Département FI(LMD) SECSG
Université De Bejaia
1ere Année

Mardi 28 Mai 2024

Corrigé De L'Examen De Mathématiques (II)

Corrigé De L'Exercice1(12pts) I- On a le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x+2y-4z=3 \\ 3x-4y-6z=5 \\ 2x-5y+2z=7 \end{cases}$$

1. La matrice des coefficients A et la matrice augmentée $\tilde{A}$ (0.5pts)

$$\blacksquare\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \blacksquare\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -6 & 5 \\ 2 & -5 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

2. Ecriture matricielle de (S) (0.5pts).

En posant $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, on a l'écriture matricielle :

$$(S) \Leftrightarrow AX=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

II- Calculs Matriciels(04pts)

3. Calcul des deux produits matriciels(02.5pts)

- **Le Produit $A^2=A\times A$** On a :

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots & 14 & \dots \\ -21 & 52 & 0 \\ \dots & 14 & \dots \end{pmatrix}$$

On calcule les éléments suivants :

L'élément de la première ligne et de la première colonne c_{11}

$\blacksquare\ c_{11}=L_1\times C_1=(1\quad 2\quad -4)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}=(1)(1)+(2)(3)+(-4)(2)=\mathbf{-1}.$ **(0.25pts)**

L'élément de la première ligne et de la troisième colonne c_{13}

$\blacksquare\ c_{13}=L_1\times C_3=(1\quad 2\quad -4)\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}=(1)(-4)+(2)(-6)+(-4)(2)=\mathbf{-24}.$ **(0.25pts)**

L'élément de la troisième ligne et de la première colonne c_{31}

$\blacksquare\ c_{31}=L_3\times C_1=(2\quad -5\quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}=(2)(1)+(-5)(3)+(2)(2)=\mathbf{-9}.$ **(0.25pts)**

L'élément de la troisième ligne et de la troisième colonne c_{33}

$\blacksquare\ c_{33}=L_3\times C_3=(2\quad -5\quad 2)\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}=(2)(-4)+(-5)(-6)+(2)(2)=\mathbf{26}.$ **(0.25pts)**

Finalement : $A^2=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 14 & \mathbf{-24} \\ -21 & 52 & 0 \\ \mathbf{-9} & 14 & \mathbf{26} \end{pmatrix}$ **(0.25pts)**

- **Le Produit $A^3=A^2\times A$** On a :

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix} -1 & 14 & -24 \\ -21 & 52 & 0 \\ -9 & 14 & 26 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & \dots & -128 \\ \dots & -250 & \dots \\ 85 & \dots & 4 \end{pmatrix}$$

On calcule les éléments suivants :

L'élément de la première ligne et de la deuxième colonne c_{12}

■ $c_{12} = L_1 \times C_2 = (-1 \quad 14 \quad -24)\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = (-1)(2) + (14)(-4) + (-24)(-5) = \mathbf{62}.$ **(0.25pts)**

L'élément de la deuxième ligne et de la première colonne c_{21}

■ $c_{21} = L_2 \times C_1 = (-21 \quad 52 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (-21)(1) + (52)(3) + (0)(2) = \mathbf{135}.$ **(0.25pts)**

L'élément de la deuxième ligne et de la troisième colonne c_{23}

■ $c_{23} = L_2 \times C_3 = (-21 \quad 52 \quad 0)\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = (-21)(-4) + (52)(-6) + (0)(2) = \mathbf{-228}.$ **(0.25pts)**

L'élément de la troisième ligne et de la deuxième colonne c_{32}

■ $c_{32} = L_3 \times C_2 = (-9 \quad 14 \quad 26)\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = (-9)(2) + (14)(-4) + (26)(-5) = \mathbf{-204}.$ **(0.25pts)**

Finalement : $A^3 = \begin{pmatrix} -7 & \mathbf{62} & -128 \\ \mathbf{135} & -250 & \mathbf{-228} \\ 85 & \mathbf{-204} & 4 \end{pmatrix}.$ **(0.25pts)**

---

4. **Vérification (01.5pts)** On a :

$$-A^3 - A^2 + 38A = -\begin{pmatrix} -7 & 62 & -128 \\ 135 & -250 & -228 \\ 85 & -204 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 14 & -24 \\ -21 & 52 & 0 \\ -9 & 14 & 26 \end{pmatrix} + 38\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -62 & 128 \\ -135 & 250 & 228 \\ -85 & 204 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -14 & 24 \\ 21 & -52 & 0 \\ 9 & -14 & -26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38 & 76 & -152 \\ 114 & -152 & -228 \\ 76 & -190 & 76 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 46 & 0 & 0 \\ 0 & 46 & 0 \\ 0 & 0 & 46 \end{pmatrix} = 46\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ **(01pts)**

En d'autre terme : $\boldsymbol{-A^3 - A^2 + 38A = 46I_3}.$ **(0.5pts)**

III- La méthode de la matrice inverse (03.5pts)

5. **Montrons que A est inversible et donnons A^{-1} (02.5pts)**

Il suffit de mettre l'expression "$-A^3 - A^2 + 38A = 46I_3$" sous la forme $A \times B = I_3$ ou $B \times A = I_3$. **(0.5pts)**

On a: $-A^3 - A^2 + 38A = 46I_3$ et $-A^3 - A^2 + 38A = 46I_3 \Rightarrow \frac{1}{46}(-A^3 - A^2 + 238A) = I_3 \Rightarrow \frac{1}{46}(-A^2 - A + 38I_3) \times A = I_3$.

Donc, $\frac{1}{46}(-A^2 - A + 38I_3) \times A = I_3$. Et par conséquent A est inversible et son inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{46}(-A^2 - A + 38I_3) = \frac{1}{46}\left[-\begin{pmatrix} -1 & 14 & -24 \\ -21 & 52 & 0 \\ -9 & 14 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} + 38\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{46}\left[\begin{pmatrix} 1 & -14 & 24 \\ 21 & -52 & 0 \\ 9 & -14 & -26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38 & 0 & 0 \\ 0 & 38 & 0 \\ 0 & 0 & 38 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} 38 & -16 & 28 \\ 18 & -10 & 6 \\ 7 & -9 & 10 \end{pmatrix}.$$ **(02pts)**

6. Résolution du système (S) par la méthode de la matrice inverse (01pts)

On a $AX = b$, A est inversible et A^{-1} son inverse. Donc, le système (S) admet une seule solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donnée par : $X = A^{-1}b = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} 38 & -16 & 28 \\ 18 & -10 & 6 \\ 7 & -9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} L_1 \times C_1 \\ L_2 \times C_1 \\ L_3 \times C_1 \end{pmatrix}$

Avec :

■ $L_1 \times C_1 = (38 \quad -16 \quad 28)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (38)(3) + (-16)(5) + (28)(7) = 114 - 80 + 196 = \mathbf{230}.$ **(0.25pts)**

■ $L_2 \times C_1 = (18 \quad -10 \quad 6)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (18)(3) + (-10)(5) + (6)(7) = 54 - 50 + 42 = \mathbf{46}.$ **(0.25pts)**

■ $L_3 \times C_1 = (7 \quad -9 \quad 10)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (7)(3) + (-9)(5) + (10)(7) = 21 - 45 + 70 = \mathbf{46}.$ **(0.25pts)**

Donc, $X = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} 230 \\ 46 \\ 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(0.25pts)**

IV- La méthode de Cramer(03.5pts)

7. Vérification que le système est de Cramer (0.5pts)

Le système (S) est de Cramer car sa matrice des coefficients A est inversible.

8. Résolution du système (S) par la méthode de Cramer (03pts)

Comme le système est de Cramer, il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer : **(0.5pts)**

$$■\ \boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{A_x}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 2 & -4 \\ \mathbf{5} & -4 & -6 \\ \mathbf{7} & -5 & 2 \end{vmatrix}}{-46} = \frac{-230}{-46} = \mathbf{5}\ ■\ \boldsymbol{y} = \frac{|\boldsymbol{A_y}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3} & -4 \\ 3 & \mathbf{5} & -6 \\ 2 & \mathbf{7} & 2 \end{vmatrix}}{-46} = \frac{-46}{-46} = \mathbf{1}\ ■\ \boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{A_z}|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 3 & -4 & \mathbf{5} \\ 2 & -5 & \mathbf{7} \end{vmatrix}}{-46} = \frac{-46}{-46} = \mathbf{1}$$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

$$■|\boldsymbol{A}| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{matrix}\right| = (1)(-4)(2) + (2)(-6)(2) + (-4)(3)(-5) - (-4)(-4)(2) - (1)(-6)(-5) - (2)(3)(2)$$

$$= -8 - 24 + 60 - 32 - 30 - 12 = \mathbf{-46}. \quad \textbf{(0.5pts)}$$

$$■|\boldsymbol{A_x}| = \left|\begin{matrix} \mathbf{3} & 2 & -4 \\ \mathbf{5} & -4 & -6 \\ \mathbf{7} & -5 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \mathbf{3} & 2 \\ \mathbf{5} & -4 \\ \mathbf{7} & -5 \end{matrix}\right| = (3)(-4)(2) + (2)(-6)(7) + (-4)(5)(-5) - (-4)(-4)(7) - (3)(-6)(-5) - (2)(5)(2)$$

$$= -24 - 84 + 100 - 112 - 90 - 20 = \mathbf{-230}. \quad \textbf{(0.5pts)}$$

$$■|\boldsymbol{A_y}| = \left|\begin{matrix} 1 & \mathbf{3} & -4 \\ 3 & \mathbf{5} & -6 \\ 2 & \mathbf{7} & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & \mathbf{3} \\ 3 & \mathbf{5} \\ 2 & \mathbf{7} \end{matrix}\right| = (1)(5)(2) + (3)(-6)(2) + (-4)(3)(7) - (-4)(5)(2) - (1)(-6)(7) - (3)(3)(2)$$

$$= 10 - 36 - 84 + 40 + 42 - 18 = \mathbf{-46}. \quad \textbf{(0.5pts)}$$

$$■|\boldsymbol{A_z}| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 3 & -4 & \mathbf{5} \\ 2 & -5 & \mathbf{7} \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{matrix}\right| = (1)(-4)(7) + (2)(5)(2) + (3)(3)(-5) - (3)(-4)(2) - (1)(5)(-5) - (2)(3)(7)$$

$$= -28 + 20 - 30 + 24 + 10 - 42 = \mathbf{-46}. \quad \textbf{(0.5pts)}$$

Finalement : $\bar{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(0.5pts)**

Corrigé De L'Exercice2(04pts) Résolution du système (S) par Gauss.

$$(S)\begin{cases} x - 2y + z + 3t = 1 \\ 3x - 6y + 3z + 10t = 4 \\ 2x - 4y + 3z + 5t = 1 \end{cases}$$

■ Echelonnement de la matrice augmentée : **(01.5pts)**

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 10 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (-3)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_3 \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right) = \widetilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{e}}$$

■ Soit (S_e) le système associé à la matrice $\tilde{A}_e$: **(0.5pts)**

$$(S_e)\begin{cases} \boldsymbol{x} - 2y + z + 3t = 1 \\ \boldsymbol{z} - t = -1 \\ \boldsymbol{t} = 1 \end{cases}$$

Ainsi le système (S) admet une infinité de solutions (Dans (S_e) le nombre d'équations < au nombre de variables).

■ La résolution de (S_e) : En résolvant par rapport à la première variable de chaque équation et par la méthode de substitution, on obtient :

$$\begin{cases} x = 1 + 2y - z - 3t \\ z = -1 + t \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y - 3 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2y \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \quad \textbf{(01pts)}$$

■ Finalement, les solutions du système (S) sont : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2a \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$. **(01pts)**

Corrigé De L'Exercice3(04pts) On a la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}$ telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0\,; & si\ i = j \\ 1\,; & si\ i \neq j \end{cases} \qquad (*)$$

1. **Trouvons la matrice A(01pts)**

On a d'une part, par définition : $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Et en d'autre part, en appliquant les équations $(*)$ à chaque élément a_{ij}, on obtient : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

---

2. **Matrice inverse A^{-1} par Gauss-Jordan (03pts)** On a :

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_1 \ \textbf{(0.5pts)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \ \textbf{(0.5pts)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + (-1)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) = (I_3|A^{-1}) \ \textbf{(01pts)}$$

Et par conséquent : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ **(01pts)**