Université A/Mira de Bejaia
Département de Recherche opérationnelle
L2 MA.
Bejaia 2023/2024

Série de TD N° 2 D'Analyse 4 (Partie 2)

Exercice 1. Soit $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Si oui donner sa différentielle.

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{cases} x^2y^2\sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Soit la fonction f définie comme suit :

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. f est elle continue en $(0,0)$?
2. f est elle différentiable en $(0,0)$?
3. Calculez la dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, puis étudier les points ou cette dérivée s'annule.
4. Etudier la nature du point $(0,0)$.

Exercice 4. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage du point $(1,-1)$ de la fonction suivante.

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}.$$

Exercice 5. Soit la fonction suivante :

$$f(x,y)=2x^2+4xy^2+4y^4+4x+1.$$

1. Calculez le gradient de f, puis déterminer les points critiques de f.
2. A l'aide des dérivées secondes, discutez (si cela est possible) pour chacun des points critiques si c'est un minimum ou maximum local.

Exercice 6. Soit $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x,y)=y^2+xy\ln x.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer la nature de ces points critiques.