne dépend pas de z

Remarque :

☜ $E(0) = 0$ *et* $V(0) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$

☜ Pour $z \gg R$, on a : $E(z) \approx \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 z^2}$ *et* $V(z) \approx \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 z}$

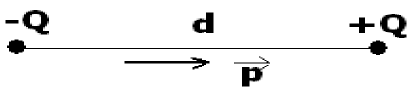
☜ Pour : $z = r$ et $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ on a : $E(z) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ *et* $V(z) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

C'est comme si la charge totale se trouvait concentré au centre O.

5. Dipôle électrostatique :

Définition : il est constitué de 2 charges égales et opposées (+Q et –Q) séparées par une distance d .Il est caractérisé par son moment dipolaire dont le module est :

$$p = Q.d$$

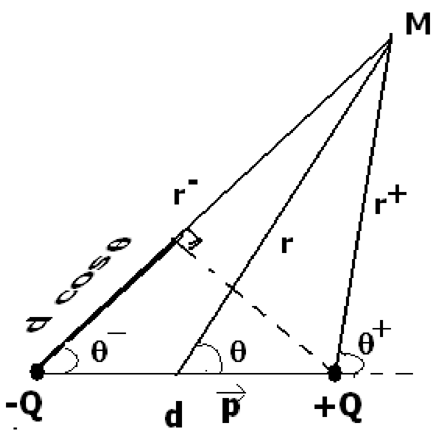


dipôle électrostatique

Le moment dipolaire est une grandeur vectorielle et elle est toujours dirigée de la charge négative (-) vers la charge positive (+).

Potentiel créé par un dipôle

Soit un dipôle constitué de 2 charges (+Q et –Q) séparées par une distance d. On va calculer le potentiel électrostatique créé par ce dipôle en un point M de l'espace. On a :



$$V(M) = V^+ + V^- = \frac{kQ}{r^+} - \frac{kQ}{r^-} = kQ\left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-}\right) = kQ(\frac{r^- - r^+}{r^+ r^-})$$

Lorsque le point M est très éloigné dans l'espace, on peut faire les approximations suivantes:

$r \ggg d \Longrightarrow \theta \approx \theta^+ \approx \theta^-$

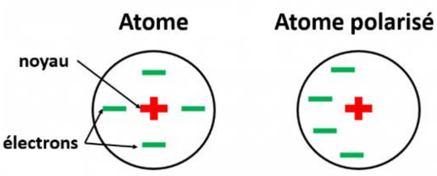
$\Longrightarrow r^- - r^+ = d\,cos\theta$ et $r^- r^+ = r^2$

On obtient finalement:

$$\boldsymbol{V(M) = kQ\left(\frac{r^- - r^+}{r^+ r^-}\right) = \frac{kQd\,cos\theta}{r^2} = \frac{kp\,cos\theta}{r^2}}$$

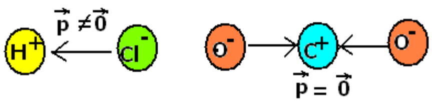
Atome polarisé :
Généralement les atomes sont neutres car les centres de masse des charges positives (noyau) et négatives (électrons) sont confondus. Le moment dipolaire est donc nul ($\vec{p} = \vec{0}$).

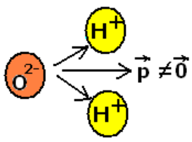
Si un champ électrique est appliqué, il y aura un déplacement des charges et les centres de masse des charges vont se séparer. Le moment dipolaire sera donc différent de zéro ($\vec{p} \neq \vec{0}$). L'atome est dit polarisé.



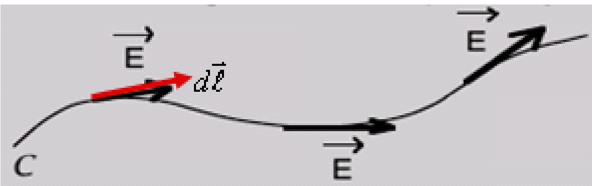
Molécule polarisée :
Certaines molécules possèdent un moment dipolaire permanent car les centres de masse des charges positives et négatives sont tout le temps différents : ce sont des molécules polaires.

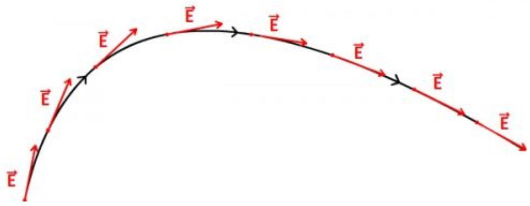
Exemples : HCl, CO_2, H_2O





6. **Lignes de champ ou lignes de force** La ligne de champ représente l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace. En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point.

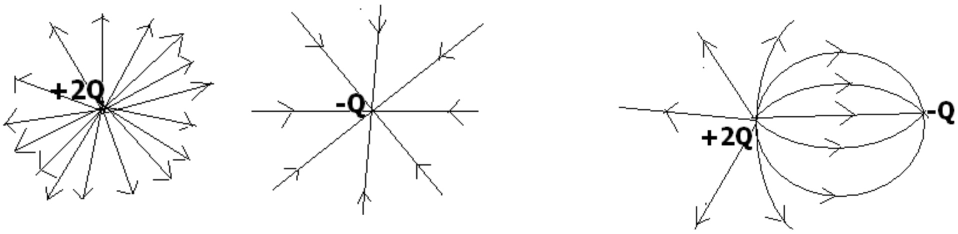




Pour tracer convenablement les lignes de champ certaines règles s’appliquent :

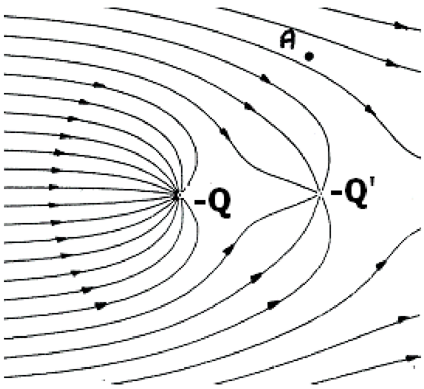
1. Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives.

2. Le nombre de lignes de champ produites ou absorbées par une charge est proportionnel à la grandeur de la charge (une charge +2Q produit 2 fois plus de lignes qu'en absorbe une charge -Q).

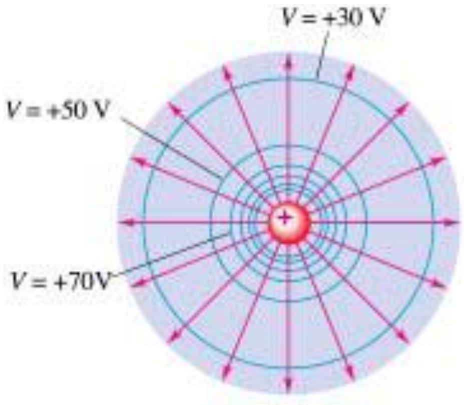


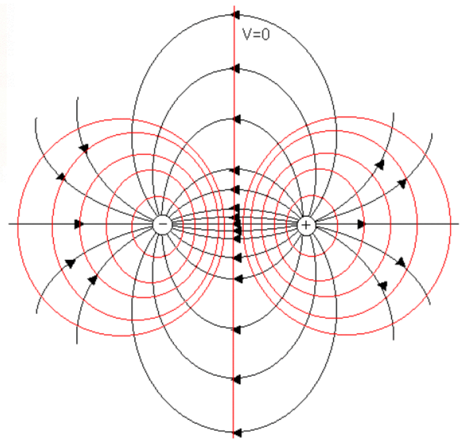
16 lignes **8 lignes** **10 lignes** **5 lignes**

3. Les lignes de champ ne se croisent pas.



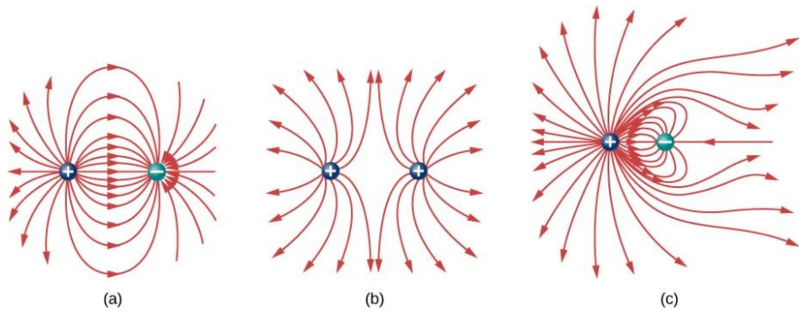
4. Surfaces équipotentielles : Les surfaces équipotentielles sont des espaces où le potentiel est constant. Ces surfaces sont toujours perpendiculaires aux lignes de champ.

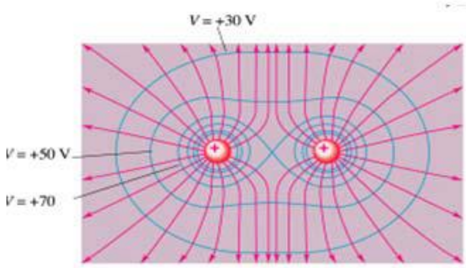




Lignes de champ et les surfaces équipotentielles dans un dipôle :

Les lignes de champ sont créées par les charges positives et absorbées par les charges négatives (vont de la charge positive vers la charge négatives). Le champ est « fort » là où les lignes de champ sont serrées et il est « faible » là où les lignes de champ sont écartées. Les surfaces équipotentielles entourent les charges.





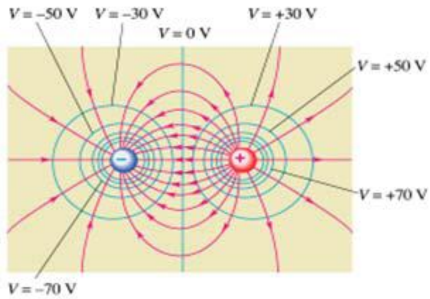
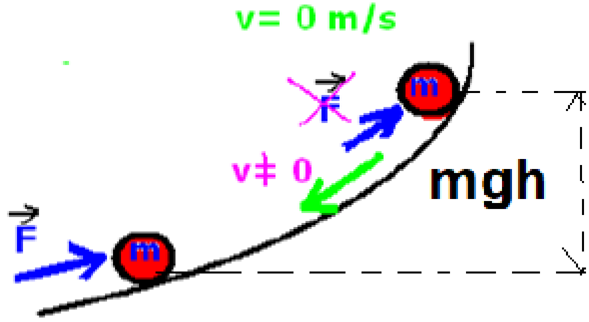


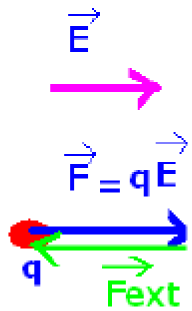
Illustration : En se mettant en contact avec un objet électrifié, les cheveux suivent les lignes de force (de champ).

7. Energie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle



En mécanique, si on pousse la masse m jusqu'au point M puis on l'abandonne, elle sera animée d'un mouvement. L'énergie potentielle qu'elle a gagnée en altitude ($E_p = mgh$) sera transformée en énergie cinétique (de vitesse) ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$). Lorsqu'on supprime la force $\vec{F}$ au point M, la vitesse n'est plus nulle et la masse commence à descendre avec une énergie cinétique qui augmente au détriment de l'énergie potentielle.

Comme $E_m = E_p + E_c$ est constante, l'énergie E_c provient d'un autre réservoir énergétiqueE_p : l'énergie potentielle.



Soit une charge q qui se trouve dans un endroit où règne un champ électrique $\vec{E}$. Elle est soumise à la force électrique :

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

Pour éviter le déplacement de q (maintenir q en équilibre), on applique sur cette charge une force extérieure (égale et opposée à $\vec{F}$) :

$$\vec{F}_{ex} = -\vec{F} = -\,q\,\vec{E}$$

On suppose que $\vec{F}_{ex}$ est la force extérieure qui déplace la charge q de l'infini jusqu'au point M. Le travail de cette force est égale à :

$$W(M) = \int_{\infty}^{M} dW(M) = \int_{\infty}^{M} \vec{F}_{ex}.\vec{dl} = \int_{\infty}^{M} -\,q\,\vec{E}.\vec{dl} = \int_{\infty}^{M} q.dV \quad car\ dV = -\,\vec{E}.\vec{dl}$$

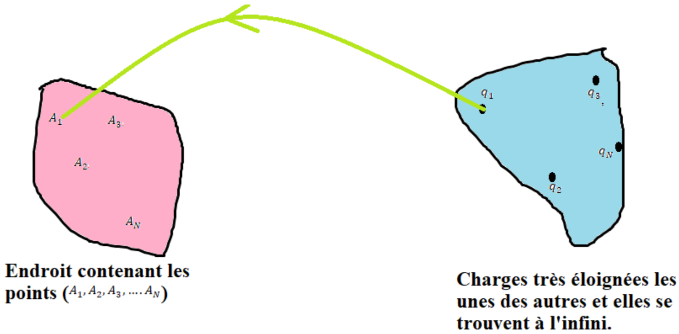
$$\Longrightarrow\ W(M) = q[V(M) - V(\infty)]$$

Comme $V(\infty) = 0 \Longrightarrow\ W(M) = q.V(M)$
$W(M) = q.V(M)$ représente l'énergie potentielle électrostatique de la charge q. Il ne dépend pas de chemin suivi mais uniquement des potentiels des points : **initial et final**.
L'énergie électrostatique est aussi appelé le potentiel électrostatique.

8. Energie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

L'énergie électrostatique d'un système de N charges est égale à la somme des énergies potentielles électrostatiques de chacune des charges.
Lorsque les N charges ponctuelle qi sont rapprochées, chacune d'entre elles va créer sur les autres, un champ électrostatique et ainsi mettre en jeu une énergie d'interaction électrostatique.

Soit un système (endroit) contenant les points $(A_1, A_2, A_3, \ldots . A_N)$. Soient N charges ponctuelles (q_1, q_2, $q_3, \ldots \ldots . q_N$) supposées initialement très éloignées les unes des autres et se trouvent à l'infini. Dans ce cas, aucun champ électrique ou potentiel n'est créé aux points $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_N$ par ces charges.



1. On ramène la charge q_1 de l'infini jusqu'au point A_1. Initialement au pointA_1 , le champ et le potentiel sont nuls ($\vec{E} = \vec{0}$ et V=0). Donc le travail nécessaire pour ramener q_1 de l'infini jusqu'au point A_1 **est nul** : $\boldsymbol{W_1=0}$ car ($\vec{E} = \vec{0}$ et V=0).

2. Une fois la charge q_1 est au point A_1, elle va créer aux différents endroits qui l'entourent des potentiels électrostatiques. Au point A_2, le potentiel V_2 créé par q_1 est :

$$\mathbf{V_2 = V_1(A_2) = \frac{kq_1}{r_{12}}}$$

On amène maintenant q_2 de l'infini à A_2. Le travail fourni est :

$$W_2 = q_2 V_2 = \frac{kq_1 q_2}{r_{12}} = q_1 V_1$$

Où $r_{12} = \|\overrightarrow{A_1 A_2}\|$ est la distance entre les charges q_1 et q_2.
Où $V_1 = V_2(A_1)$. C'est-à-dire identique au travail qu'il fallait fournir pour ramener q_1 de l'infini au point $_1$, en présence de q_2 déjà située au point A_2.

Cela signifie que ce système constitué de deux charges possède une énergie électrostatique :

$$W = Ep = W_1 + W_2 = 0 + \frac{kq_1 q_2}{r_{12}} = \frac{1}{2}\frac{kq_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{2}\frac{kq_1 q_2}{r_{12}} = \frac{1}{2}\left[q_1\left(\frac{kq_2}{r_{12}}\right) + q_2\left(\frac{kq_1}{r_{12}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}[q_1 V_1 + q_2 V_2]$$

Cette énergie potentielle W peut être vue comme :

- L'énergie de $q_1$dans le champ de q_2.
- L'énergie de q_2 dans le champ de q_1.
- L'énergie potentielle du système isolé, constitué par les deux charges q_2 et q_2.

3. Maintenant on a un système constitué de 2 charges : q_1 fixe au point A_1 et q_2 fixe au point A_2. Ces 2 charges vont créer dans l'espace qui les entoure des potentiels électrostatiques.

Le potentiel électrostatique créé au point par les charges q_1 et q_2 au point A_3 est :

$$\mathbf{V_3 = V_1(A_3) + V_2(A_3) = \frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}}}$$

Où :

- $\mathbf{V_1(A_3)}$ est le potentiel créé par la char**ge** $\boldsymbol{q_1}$ au point ***A*3.**
- $\mathbf{V_2(A_3)}$ est le potentiel créé par la charge $\boldsymbol{q_2}$ au point ***A*3.**
- $r_{13} = \|\overrightarrow{A_1A_3}\|$est la distance entre les charges $\boldsymbol{q_1}$ et $\boldsymbol{q_3}$.
- $r_{23} = \|\overrightarrow{A_2A_3}\|$ est la distance entre les charges $\boldsymbol{q_2}$ et $\boldsymbol{q_3}$

L'énergie potentielle de la charge $\boldsymbol{q_3}$ ou le travail nécessaire pour la ramener la de l'infini jusqu' au point $\boldsymbol{q_3}$ est :

$$\boldsymbol{W_3 = q_3V_3 = q_3\left(\frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}}\right) = \frac{k\,q_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}}}$$

L'énergie électrostatique de ce système constitué de 3 charges est :

$$\boldsymbol{W = Ep = W1 + W2 + W_3 = 0 + \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{k\,q_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}}}$$
$$\boldsymbol{= k\left[\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_3q_1}{r_{13}} + \frac{q_3q_2}{r_{23}}\right]}$$

Ainsi, on voit qu'à chaque couple q_iq_j est associé une énergie potentielle d'interaction.
En continuant cette procédure, c'est-à-dire, en amenant de l'infini les charges restantes $(q_4, q_5, \ldots\ldots, q_i, \ldots\ldots, q_n)$ à leurs positions finales $(A_4, A_5, \ldots\ldots, A_i, \ldots\ldots, A_n)$, on montre que l'énergie totale de ce système de N charges ponctuelles sera :

$$\boldsymbol{W = Ep = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_iVi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{k\,q_iq_j}{r_{ij}}}$$

Où $\boldsymbol{V_i = k\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_i}{r_{ij}}}$

$\boldsymbol{V_i}$ représente le potentiel électrostatique crée par toutes les autres charges $q_i(j \neq i)$ au point A_i (où se trouve la charge q_i). La quantité r_{ij} représente la distance entre les charges q_i et q_j ($r_{ij} = \|\overrightarrow{A_iA_j}\|$

Le terme $\frac{1}{2}$ provient du fait que dans l'interaction entre les charges q_i et q_j, l'énergie de ce couple est comptée deux fois.

L'énergie **potentielle électrostatique** d'une distribution de charges correspond à ***l'énergie interne de cohésion*** nécessaire pour maintenir ou dissocier cette distribution. Si cette énergie est **positive**, cela indique que la distribution **absorbe de l'énergie** lors de sa formation ou de sa dissociation (travail fourni par l'extérieur). À l'inverse, si elle est **négative**, cela signifie que la distribution **libère de l'énergie** au cours de ces processus (travail fourni par le système).