CORRIGE SERIE N°02 : Techniques d'interpolations nodales

Solution de l'exercice 01:

* Détermination des expressions de $x(\xi)$ et $y(\xi)$ pour un élément quadratique 1D dans le plan (x, y).

La relation entre l'espace réel à une dimension de coordonnée " x " et l'espace de référence à une dimension de coordonnée " ξ " s'écrit comme suite :

$$x(\xi) = \bar{N}_1(\xi)x_1 + \bar{N}_2(\xi)x_2 + \bar{N}_3(\xi)x_3$$

Pour un élément quadratique 1D les fonctions de formes sont comme suites :

- $\bar{N}_1(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)$
- $\bar{N}_2(\xi) = 1-\xi^2$
- $\bar{N}_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1+\xi)$

On a

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$

A partir de ces données, on peut écrire :

$$x(\xi) = \bar{N}_1(\xi)0 + \bar{N}_2(\xi)1 + \bar{N}_3(\xi)2$$

$$\Rightarrow x(\xi) = (1-\xi^2)1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)2$$

$$x(\xi) = 1 - \xi^2 + \xi + \xi^2 = 1 + \xi$$

$$\boxed{x(\xi) = 1 + \xi}$$

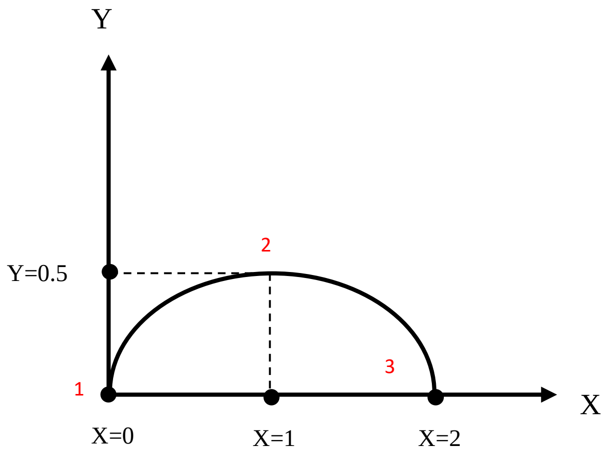
La relation entre l'espace réel à une dimension de coordonnée " y " et l'espace de référence à une dimension de coordonnée " ξ " s'écrit comme suite :

$$y(\xi) = \bar{N}_1(\xi)y_1 + \bar{N}_2(\xi)y_2 + \bar{N}_3(\xi)y_3$$

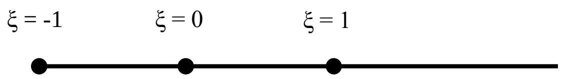
$$y(\xi) = \bar{N}_1(\xi)0 + \bar{N}_2(\xi)0.5 + \bar{N}_3(\xi)0$$

$$\Rightarrow y(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)$$

$$\boxed{y(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)}$$



Élément quadratique a 3 nœuds dans le plan (x,y)



Élément de reference

<u>Solution de l'exercice 02:</u>

1/ Détermination de l'expression de l'interpolation $x(\xi,\eta)$ et $y(\xi,\eta)$.

- Commençant par écrire les expressions de $x(\xi,\eta)$ et $y(\xi,\eta)$.

On a :

$$x(\xi,\eta) = \bar{N}_1(\xi,\eta)x_1 + \bar{N}_2(\xi,\eta)x_2 + \bar{N}_3(\xi,\eta)x_3$$

Et

$$y(\xi,\eta) = \bar{N}_1(\xi,\eta)y_1 + \bar{N}_2(\xi,\eta)y_2 + \bar{N}_3(\xi,\eta)y_3$$

Donc d'après les tables, les fonctions du plan sont comme suites pour un élément de type triangle linéaire.

- $\bar{N}_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta$
- $\bar{N}_2(\xi,\eta) = \xi$
- $\bar{N}_3(\xi,\eta) = \eta$

Et donc :

$$x(\xi,\eta) = (1 - \xi - \eta)x_1 + (\xi)x_2 + (\eta)x_3$$

$$y(\xi,\eta) = (1 - \xi - \eta)y_1 + (\xi)y_2 + (\eta)y_3$$

Cela donne pour $x(\xi,\eta)$:

$$x(\xi,\eta) = x_1 - \xi x_1 - \eta x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 = \xi(x_2 - x_1) + \eta(x_3 - x_1) + x_1$$

$$\boxed{x(\xi,\eta) = \xi(x_2 - x_1) + \eta(x_3 - x_1) + x_1}$$

Et pour $y(\xi,\eta)$:

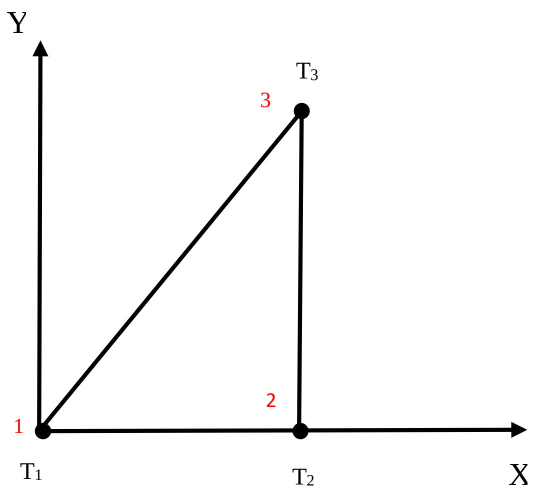
$$y(\xi,\eta) = y_1 - \xi y_1 - \eta y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 = \xi(y_2 - y_1) + \eta(y_3 - y_1) + y_1$$

$$\boxed{y(\xi,\eta) = \xi(y_2 - y_1) + \eta(y_3 - y_1) + y_1}$$

<u>Solution de l'exercice 03:</u>

1/ Détermination de l'expression de l'interpolation $T(x,y)$, en passant par l'élément de référence.

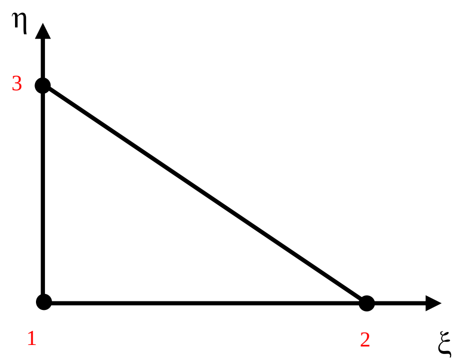
On a un élément triangulaire linéaire "TRI 3″ dans le plan (x,y) en 2D, tels que :
nœud 1 (0, 0), nœud 2 (1, 0) et nœud 3 (1, 1).



$T(x,y)$: champ de température interpolé à l'intérieur de cet élément.

On associe un élément de référence.

Passant par l'élément de référence pour $T(x,y)$, on a :



L'élément de référence.

En général, on écrit :

$$T(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} \bar{N}_i\,(\xi,\eta)T_i$$

Donc :

$$T(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)T_1 + N_2(\xi,\eta)T_2 + N_3(\xi,\eta)T_3$$

Basant toujours sur les tables (les annexes), les fonctions du plan sont comme suites pour un élément de type triangle linéaire.

* $\bar{N}_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta$
* $\bar{N}_2(\xi,\eta) = \xi$
* $\bar{N}_3(\xi,\eta) = \eta$

Cela permet d'écrire :

$$T(\xi,\eta) = (1 - \xi - \eta)T_1 + (\xi)T_2 + (\eta)T_3 \text{..............................} \quad (1)$$

Or :

$$x(\xi,\eta) = (1 - \xi - \eta)x_1 + (\xi)x_2 + (\eta)x_3$$

$$\Rightarrow x(\xi,\eta) = x_1 - \xi x_1 - \eta x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 = \xi(x_2 - x_1) + \eta(x_3 - x_1) + x_1$$

$$x(\xi,\eta) = \xi(x_2 - x_1) + \eta(x_3 - x_1) + x_1 \text{..............................} \quad (2)$$

Et

$$y(\xi,\eta) = (1 - \xi - \eta)y_1 + (\xi)y_2 + (\eta)y_3$$

$$\Rightarrow y(\xi,\eta) = y_1 - \xi y_1 - \eta y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 = \xi(y_2 - y_1) + \eta(y_3 - y_1) + y_1$$

$$y(\xi,\eta) = \xi(y_2 - y_1) + \eta(y_3 - y_1) + y_1 \text{..............................} \quad (3)$$

<u>Vérification</u>

Si (ξ=0, η=0) ⇒ le nœud 1 égale (x_1, y_1), c'est-à-dire $x(0,0) = x_1$ et $y(0,0) = y_1$, ce qui correspond au nœud 1 dans le plan réel.
Pour les deux autres nœuds
Remplaçons $x_1;\ x_2;\ x_3;\ y_1;\ y_2;\ y_3$ par leurs relations respectivement
On aura :

$$x(\xi,\eta) = \xi(1 - 0) + \eta(1 - 0) + 0$$

$$\Rightarrow x(\xi,\eta) = \xi + \eta$$

Et

$$y(\xi,\eta) = \xi(0-0) + \eta(1-0) + 0$$
$$y(\xi,\eta) = \eta$$

Cela donne :
$\eta(x,y) = y$ et $\xi(x,y) = x - y$

Remplaçons $\eta(x,y)$ et $\xi(x,y)$ dans (1)

$$T(\xi(x,y),\eta(x,y)) = (1-\xi-\eta)T_1 + (\xi)T_2 + (\eta)T_3$$

$$T(x,y) = (1-(x-y)-y)T_1 + (x-y)T_2 + (y)T_3$$

$$T(x,y) = (1-x)T_1 + (x-y)T_2 + (y)T_3$$

$$\boxed{T(x,y) = T_1 + (T_2-T_1)x + (T_3-T_2)y}$$

2/ Retrouvons le résultat précédent sans passer par l'élément de référence en posant que :
$$T(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y$$

On sait que $T(0,0) = T_1 = a_0$

On sait également que $T(1,0) = T_2 = T_1 + a_1 1 + a_2 0$

$$\boxed{a_1 = T_2 - T_1}$$

Pareil pour $T(0,1) = T_3 = T_1 + (T_2-T_1)0 + a_2 1$

$$\boxed{a_2 = T_3 - T_1}$$

Finalement, on retrouve le résultat précédent en remplaçant a_1, a_2 et a_3 par leurs valeurs respectives

$$\boxed{T(x,y) = T_1 + (T_2-T_1)x + (T_3-T_1)y}$$

Solution de l'exercice 04:

1/ Détermination de l'interpolation $T(x)$ en utilisant un maillage avec un seul élément 1D quadratique et en passant par l'élément de référence.

On a :

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Nœud 1} & \Rightarrow & x_1 = 0 \quad \text{et} & T_1 = 0 \\ \text{Nœud 2} & \Rightarrow & x_2 = 1 \quad \text{et} & T_2 = 1 \\ \text{Nœud 3} & \Rightarrow & x_3 = 4 \quad \text{et} & T_3 = 2 \end{array}\right\} \qquad x(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \overline{N}_i(\xi)\, x_i$$

Avec

- $\overline{N}_1(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)$
- $\overline{N}_2(\xi) = 1 - \xi^2$
- $\overline{N}_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1+\xi)$

Donc

$$x(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)0 + (1-\xi^2)1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)4$$

$$x(\xi) = 1 - \xi^2 + 2\xi + 2\xi^2 = 1 + 2\xi + \xi^2 = (1+\xi)^2$$

Et

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi) T_i = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)0 + (1-\xi^2)1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)2$$

$$T(\xi) = 1 - \xi^2 + \frac{2\xi}{2} + \frac{2\xi^2}{2} = 1 + \xi$$

Donc comme résultat :

$$T(\xi) = 1 + \xi \qquad et \qquad x(\xi) = (1+\xi)^2$$

$$\Rightarrow 1 + \xi = \sqrt{x} \qquad\qquad \Rightarrow \xi = \sqrt{x} - 1$$

Remplaçons dans l'équation $T(\xi)$ pour avoir $T(x)$:

$$T(x) = 1 + \left(\sqrt{x} - 1\right) = \sqrt{x}$$

$$\boxed{\Rightarrow T(x) = \sqrt{x}}$$

2/ Si on utilise le polynôme de Lagrange :

$$T(x) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x)\, T_i$$

Avec

$$N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

- $N_1(x) = \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)} = \frac{(x-1)}{(0-1)}\frac{(x-4)}{(0-4)} = \frac{1}{4}(x-1)(x-4)$
- $N_2(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-4)}{(1-0)(1-4)} = -\frac{1}{3}x(x-4)$
- $N_3(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_3-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(4-0)(4-1)} = \frac{1}{12}x(x-1)$

On remplace dans $T(x)$

$$T(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x-4)T_1 - \frac{1}{3}x(x-4)T_2 + \frac{1}{12}x(x-1)T_3$$

$$T(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x-4)0 - \frac{1}{3}x(x-4)1 + \frac{1}{12}x(x-1)2$$

$$T(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x$$

Finalement

$$\boxed{T(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x}$$

Solution de l'exercice 05:

On a comme données :

- Noeud 1 ⇒ $x_1 = 0$ et $T_1 = 20$
- Noeud 2 ⇒ $x_2 = 0.5$ et $T_2 = 25$
- Noeud 3 ⇒ $x_3 = 1$ et $T_3 = 22$

En utilisant un élément quadratique :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^{3} N_i\,(\xi)\,x_1$$

Avec $x_1 = 0$ $\quad x_2 = 0.5$ $\quad$ et $\quad x_3 = 1$

Se basant toujours sur les tables (les annexes), les fonctions d'interpolation pour un élément 1D quadratique sont :

* $\bar{N}_1(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)$
* $\bar{N}_2(\xi) = 1-\xi^2$
* $\bar{N}_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1+\xi)$

Cela nous permet d'écrire :

$$x(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)0 + (1-\xi^2)(0.5) + \frac{\xi}{2}(1+\xi)1$$

$$x(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$\boxed{\xi = 2x-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

On interpole dans l'élément de référence

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \bar{N}_i\,(\xi)\,T_i$$

Avec $T_1 = 20,$ $\quad T_2 = 25$ $\quad$ et $\quad T_3 = 22$

$$T(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)20 + (1-\xi^2)25 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)22$$

Après développement, on obtient :

$$\boxed{T(\xi) = -4\xi^2 + \xi + 25} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

En remplaçant (1) dans (2)

$$T(x) = -4(2x-1)^2 + (2x-1) + 25$$

$$\Rightarrow T(x) = -16x^2 + 18x + 20$$

2/ En utilisant deux éléments linéaires

- Pour le premier élément $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$T_{\dot{1}}(\xi) = \sum_{i=1}^{2} \bar{N}_i\,(\xi)\,T_i = \left(\frac{1-\xi}{2}\right)T_1 + \left(\frac{1+\xi}{2}\right)T_2$$

$$T_{\dot{1}}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)20 + \frac{1}{2}(1+\xi)25$$

$$\Rightarrow T_{\dot{1}}(\xi) = (1-\xi)10 + (1+\xi)12.5$$

$$T_{\dot{1}}(\xi) = 10 - 10\xi + 12.5 + 12.5\xi$$

Or

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^{2} \bar{N}_i(\xi)x_i$$

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)0 + \frac{1}{2}(1+\xi)0.5$$

$$x(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi) \quad \Rightarrow \quad \xi = 4x - 1$$

Revenons à $T_{\dot{1}}(\xi)$:

$$T_{\dot{1}}\big(\xi(x)\big) = T_{\dot{1}}(x) = 2.5(4x-1) + 22.5$$

$$T_{\dot{1}}(x) = 10x - 2.5 + 22.5 = 10x + 20$$

$$\boxed{T_{\dot{1}}(x) = 10x + 20}$$

- Pour le deuxième élément $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, de la même manière on obtient :

$$T_{\dot{2}}(\xi) = -1.5\xi + 25$$

Et

$$\boxed{T_{\dot{2}}(x) = -6x + 28}$$