Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes **L2**
Département de Recherche Opérationnele

Correction de la série TD n°3 Analyse complexe

Solution 1 *1) Calculons l'intégrale*

$$I=\int_{\Gamma}\overline{z}dz=\int_{\Gamma}(x-iy)d(x+iy)=\int_{1}^{2}(x-ix^2)d(x+ix^2)=\int_{1}^{2}(x-ix^2)(1+2ix)dx=9+\frac{7}{3}i.$$

2) Le chemin Γ est la juxtaposition des deux chemins Γ_1 et Γ_2

$$\Gamma=\Gamma_1\vee\Gamma_2$$

où Γ_1 est le chemin joignant $(0,0)$ à $(1,0)$ et Γ_2 est le chemin joignant $(1,0)$ à $(1,2)$.

Calculons l'intégrale

$$I=\int_{\Gamma}\overline{z}dz=\int_{\Gamma_1\vee\Gamma_2}\overline{z}dz=\int_{\Gamma_1}\overline{z}dz+\int_{\Gamma_2}\overline{z}dz=\int_{0}^{1}xdx+\int_{0}^{2}(1-iy)idy=\int_{0}^{1}xdx+i\int_{0}^{2}(1-iy)dy=\frac{5}{2}+2i.$$

Solution 2 *Le chemin* γ *est la juxtaposition des quatre chemins* γ_1, γ_2, γ_3 *et* γ_4

$$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4$$

où γ_1 *est le chemin joignant* $(0,0)$ *à* $(1,0)$, γ_2 *le chemin joignant* $(1,0)$ *à* $(1,1)$, γ_3 *est le chemin joignant* $(1,1)$ *à* $(0,1)$ *et* γ_4 *le chemin joignant* $(0,1)$ *à* $(0,0)$.

Calculons l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} |z|^2 \, dz &= \int_{\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4} |z|^2 \, dz = \int_{\gamma_1} |z|^2 \, dz + \int_{\gamma_2} |z|^2 \, dz + \int_{\gamma_3} |z|^2 \, dz + \int_{\gamma_4} |z|^2 \, dz \\
&= \int_0^1 x^2 dx + i \int_0^1 (1+y^2) dy + \int_1^0 (x^2+1) dx + i \int_1^0 y^2 dy \\
&= \int_0^1 x^2 dx + i \int_0^1 (1+y^2) dy - \int_0^1 (x^2+1) dx - i \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} i - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} i = -1 + i.
\end{aligned}$$

Solution 3 *Pour le calcul des intégrales, on utilise la formule*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Calculons l'intégrale

$$\int_{\gamma_1} \overline{z}dz = \int_{0}^{\pi} e^{-it}(ie^{it}dt) = i\int_{0}^{\pi} dt = \pi i.$$

Calculons l'intégrale

$$\int_{\gamma_2} (z+1)dz = \int_{0}^{1} ((1+i)t+1)d(1+i)t = \int_{0}^{1} ((1+i)^2t + (1+i))dt = 1+2i.$$

Calculons l'intégrale

$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{0}^{\pi/4} \frac{d(e^{it})}{1+e^{2it}} = \int_{0}^{\pi/4} \frac{ie^{it}dt}{1+e^{2it}} = \frac{1}{2}i\int_{0}^{\pi/4} \frac{dt}{\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}} = \frac{1}{2}i\int_{0}^{\pi/4} \frac{dt}{\cos t}$$

$$= \frac{1}{2}i\left[\ln\left|tg(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})\right|\right]_{0}^{\pi/4} = \frac{1}{2}i\ln\left|tg(\frac{3\pi}{8})\right|.$$

Solution 4 *Pour le calcul de l'intégrale, on utilise la formule*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & si \ \ z_0 \ \ est\ à\ l'intérieur\ de\ \gamma \\ 0 & si\ z_0 \ \ est\ à\ l'extérieur\ de\ \gamma \end{cases}$$

1) Calculons l'intégrale

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^2-5iz-6} = \int_\gamma \frac{dz}{(z-2i)(z-3i)} = i\int_\gamma \frac{dz}{z-2i} - i\int_\gamma \frac{dz}{z-3i} = 2\pi i\,(i) - 0 = -2\pi.$$

2) Calculons l'intégrale

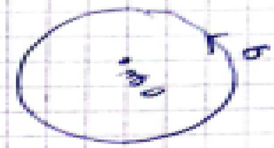
$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^2-5iz-6} = \int_\gamma \frac{dz}{(z-2i)(z-3i)} = i\int_\gamma \frac{dz}{z-2i} - i\int_\gamma \frac{dz}{z-3i} = 2\pi i\,(i) - 2\pi i\,(i) = 0.$$

Solution 5

① La formule d'intégration de Cauchy :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

Alors $$\int_\sigma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!}\, f^{(n)}(z_0) \cdots\cdots (*)$$

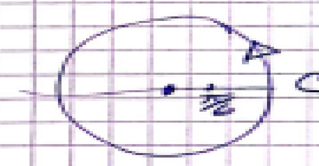


Si $n=2$ on aura $$\int_\sigma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{3}} = \pi i\, f^{(2)}(z_0) \quad (**)$$

Prendre $z_0 = \pi/6$ et $f(z) = \sin^6 z$.

Alors $f^{(2)}(z) = 30\sin^4 z\cos^2 z - 6\sin^6 z$

Alors $f^{(2)}(z_0) = f^{(2)}(\pi/6) = \frac{21}{16}$



Alors $$\boxed{\int_C \frac{\sin^6 z}{(z-\pi/6)^3}\,dz = \frac{21\pi i}{16}}$$

② Par $(*)$: $$\int_\sigma \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i\, f(z_0) \quad (\Delta) \quad (\text{prendre } n=0)$$

Soit $f(z) = \exp(zt)$.

Nous avons $$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right]$$

Alors $$\frac{f(z)}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left[\frac{f(z)}{z-i} - \frac{f(z)}{z+i}\right]$$

Alors par (Δ) : $$\int_C \frac{f(z)}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}\left[\int_C \frac{f(z)}{z-i}\,dz - \int_C \frac{f(z)}{z+i}\,dz\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[2\pi i\, f(i) - 2\pi i\, f(-i)\right]$$

$$= \pi\left[\exp(it) - \exp(-it)\right] = 2\pi i \sin t$$

Solution 6

1/ La singularité de f est

$$z_0 = i + 3.$$

Nous remarquons que $i+3$ est à l'extérieur du domaine inclus dans $|z-i| = \frac{1}{5}$. Autrement dit, la fonction f est holomorphe sur ce domaine. Le chemin en considération est fermé et le domaine pris est simplement connexe.

Cette intégrale vaut zéro d'après le théorème de Cauchy. Ainsi,

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{5}} \frac{2}{(z-i-3)} \;=\; 0.$$

2/ La singularité de f est

$$z_0 = i + 2.$$

Cette singularité est à l'intérieur de notre domaine. Les conditions de la formule intégrale de Cauchy sont satisfaites (chemin fermé, domaine S.C, e^z est holomorphe). Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z-1-i|=3} \frac{e^z}{(z-i-2)^2}\, dz, \\ &= 2\pi i g'(i+2) = 2\pi i e^{i+2}, \end{aligned}$$

avec

$$g(z) = e^z.$$