

Examen de Biostatistique

Durée : 1 h 30

Exercice n° 1. (08 points)

Une étude faite sur le nombre d'enfants de 21 couples de l'université a donné :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de couples	2	4	4	5	3	2	1

1. Donner la représentation graphique de cette série statistique.
2. Dresser le tableau des fréquences relatives cumulées.
3. Calculer la moyenne et l'écart-type de la série statistique.
4. Déterminer le mode, la médiane et le quartile Q_1 .

Exercice n° 2. (07 points)

On lance deux dès numérotés et bien équilibrés. En observant les numéros affichés sur les surfaces supérieures des dès, on obtient 36 couples : $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)\}$. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies par :

$$X(a, b) = \max(a, b) \text{ et } Y(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b; \\ 0, & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

1. Déterminer les lois de probabilités des v.a. X , Y et du couple (X, Y) .
2. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.
3. Calculer $Cov(X, Y)$ et le coefficient de corrélation $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Exercice n° 3. (05 points)

Une entreprise veut mener une étude sur la liaison entre les dépenses mensuelles en publicité et le volume des ventes qu'elle réalise. Les données obtenues au cours des cinq derniers mois sont :

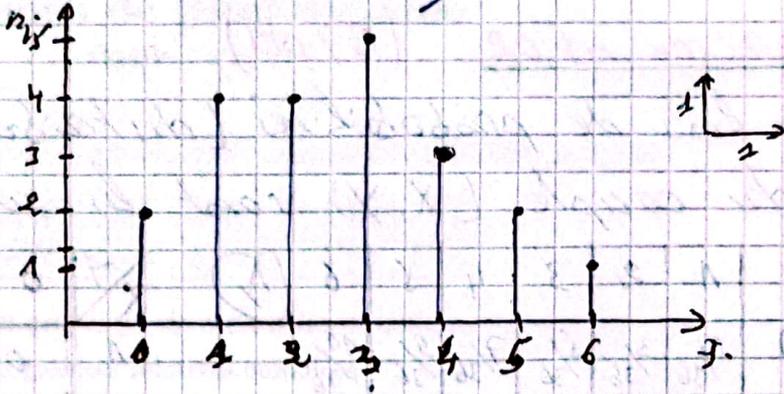
X (Dépenses publicitaires en milliers de DA)	10	15	20	30	35
Y (Volume des des ventes en milliers de DA)	400	700	800	900	950

1. Calculer \bar{x} , \bar{y} et \bar{xy} . Déduire $Cov(X, Y)$.
2. Calculer la variance de X .
3. Donner l'équation de la droite de régression de Y en fonction de X .

Exercice n° 01 (08pts):

1) Graphique de la série statistique:

Le diagramme en bâtons des effectifs.



2)

moins de x	n_i	F_i (en %)
< 0	0	0 (0%)
< 1	2	0,0952 (9,52%)
< 2	6	0,2857 (28,57%)
< 3	10	0,4761 (47,61%)
< 4	15	0,7142 (71,42%)
< 5	18	0,8571 (85,71%)
< 6	20	0,9523 (95,23%)
< 7 (ou > 6)	21	1 (100%)

3) $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i \cdot x_i = \frac{1}{21} (12 \times 0) + (4 \times 1) + (4 \times 2) + (5 \times 3) + (3 \times 4) + (2 \times 5) + (1 \times 6)$

$\bar{x} = 2,6190$

$V(X) = \frac{1}{n} \sum n_i \cdot x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{21} (12 \times 0^2) + (4 \times 1^2) + (4 \times 2^2) + (5 \times 3^2) + (3 \times 4^2) + (2 \times 5^2) + (1 \times 6^2) - (2,619)^2$

$V(X) = 2,6170 \Rightarrow \sigma_x = 1,6177$

4) * Le mode: $Mo = 3$ (N)

* Médiane: $Me = x_{11} = 3$ (N)

* Le quartile Q_1 : $Q_1 \rightarrow \frac{n}{4} = \frac{21}{4} = 5,25$
 donc $Q_1 = x_6 = 1$ (N)

Exercice n° 02: (07pts)

1) Les lois de probabilités (distributions) des v.a. X , Y et du couple (X, Y) sont les suivantes:

x	1	2	3	4	5	6	(N)
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

$X \backslash Y$	0	1	P_{i0}
1	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
P_{0j}	$\frac{30}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

y_j	0	1	(N)
$P(Y=y_j)$	$\frac{30}{36}$	$\frac{6}{36}$	

2) i) $E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X=x_i) = 1\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{3}{36}\right) + 3\left(\frac{5}{36}\right) + 4\left(\frac{7}{36}\right) + 5\left(\frac{9}{36}\right) + 6\left(\frac{11}{36}\right)$

$E(X) = \frac{161}{36} = 4,4722$ (0,5)

ii) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_i x_i^2 P(X=x_i) - (E(X))^2$
 $= 1^2\left(\frac{1}{36}\right) + 2^2\left(\frac{3}{36}\right) + 3^2\left(\frac{5}{36}\right) + 4^2\left(\frac{7}{36}\right) + 5^2\left(\frac{9}{36}\right) + 6^2\left(\frac{11}{36}\right) - \left(\frac{161}{36}\right)^2$

$V(X) = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = 1,9714 \Rightarrow \sigma_X = 1,4040$ (0,5)

iii) $E(Y) = \sum_j y_j P(Y=y_j) = 0\left(\frac{30}{36}\right) + 1\left(\frac{6}{36}\right) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (0,5)

iv) $V(Y) = \sum_j y_j^2 P(Y=y_j) - (E(Y))^2 = 0^2\left(\frac{30}{36}\right) + 1^2\left(\frac{6}{36}\right) - \left(\frac{6}{36}\right)^2$

$V(Y) = 0,1388 \Rightarrow \sigma_Y = 0,3726$ (0,5)

$$v_x) E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = \frac{1}{36} (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{36} = 0,5833. \quad (0,5)$$

$$3) \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{21}{36} - \left(\frac{161}{36} \times \frac{1}{6}\right) = -0,1620. \quad (0,5)$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V_X V_Y}} = \frac{-0,1620}{\sqrt{1,4040 \times 0,3726}} = -0,3096. \quad (1)$$

Exercice n°03: (5 points)

$$1) \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i = \frac{1}{5} (10 + 15 + 20 + 30 + 35) = 22. \quad (0,5)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_j n_{.j} y_j = \frac{1}{5} (400 + 700 + 800 + 900 + 950) = 750. \quad (0,5)$$

$$\bar{xy} = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j n_{ij} x_i y_j = \frac{1}{5} \sum_i \sum_j x_i y_j. \quad (1)$$

$$\bar{xy} = \frac{1}{5} (10 \times 400 + 15 \times 700 + 20 \times 800 + 30 \times 900 + 35 \times 950) = 18150.$$

Deduction de la Cov(X, Y): (0,5)

$$\text{Cov}(X, Y) = \bar{xy} - \bar{x} \bar{y} = 1650.$$

$$2) V(X) = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{5} (10^2 + 15^2 + 20^2 + 30^2 + 35^2) - 22^2 = 86. \quad (1)$$

3) Droite de régression $D(Y/X): y = ax + b$

$$\text{avec } a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V_X} = \frac{1650}{86} = 19,186 \quad (0,5)$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} = 750 - (19,186 \times 22) = 327,908. \quad (0,5)$$

La droite d'ajustement $D(Y/X): y = 19,186x + 327,908$ (0,5)