Corrigé-type de la série 4 STAT II 2023 . 2024

Corrigé de l'exercice 1

1. La loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètre P = 0,01 et n =100 **X ~ B(100, 0,01)**

$P(X = k) = C^k{}_n\ p^k\ (1 - p)^{-k}$

2. calcul de l'espérance et de la variance de X

E(X) = n × p = 100 × 0,01= 1

Interprétation : sur 100 appareils, en moyenne, un appareil risque d'être défectueux

3. **Calcul de la variance**

V(X) = n × p × q = 100 × 0,01 × 0,99= 0,99

Calcul de l'écart-type

$\boldsymbol{\delta x} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0{,}99} = \mathbf{0{,}9949}$

4. Calcul des probabilités d'avoir :

a. une panne

$(X = 1) = C^1{}_{100}\ (0,01)^1\ (0{,}99)^{99} = 0,3697$

b- aucune panne,

$P(X = 0) = C^0{}_{100}\ (0,01)^0\ (0{,}99)^{100} = 0,366$

c- plus de 4 pannes

(X >4) = 1- p (x ≤4)= P(x=0) + P(x=1) + P(X=2) + P(x=3)+ P(x=3) = 1-0,995=0, 005

5. L'expression de Y en fonction de X

Y = 50 X

E(Y) = 50 E(X) = 50 × 1= 50€ ***50 au lieux de 500***

$V(Y) = 50^2\ V(X) = 50^2 \times 0,99 = 2\,475$€

6. Pour pouvoir procéder à l'approximation de la loi binomiale par la loi de poisson, trois conditions doivent être satisfaites :

a. n≥30 dans notre cas n=100 (satisfaite)

b. P≤0,01 dans notre cas P=0,01 (satisfaite)

c. n*p< 15 dans notre cas n*p =100*0,01= 1 (satisfaite)

Donc, on peut procéder à l'approximation avec $\lambda = n * p$

la loi de X est donc X ~ P (1)

$P(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Calcul des probabilités d'avoir :

a . Entre 3 et 5 pannes

$P(3 \leq x \leq 5) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} + \frac{1^4}{4!} e^{-1} + \frac{1^5}{5!} e^{-1} = 0{,}0613 + 0{,}0153 + 0{,}003 = 0{,}0796$

, **b. Moins de 5 pannes,**

P (x<5)= P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)+ P(x=3)+ P(x=4)= $\frac{1^0}{0!}e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} + \frac{1^2}{2!}e^{-1} + \frac{1^3}{3!}e^{-1}$ $+\frac{1^4}{4!}e^{-1}$ =0,3678 +0,3678 +0,1839+ 0,0613 + 00153= 0,9961

b. Au plus 3 pannes

P (x≤3)= P(x=0)+ P(x=1)+ P(x=2)+ P(x=3) =0,3678 +0,3678 +0,1839+ 0,0613=0,9808

d. Au moins 5 pannes

P (x≥5)= 1-P(x<5) = 1- $P(x \leq 4) = [P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) +$ $P(x = 4) = 1 - 0{,}9961] = 0{,}0039$

Corrigé de l'exercice 3

1. La loi de X : On a deux issues : échec ou succès et l'épreuve est répétée autant de fois nécessaires jusqu'à la réalisation du succès, par conséquent, la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p = 0, 02 et on note $X \sim G(0{,}02)$,

et on a : $P(X = k) = p^* (1 - p)^{k-1} = (0, 02)(0, 98)^{k-1}$.

1. Calcul de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X

$E(X) = \frac{1}{P} = \frac{1}{0{,}02} = 50$

$V(X) = \frac{1-P}{P^2} = \frac{1-(0{,}02)}{(0{,}02)^2} = 2450$

2. La probabilité que le tireur touche la cible

a. au premier tir est

$P(x = 1) = (0, 02)(0, 98)^{1-1} = 0, 02$

b. Avant le troisième tir

$P(x<3) = P(x=1) + P(x=2) = (0, 02)(0, 98)^{1-1} + (0, 02)(0, 98)^{2-1}$ =0,02 +0,0196=0,096

C. Après le troisième tir

P(x>3)= 1-P (x≤3)= 1- [P(x=1)+ P(x=2) + P(x=3)]= 1-[0,0396+0,02*0,98 $^{(3-1)}$ = 1-0,058808= 0.9411

Corrigé de l'exercice 4

La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres E(X) = 20 et $\partial(X) = 5$, on écrit

$X \sim N(20, 5)$.

On pose $Z = \frac{X-20}{5}$

$Z \sim N(0, 1)$

a. Calculer la probabilité des administrations dont la consommation de papier est :

1. moins de 10 rames par jour

$$P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-20}{5}\right)$$
$$= P (Z < -2)$$
$$= F_Z(-2)$$
$$= 1 - F_Z(2)$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

P(*X* < 10) = 0, 0228

2. Plus de 30 rames par jour

$P(X > 30) = P\ (Z > \frac{30-20}{5})$

$= P\ (Z > 2)$

$= 1 - P\ (Z \leq 2)$

$= 1 - F_Z(2)$

$= 1 - 0,9772$

$= 0,0228$

$\mathbf{P(\mathit{X} > 30) = 0,0228}$

b..Détermination de la consommation maximale de la moitié des administrations

Il s’agit de déterminer la valeur de C, tel que :

$P(X \leq c) = 0,5 \Rightarrow P\ (Z \leq \frac{C-20}{5}) = 0,5$

$\Rightarrow F_Z\ (\frac{C-20}{5}) = 0,5$

$$\Rightarrow \frac{C-20}{5} = 0$$
$$\Rightarrow c = 20$$

Donc la consommation maximale de 50% des administrations est de 20 rames.

c. Détermination du niveau de consommation où se trouvent 33% des administrations

. On cherche à calculer c telle que :

$$P(X > c) = 0,33 \;\Rightarrow P\left(Z > \frac{C-20}{5}\right) = 0,33$$
$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{C-20}{5}\right) = 0,33$$
$$\Rightarrow 1 - F_Z\left(\frac{C-20}{5}\right) = 0,33$$
$$\Rightarrow F_Z\left(\frac{C-20}{5}\right) = 0,67$$
$$\Rightarrow \frac{C-20}{5} = 0,44$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{c} = \mathbf{22,2}$$

Donc 33% des administrations se trouvent au dessus du seuil de consommation de 22, 5 litres.

Corrigé de l'exercice 4

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{10} = 0,1$, on écrit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

tel que $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$.

1. calcul de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,1} = 10$$
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(0,1)^2} = 100$$

2. Calcul de la probabilité d'attendre plus de dix minutes

On a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$p(X > 10) = 1 - p(X \leq 10) = 1 - (1 - e^{-0,1\,(10)}) = e^{-1} = 0,37$$

$$p(X > 10) = 0,37$$

3. Calcul de la probabilité d'attendre entre dix et vingt minutes

$$P(10 \leq X \leq 20) = \int_{10}^{20} (0,1\, e^{-0,1\,x}) = P(X \leq 20) - P(X \leq 10)$$
$$= (1 - P(X > 20)) - (1 - P(X > 10))$$
$$= e^{-1} - e^{-2} = 0,23$$

$$P(10 < X < 20) = 0,23$$